Baza i dimenzija

Propozicija 1.16. Neka je $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, sustav izvodnica za vektorski prostor $V \neq \{0\}$. Tada postoji baza prostora V koja je podskup skupa S.
(**Dokaz.** Na predavanju. Ispituje se samo za ocjene 4 i 5)

Napomena 1.17. Postupak koji smo primijenili u prošlom dokazu naziva se redukcija sustava izvodnica do baze.

Napomena 1.17.1 Vrijedi:

(a) $[\emptyset] = \{0\}$ ($\{0\}$ nazivamo nulprostor)

(b) Nadskup sustava izvodnica je ponovo sustav izvodnica.

Teorem 1.18. Svaki konačnodimenzionalan vektorski prostor $V \neq \{0\}$ ima bazu.
(**Dokaz.** Na predavanju.)

Lema 1.19. Neka je $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sustav izvodnica za vektorski prostor V, te neka je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq V$ linearno nezavisan. Tada je $k \leq n$.
(**Lema je dana bez dokaza; dakle dokaz se neće tražiti na usmenom dijelu ispita.**)

Teorem 1.20. [O jednakobrojnosti baza] Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. Sve baze prostora V su jednakobrojne.
(**Dokaz.** Na predavanju. Ispituje se za ocjene 3 i više.)

Definicija 1.21. Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dimenzija prostora V definira se kao broj elemenata bilo koje njegove baze. Dodatno, uzima se da je dimenzija nulprostora 0.

Propozicija (Pomoćna tvrdnja) Ako je skup $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \geq 2$, linearno zavisan, uređen, te ako je $a_1 \neq 0$, onda postoji $l \in \{2, \dots, k\}$ takav da je a_l linearna kombinacija svojih prethodnika u skupu S, tj. vektora $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$.
(**Dokaz.** Propozicija je dana bez dokaza, dakle, dokaz se neće ispitivati na usmenom dijelu ispita.)

Propozicija 1.22. Neka je $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, linearno nezavisan skup u konačnodimenzionalnom prostoru V. Tada se A može nadopuniti do baze.
(**Dokaz.** Na predavanju. Ispituje se samo za ocjene 4 i 5)

Primjere redukcije sustava izvodnica do baze te nadopunjavanja linearno nezavisnog skupa do baze možete pogledati na predavanju i vježbama.

Napomena 1.24. Postupak proširenja nezavisnog skupa do baze prostora nikako nije jedinstven.

Korolar 1.25. Neka je V vektorski prostor, te neka je $\dim V = n < \infty$.

(a) Svaki linearno nezavisan skup u V ima n ili manje elemenata. Svaki linearno nezavisan skup u V koji ima točno n elemenata je baza za V.

(b) Svaki sustav izvodnica za V ima n ili više elemenata. Svaki sustav izvodnica za V koji ima točno n elemenata je baza za V.

(**Dokaz.** Bez dokaza, prokomentirano usmeno.)