Operatori na unitarnim prostorima

Propozicija 3.32. Neka su V i W unitarni prostori i $A \in L(V, W)$ unitaran operator. Tada je

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^{-1}y \rangle, \quad \forall x \in V,\ \forall y \in W.$$

(**Dokaz.** Na predavanju. Za ocjene 4 i 5.)

Napomena 3.33.

a) Iz definicije (hermitski) adjungiranog operatora i prethodne propozicije možemo zaključiti da je operator A unitaran ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) odnosno ortogonalan ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ako je $A^* = A^{-1}$.

(b) Unitaran operator je normalan operator (obrazloženje na predavanju).

Definicija 3.34. Kažemo da je kompleksna kvadratna matrica A unitarna ako vrijedi

$$AA^* = A^*A = I.$$

Realna kvadratna matrica A je ortogonalna ako vrijedi

$$AA^T = A^TA = I.$$

Napomena 3.35. Ortogonalna matrica samo znači da se radi o realnoj unitarnoj matrici pa ćemo u nastavku često koristiti termin unitarna matrica i u kompleksnom i u realnom slučaju.

Primjer 3.36. Ispitajte je li matrica $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ unitarna.

(**Rješenje.** Nije unitarna.)

Korolar 3.37. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator. Matrica $[A]_e^e$ operatora A u svakoj ortonormiranoj bazi e prostora V je unitarna ako je prostor kompleksan, odnosno ortogonalna ako je prostor realan.
(**Dokaz.** Bez dokaza, dakle, dokaz se neće ispitivati na usmenom dijelu ispita. Iskaz je koristan u primjenama.)

Korolar 3.38. Produkt dvije unitarne (ortogonalne) matrice je također unitarna (ortogonalna) matrica.
(**Dokaz.** Na predavanju. Za sve ocjene.)

Definicija 3.39. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Kažemo da je operator A hermitski ako vrijedi

$$A^* = A.$$

Definicija 3.40. Kažemo da je kvadratna matrica $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_n$ hermitska ako vrijedi $A^* = A$, tj.

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Primjer 3.41. Jesu li matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i}-1 \\ -\mathrm{i}-1 & 1 \end{bmatrix}$ hermitske?

(**Rješenje.** Na predavanju.)

Propozicija 3.42. Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Sve svojstvene vrijednosti operatora A su realni brojevi. Za V proizvoljan konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator spektar operatora A je neprazan i svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima operatora A su međusobno okomiti.
(**Dokaz.** Bez dokaza, dakle, dokaz se neće ispitivati na usmenom dijelu ispita. Korisno za primjene.)

Kvadratne forme

- polinom u varijablama $x_1, \ldots, x_n$, s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$, naziva se forma stupnja p (u n varijabli $x_i, i = 1, \ldots, n$, nad poljem $\mathbb{F}$), ako su svi njegovi članovi stupnja p. Forme prvog stupnja se nazivaju linearne, drugog kvadratne, trećeg kubne.
- u nastavku ćemo razmatrati kvadratne forme. One se pojavljuju u raznim situacijama u matematici i primjenama.

Definicija 3.43. Funkcija $F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ definirana formulom

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad (a_{ij} \in \mathbb{F}, x \in \mathbb{F}^n)$$

naziva se kvadratna forma.

Napomena 3.44. Koristeći prikaz $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ i $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ kvadratnu formu možemo pisati i na sljedeći način

$$F(x) = \langle Ax, x \rangle = x^T A x.$$

Za matricu $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$ kvadratna forma ima oblik

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2.$$

Primjer 3.45. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. Napišite kvadratne forme koja odgovaraju danim matricama.

Napomena 3.46. Primjetimo da jednoj kvadratnoj formi odgovara više matrica.

Definicija 3.47. Kažemo da je kvadratna forma kanonska ako je pripadna matrica dijagonalna.

Primjer 3.48. Promotrimo kvadratnu formu, koja je primjer kanonske forme

$$F(x) = 7x_1^2 - 4x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

- Svaka se kvadratna forma može svesti na kanonsku.

Lema 3.49. Neka je $x^T A x$ kvadratna forma u varijablama $x_1, \ldots, x_n$, gdje je A simetrična matrica. Tada postoji ortonormirana matrica S tako da je

$$S^T A S = D,$$

gdje je D dijagonalna matrica.
Na dijagonali matrice D nalaze se svojstvene vrijednosti matrice A ($D = \Lambda$), dok je S matrica kojoj su stupci pripadni ortonormirani svojstveni vektori matrice A.

Primjer 3.50. Svedimo na kanonski oblik kvadratnu formu

$$F(x_1, x_2) = 2x_1x_2.$$

Rješenje ovog primjera, kao i svih drugih navedenih u materijalima, nalazi se na predavanju.

Krivulje drugog reda

Obično se u literaturi pod krivuljom drugog reda u ravnini M podrazumijeva takva krivulja koju proizvoljni pravac siječe najviše u dvije točke. Najpoznatije krivulje drugog reda u ravnini su: kružnica, elipsa, hiperbola i parabola.

Za svaku od navedenih krivulja moguće je izabrati takav pravokutni koordinatni sustav $(O; e_1, e_2)$ u ravnini M da su one opisane sljedećim jednadžbama:

$x^2 + y^2 = r^2$ (kružnica radijusa r sa središtem u točki O)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa s poluosima $a > 0$ i $b > 0$ sa središtem u točki O)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hiperbola s poluosima $a > 0$ i $b > 0$ sa središtem u točki O)

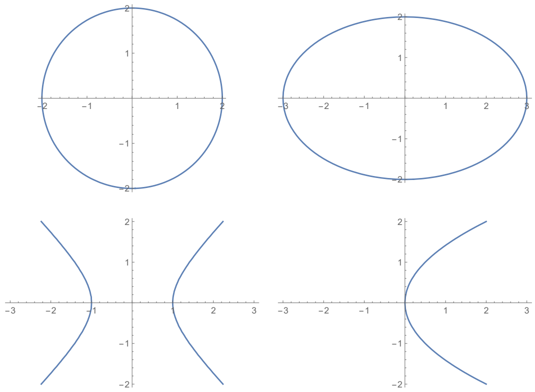
$y^2 = 2px$ (parabola s parametrom p i tjemenom u točki O)

Grafove ovih krivulja možemo lako nacrtati primjenom programskog sustava *Mathematica.* U verziji *Mathematica 12* crtanje implicitno zadanih krivulja radi se primjenom naredbe `ContourPlot`

```
In[1]:= (* Kruznica radijusa 2*)
           slk = ContourPlot[x^2 + y^2 == 2^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
                      Axes -> True, Frame -> False];
        (* Elipsa s poluosima a=3, b=2 *)
           sle = ContourPlot[x^2/3^2 + y^2/2^2 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
                        AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, Frame -> False];
        (* Hiperbola s poluosima a=b=1 *)
           slh = ContourPlot[x^2 - y^2 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
                        AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, Frame -> False];
        (* Parabola s parametrom p=1 *)
           slp = ContourPlot[y^2 == 2 x, {x, -3, 3}, {y, -2, 2},
                        AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, Frame -> False];
        Print[GraphicsGrid[{{slk, sle}, {slh, slp}}]]
```

Definicija 3.51. Krivulje drugog reda se definiraju kao skup svih nultočaka polinoma drugog reda dviju varijabli $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$



Slika 1: Kružnica, elipsa, hiperbola i parabola

pri čemu matrica prisutne kvadratne forme $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ nije nul-matrica, što znači da je barem jedan od koeficijenata koji stoje uz potencije reda 2 različit od nule.

Jedan dio teksta koji slijedi raspisan je na vježbama, u nastavku će biti raspisano i detaljnije za one koji žele znati više, no ispitivat će se samo dio koji smo teorijski zapisali na predavanjima (za usmeni dio ispita) i vježbama (za pismeni dio ispita).

Vrijedi sljedeći teorem pomoću kojega možemo *identificirati* krivulju drugog reda:
Teorem 3.52. Neka je $S \subset M$ skup svih nultočaka polinoma $\mathcal{P}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i neka je $A \neq O$ matrica pripadne kvadratne forme. Tada

1^0 ako je $\det A > 0$, onda je S elipsa ili jednočlan ili prazan skup;

2^0 ako je $\det A < 0$, onda je S hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku;

3^0 ako je $\det A = 0$, onda je S parabola ili unija dvaju paralelnih pravaca ili jedan pravac ili prazan skup.

Napomena 3.54. Ako uvedemo vektore $x = x_1e_1 + x_2e_2$ i $a = a_1e_1 + a_2e_2$, jednadžbu

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$$

možemo zapisati kao

$$\mathcal{A}x \cdot x + a \cdot x + a_0 = 0, \tag{2}$$

gdje je $\mathcal{A}$ simetrični linearni operator kome je u bazi (e_1, e_2) pridružena matrica A. Zatim, može se pronaći nova ortonormirana baza (e_1', e_2') u kojoj je matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$ dijagonalna, čiji su elementi realne svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 operatora $\mathcal{A}$. Vektori x i a dobivaju nove koordinate

$$x = y_1e_1' + y_2e_2', \qquad a = b_1e_1' + b_2e_2',$$

a jednadžba (2) prelazi u

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a_0 = 0, \qquad \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2, a_0 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Primijetite da u ovoj jednadžbi više nema mješovitog člana.

Kako je $A \neq O$, barem jedna svojstvena vrijednost linearnog operatora $\mathcal{A}$ je različita od nule. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda_1 \neq 0$. Sada možemo pretpostaviti i da je $\lambda_1 > 0$[1]!

U nastavku dokaz ćemo podijeliti u tri koraka

$$\begin{array}{lll} I. & \lambda_2 \neq 0 & \\ II. & \lambda_2 = 0 \;\;\&\;\; b_2 \neq 0 \\ III. & \lambda_2 = 0 \;\;\&\;\; b_2 = 0 \end{array}$$

Slučaj I. Pretpostavimo da je $\lambda_2 \neq 0$. Kako je u ovom slučaju $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, vrijedi

$$\lambda_1 y_1^2 + b_1 y_1 = \lambda_1 \left(y_1 + \tfrac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \tfrac{b_1^2}{4\lambda_1},$$

$$\lambda_2 y_2^2 + b_2 y_2 = \lambda_2 \left(y_2 + \tfrac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 - \tfrac{b_2^2}{4\lambda_2},$$

pa uz oznake

$$z_1 := y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \qquad z_2 := y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2},$$

jednadžba (3) prelazi u

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = \gamma, \quad \text{gdje je} \quad \gamma = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a_0. \tag{4}$$

Na početku smo utvrdili da smijemo pretpostaviti da je $\lambda_1 > 0$. Obzirom da je u ovom slučaju $\lambda_2 \neq 0$, moguće su dvije situacije:

(i) $\lambda_2 > 0$. Zbog $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, ova je situacija karakterizirana jednostavnim kriterijem: $\det A > 0$.
Kako je u ovom slučaju $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$, jednadžba (4) može predstavljati: elipsu (za $\gamma > 0$) ili jednočlan skup (za $\gamma = 0$) ili prazan skup (za $\gamma < 0$).

(ii) $\lambda_2 < 0$. Ova situacija karakterizirana je kriterijem: $\det A < 0$.
Kako je u ovom slučaju $\lambda_1 > 0$, a $\lambda_2 < 0$, jednadžba (4) može predstavljati: hiperbolu (za $\gamma \neq 0$) ili uniju dvaju pravaca koji se sijeku (za $\gamma = 0$).

Slučaj II. Pretpostavimo da je $\lambda_2 = 0$, ali da je $b_2 \neq 0$.
U ovom slučaju jednadžbu (3) možemo zapisati u obliku

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2 + \beta = 0, \tag{5}$$

[1] ako nije, jednadžbu (3) možemo pomnožiti s (-1)

gdje je

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2, \qquad \beta = a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}.$$

Jednadžba (5) predstavlja parabolu.

Slučaj III. Pretpostavimo da je $\lambda_2 = 0$ i da je $b_2 = 0$.
Sada je jednadžba (3) sasvim jednostavna

$$\lambda_1 y_1^2 + b_1 y_1 + a_0 = 0,$$

i nakon dijeljenja s λ_1 i svođenja na potpuni kvadrat postaje

$$\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + 0 \cdot y_2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1^2} + \frac{a_0}{\lambda_1} = 0$$

i može se zapisati u obliku

$$z_1^2 + 0 \cdot z_2 = \gamma, \tag{6}$$

gdje je

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2, \qquad \gamma = \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{b_1^2}{4\lambda_1} - a_0\right).$$

Skup svih rješenja jednadžbe (6) za $\gamma < 0$ je **prazan skup**, za $\gamma = 0$ to je **pravac** $z_1 + 0 \cdot z_2 = 0$, a za $\gamma > 0$ to je **unija paralelnih pravaca**.

$$z_1 + 0 \cdot z_2 = \sqrt{\gamma}, \qquad z_1 + 0 \cdot z_2 = -\sqrt{\gamma}.$$

Time je dokaz teorema kompletiran. ♣