Konačnodimenzionalni vektorski prostori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Potprostor

Korolar 1.42. Neka potprostori L i M konačnodimenzionalnog prostora V čine direktnu sumu. Tada je

$$\dim(L \dot{+} M) = \dim L + \dim M.$$

(**Dokaz.** Na predavanju; za ocjene 4 i 5, radi se o zadnjem (malom) dijelu dokaza s prethodnog predavanja.)

Definicija 1.45. Neka je V vektorski prostor te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L u V ako vrijedi

$$L \dot{+} M = V.$$

Iz definicije je jasno da su u svakom vektorskom prostoru V dva trivijalna potprostora V i $\{0\}$ direktni komplementi jedan drugog, tj.

$$V \dot{+} \{0\} = V.$$

Teorem 1.46. (Egzistencija direktnog komplementa za proizvoljan potprostor danog konačnodimenzionalnog prostora)
Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i L njegov potprostor. Tada postoji direktan komplement od L u V.
(**Dokaz.** Bez dokaza.)

Primjer. Pokažite da je skup

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^3$ te mu odredite jednu bazu i dimenziju te direktan komplement za taj potprostor.
(**Rješenje.** Na predavanju.)

Napomena 1.47. U proizvoljnom vektorskom prostoru niti jedan netrivijalni potprostor nema jedinstven direktan komplement.

Kvocijentni potprostori

- V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan, M potprostor od V
- definiramo binarnu relaciju $\sim$ na V formulom

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in M, \quad x, y \in V$$

- Relacija $\sim$ je refleksivna, simetrična i tranzitivna (vidi dokaz na predavanju), dakle, to je relacija ekvivalencije na V
- za $x \in V$ s $[x]$ označavamo klasu ekvivalencije određenu vektorom x, odnosno

$$[x] = \{y \in V \ : x \sim y\}$$

- x nazivamo reprezentantom ili predstavnikom ove klase ekvivalencije.
- klase ekvivalencije za ovako uvedenu relaciju možemo i preciznije opisati: vrijedi

$$[x] = x + M, \quad \forall x \in V,$$

  pri čemu $x + M$ označava skup $\{x + a \ : \ a \in M\}$

Definicija 1.48. Neka je M potprostor prostora V. Svaki skup oblika

$$x + M = \{x + a \ : \ a \in M\}, \quad x \in V,$$

naziva se linearna mnogostrukost u smjeru potprostora M. Skup svih linearnih mnogostrukosti u smjeru potprostora M označava se s V/M i naziva kvocijentni skup ili kvocijent (prostora V po potprostoru M).

Teorem 1.49. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je M potprostor od V. Tada je uz operacije

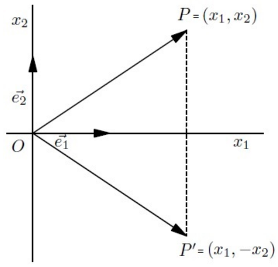
$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M, \quad x, y \in V$$

$$\alpha(x + M) = \alpha x + M, \quad \alpha \in \mathbb{F}, \ \ x \in V,$$

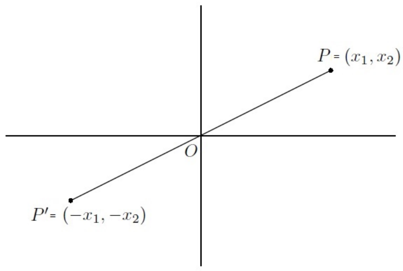
kvocijentni skup V/M vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.
(**Teorem je dan bez dokaza; dakle dokaz se neće tražiti na usmenom dijelu ispita.**)

Linearni operatori

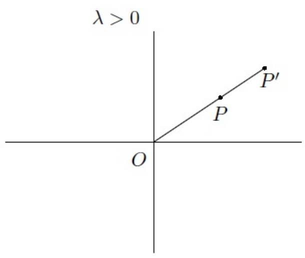
Primjer 2.1. (Simetrija ravnine M u odnosu na prvu koordinatnu os) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena osnosimetrična slika obzirom na prvu koordinatnu os točka P' s koordinatama $(x_1, -x_2)$.

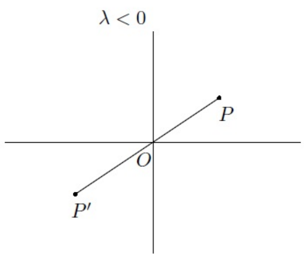


Primjer 2.2. (Centralna simetrija ravnine M u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena centralno simetrična slika u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava točka P' s koordinatam $(-x_1, -x_2)$.

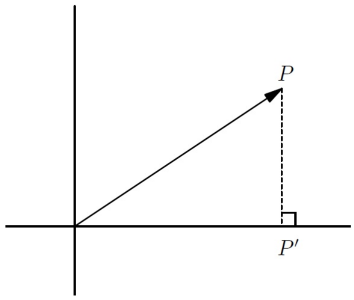


Primjer 2.3. (Homotetija ravnine M u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena homotetična slika u odnosu na ishodište O koordinatnog sustava točka P' s koordinatama $(\lambda x_1, \lambda x_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

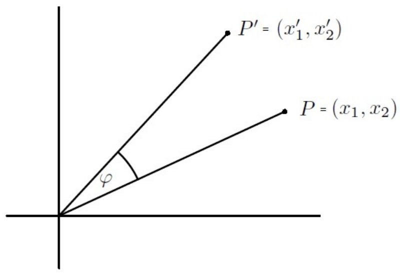




Primjer 2.4. (Ortogonalna projekcija ravnine M na prvu koordinatnu os) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), onda je njena ortogonalna projekcija na prvu koordinatnu os točka P' s koordinatama $(x_1, 0)$.



Primjer 2.5. (Rotacija ravnine M za kut φ oko ishodišta O koordinatnog sustava) Ako je $P \in M$ proizvoljna točka s koordinatama (x_1, x_2), može se pokazati da rotacijom za kut φ oko ishodišta O koordinatnog sustava dobivamo točku P' s koordinatama $(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)$.



Definicija 2.6. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ zove se linearan operator ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \qquad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Napomena 2.7.

(a) Definiciona jednakost

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \qquad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

naziva se linearnost preslikavanja A. Odavde odmah slijedi

$$A(x + y) = Ax + Ay, \qquad \forall x, y \in V$$

(ako se uzme $\alpha = \beta = 1$), te

$$A(\alpha x) = \alpha Ax, \qquad \forall x \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$$

(ako se uzme $\beta = 0$). Ova se svojstva zovu aditivnost i homogenost. Dakle, svaki je linearan operator aditivno i homogeno preslikavanje.

(b) Svaki linearan operator nulvektor prevodi u nulvektor:

$$A0 = 0.$$

(**Dokaz.** Na predavanju.)

(c) Ako je $A : V \to W$ linearan operator, metodom matematičke indukcije pokazuje se da tada vrijedi i

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A x_i, \qquad \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in V, \\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}. \end{array}$$

Često se zato kaže da linearni operatori poštuju linearne kombinacije.

Propozicija. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(a) $A : V \to W$ je linearan operator.

(b) Za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ i $x, y \in V$ vrijedi $A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay$.

(c) A je aditivan i homogen.
(**Dokaz.** Na predavanju. Za ocjene 3 i više.)

Dakle, možemo zaključiti

$$\text{linearan operator} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{aditivan i homogen operator}$$