Konačnodimenzionalni vektorski prostori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Potprostor

Definicija 1.27. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V, kažemo da je M potprostor od V.

Kada je M potprostor od V, pisat ćemo $M \leq V$.

Propozicija 1.28. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazni podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(i) $a + b \in M, \qquad \forall a, b \in M,$

(ii) $\alpha a \in M, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall a \in M.$

(**Dokaz.** Bez dokaza, no uz detaljno prethodno objašnjenje.)

Napomena Svaki vektorski prostor V ima dva rubna potprostora. To su $\{0\}$ i V. Kaže se da su ti prostori trivijalni.

Primjer. Neka je $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ realan vektorski prostor. Sljedeći primjeri su detaljno obrazloženi na predavanju:

(a) $M = \{(x, y) : x \cdot y > 0\}$ nije potprostor od $\mathbb{R}^2$.

(b) $U = \{(x, y) : x \cdot y \geq 0\}$ nije potprostor od $\mathbb{R}^2$.

Korolar 1.29. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazan podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi

($\star$) $\alpha a + \beta b \in M, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall a, b \in M.$

(**Dokaz.** Na predavanju. Ispituje se za ocjene 3 i više.)

Napomena 1.30. Ako je $M \leq V$, onda je, po prethodnom korolaru, M zatvoren na dvočlane linearne kombinacije svojih elemenata. Metodom matematičke indukcije može se pokazati da to vrijedi i za sve (naravno, konačne) linearne kombinacije vektora iz M. Eksplicitno: ako je $M \leq V$, onda za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, $a_1, \ldots, a_n \in M$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in M$.

Primjer Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Tada je $[S]$ potprostor od V. (**Pokazano na predavanju, prema prethodnom korolaru.**)
Može se pokazati da je $[S]$ zapravo najmanji potprostor od V koji sadrži S.

Propozicija 1.34. Neka je V vektorski prostor takav da je $\dim V = n < \infty$ te neka je M potprostor od V. Tada je $\dim M \leq n$.
Ako je M potprostor od V takav da je $\dim M = n$, onda je $M = V$.
(**Propozicija je dana bez dokaza; dakle dokaz se neće tražiti na usmenom dijelu ispita.**)

Propozicija 1.35. Neka je V vektorski prostor te neka su L i M njegovi potprostori. Tada je i $L \cap M$ potprostor od V.
(**Dokaz.** Na predavanju. Ispituje se za ocjene 3 i više.)
Napomena 1.36. Ako je M_i, $i \in I$, familija potprostora vektorskog prostora V (pri čemu je indeksni skup I proizvoljno velik, moguće i beskonačan), onda je i $\cap_{i \in I} M_i$ također potprostor od V.

- Presjek potprostora nikada nije prazan.
- Pokazali smo da je presjek potprostora uvijek potprostor no unija dva potprostora gotovo nikada neće biti potprostor. Primjer je dan na predavanju.

Definicija 1.37. Neka je V vektorski prostor te neka su L i M njegovi potprostori. Suma potprostora L i M označava se s $L + M$ i definira kao

$$L + M = [L \cup M].$$

Također,

$$L + M = \{x + y \ : \ x \in L, y \in M\}.$$

Definicija 1.39. Neka je V vektorski prostor te neka su L i M njegovi potprostori. Kažemo da je suma potprostora L i M direktna i tada je označavamo s $L \dot{+} M$ ako je

$$L \cap M = \{0\}.$$

Teorem (važan) Neka je V konačnodimenzionalan prostor te neka su L i M potprostori od V. Tada je

$$\dim(L + M) + \dim(L \cap M) = \dim L + \dim M.$$

(**Dokaz.** Na predavanju. Iskaz trebaju znati svi studenti, a dokaz samo oni koji odgovaraju za ocjene 4 i 5.)

Korolar 1.42. Neka potprostori L i M konačnodimenzionalnog prostora V čine direktnu sumu. Tada je

$$\dim(L \dot{+} M) = \dim L + \dim M.$$

(**Dokaz.** Na predavanju; za ocjene 4 i 5, radi se o zadnjem (malom) dijelu prethodnog dokaza, ponovit ćemo na sljedećem predavanju.)