Konačnodimenzionalni vektorski prostori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Baza i dimenzija

Definicija Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ i $k \in \mathbb{N}$ tada vektor

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \in V \tag{1}$$

nazivamo linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (s koeficijentima/skalarima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$).

Kažemo još da je (1) rastav/razvoj vektora a po vektorima $a_1, \ldots, a_k$.

Definicija [**LN**] Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Kažemo da je konačan skup vektora

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

iz V linearno nezavisan ako njihova linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način, tj. vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

U suprotnom kažemo da je skup S linearno zavisan.

Napomena

(a) Linearna zavisnost/nezavisnost ne ovisi o poretku elemenata (vektora) u skupu S –to je posljedica komutativnosti zbrajanja u vektorskom prostoru.

(b) atribut "linearno" ponekad ispuštamo, pa govorimo o nezavisnim, odnosno zavisnim skupovima.

Korolar 1.6. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

(a) za svaki $a \in V$, $a \neq 0$, jednočlan skup $\{a\}$ je inearno nezavisan (**Dokaz.** Na predavanju.)

(b) svaki skup koji sadrži nulvektor je inearno zavisan (**Dokaz.** Na predavanju.)

(c) svaki neprazni podskup inearno nezavisnog skupa je inearno nezavisan (**Dokaz.** Na predavanju.)

(d) svaki nadskup linearno zavisnog skupa je inearno zavisan (**Dokaz.** Bez dokaza.)

Propozicija Skup $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$, u vektorskom prostoru V je linearno zavisan ako i samo ako se barem jedan od tih vektora može prikazati kao linearna kombinacija ostalih.
(**Dokaz.** Na predavanju.)

Definicija 1.10. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Linearna ljuska skupa S označava se simbolom $[S]$ i definira kao

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \ : \ \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dodatno, definira se $[\emptyset] = \{0\}$.
Na predavanju je također pokazano da je uvijek $S \subseteq [S]$. Vidi i odgovarajući primjer.
Definicija 1.11. Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kaže se da je S sustav izvodnica za V (ili da S generira V ili da S razapinje V) ako vrijedi $[S] = V$.

Propozicija 1.12. Neka je S sustav izvodnica za vektorski prostor V te neka u S postoji vektor x koji se može prikazati kao linearna kombinacija (nekih drugih) elemenata iz S. Tada je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.
(**Dokaz.** Na predavanju. Ispituje se samo za ocjene 4 i 5)

Definicija 1.13. Konačan skup $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V se naziva baza za V ako je B linearno nezavisan sustav izvodnica za V.

Teorem 1.14. [Fundamentalni rezultat linearne algebre] Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ baza za V. Tada za svaki $v \in V$ postoje jedinstveno određeni skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da vrijedi

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

(**Dokaz.** Na predavanju. Ispituje se za ocjene 3 i više.)

Primjer.

(a) Skup $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ je baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Skup $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ je baza prostora $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.15. Kažemo da je vektorski prostor V konačnodimenzionalan (ili konačnogeneriran) ako postoji neki konačan sustav izvodnica za V.