Konačnodimenzionalni vektorski prostori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Pojam vektorskog prostora

Osnovne algebarske strukture

Definicija 1.0. Neka je G neprazan skup te $+$ binarna operacija na G (s $+$ ćemo označavati binarnu operaciju zbrajanja). Binarna operacija na G je preslikavanje

$$+ : G \times G \to G,$$

tj.

$$(a, b) \mapsto a + b \in G, \quad za \quad a, b \in G.$$

Kažemo da je uređen par $(G, +)$ grupa ako vrijede sljedeća svojstva:

(1) (Asocijativnost) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in G.$

(2) (Postojanje neutralnog elementa) postoji $e \in G$ sa svojstvom $\alpha + e = e + \alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in G$. S obzirom na binarnu operaciju zbrajanja, neutralni element je 0.

(3) (Postojanje inverznog elementa) za svaki $\alpha \in G$ postoji $\beta \in G$ tako da je $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0$, gdje je 0 (nula) neutralni element za zbrajanje. Takav element β nazivamo inverzni element od α. Inverzni element od α, s obzirom na binarnu operaciju zbrajanja je $-\alpha$.

Najčešće će nas zanimati grupe s još jednim dodatnim svojstvom:

(4) (Komutativnost) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in G.$

Kažemo da je uređeni par $(G, +)$ Abelova grupa ako vrijede prethodna 4 svojstva.

Primjer. Svaka od sljedećih tvrdnji je detaljno obrazložena na predavanju:

(a) $(\mathbb{Z}, +)$ je grupa.

(b) $(\mathbb{N}, +)$ nije grupa.

(c) $(\mathbb{N}, -)$ nije grupa.

(d) $(\mathbb{Z}, -)$ nije grupa.

(e) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ nije grupa.

(f) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nije grupa.

(g) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ su Abelove grupe, kao i $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$.

(h) Skup vektora sa zbrajanjem je Abelova grupa.

Definicija 1.1. Neka je $\mathbb{F}$ neprazan skup na kojem su zadane binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ i množenja $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Uređenu trojku $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ zovemo poljem ako vrijedi:

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$;

(2) postoji $0 \in \mathbb{F}$ sa svojstvom $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$;

(3) za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$ postoji $-\alpha \in \mathbb{F}$ tako da je $\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = 0$;

(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(5) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$;

(6) postoji $1 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ sa svojstvom $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$;

(7) za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ postoji $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ tako da je $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$;

(8) $\alpha\beta = \beta\alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(9) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

Prethodnu definiciju možemo zapisati i na sljedeći način:

Definicija 1.1. Neka je $\mathbb{F}$ neprazan skup na kojem su zadane binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ i množenja $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Kažemo da je uređena trojka $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ polje ako vrijedi:

(1) $(\mathbb{F}, +)$ je Abelova grupa.

(2) $(\mathbb{F}\backslash\{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa.

(3) (Množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

Primjer. Primjetimo (iz prethodnog primjera) da su uređene trojke $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje.

Definicija 1.2. Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \forall a, b, c \in V;$

(2) postoji $0 \in V$ sa svojstvom $a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in V;$

(3) za svaki $a \in V$ postoji $-a \in V$ takav da je $a + (-a) = -a + a = 0;$

(4) $a + b = b + a, \quad \forall a, b \in V;$

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall a \in V;$

(6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall a \in V;$

(7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F},\ \forall a, b \in V;$

(8) $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in V.$

Napomena 1.3.

(a) operacije na vektorskom prostoru su preslikavanja

(b) priroda elemenata skupa V je irelevantna. Elementi vektorskog prostora nazivaju se vektori.

(c) $\mathbb{F}$ može biti bilo koje polje, no najvažniji su slučajevi vektorskih prostora sagrađenih nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$ nazivaju se realni vektorski prostori; za one nad poljem $\mathbb{C}$ kažemo da su kompleksni. Elemente polja zovemo skalarima.

(d) većina tvrdnji bit će iskazana simultano za oba slučaja i tada će u iskazima stajati simbol $\mathbb{F}$

(e) formalno se govori o uređenoj trojci $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$, no kada je iz konteksta jasno o kojim je operacijama i o kojem polju riječ, pisat ćemo jednostavno V

Napomena 1.4.

(a) svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje

(b) uvjet (3) nalaže postojanje suprotnog elementa

(c) svojstvo (5) zovemo kvaziasocijativnost

(d) svojstva (6) i (7) zovu se distributivnost množenja prema zbrajanju skalara, odnosno vektora

(e) uvjeti iz definicije su međusobno nezavisni

Propozicija 1.5. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada

(1) Za $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a \in V$ vrijedi $\alpha a = 0$ ako i samo ako je $\alpha = 0$ ili $a = 0$;

(2) $(-\alpha)a = \alpha(-a) = -(\alpha a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in V$;

(3) $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in V$;

(4) $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in V$.

(**Dokaz.** Na predavanju je detaljno dokazana trvdnja (1). Ostale tvrdnje nisu dokazane te je na usmenom dijelu ispita potrebno znati samo iskaz tih tvrdnji.)