Linearni operatori. Primjeri linearnih operatora.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Primjeri.

a) Preslikavanja iz Primjera 2.1. do 2.5 s prošlih predavanja su linearni operatori.

b) Je li operator $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $C(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2)$ linearan? Primjer je detaljno riješen na predavanju.

c) Pokažite da je $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2),$$
linearan operator. Ovaj je primjer ostao za domaću zadaću.

d) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$A(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2 + 5),$$
nije linearan operator. Primjer je detaljno riješen na predavanju.

e) Transponiranje matrica $T : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{F})$,
$$T(A) = A^T,$$
je linearan operator. Primjer je detaljno riješen na predavanju.

f) Neka su V i W proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je preslikavanje $0 : V \to W$, definirano s
$$0x = 0, \qquad \forall x \in V,$$
linearan operator. Ovaj operator se naziva nuloperator. Primjer je detaljno riješen na predavanju.

Napomena ($\star$)

a) Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza prostora V. Uzmimo proizvoljan $x \in V$ i napišimo ga u obliku (na jedinstven način, zbog FRLA)
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i.$$
Sada je
$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i.$$
Zaključujemo: poznajemo li vektore $Ab_1, \ldots, Ab_n$, onda implicitno poznajemo i Ax, za svaki vektor x iz domene.

b) Iz prethodnog slijedi: Ako se linearni operatori $A : V \to W$ i $B : V \to W$ podudaraju u djelovanju na svim vektorima neke baze prostora V, onda je $A = B$.
U tom smislu kažemo i da je svaki linearni operator definiran na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru jedinstveno određen svojim djelovanjem na (bilo kojoj) bazi.

Propozicija 2.10. (Zadavanje linearnog operatora na bazi i proširenje po linearnosti). Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V i $(w_1, \ldots, w_n)$ bilo koja uređena $n-$torka vektora iz W. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : V \to W$ takav da je

$$Ab_i = w_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

(**Dokaz.** Bez dokaza. Iskaz će nam biti od važnosti u nastavku.)
Propozicija 2.11. Neka je $A : V \to W$ linearan operator.

(i) Ako je $L \leq V$, onda je $A(L) \leq W$.

(ii) Ako je $M \leq W$, onda je $A^{-1}(M) \leq V$.

(**Dokaz.** Bez dokaza. Dakle, dokaz se neće ispitivati na usmenom dijelu ispita.)

Definicija 2.12. (Slika, jezgra, rang i defekt)

Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Potprostori

$$\operatorname{Im} A = A(V) = \{Av \ : \ v \in V\} \leq W$$

i

$$\operatorname{Ker} A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \ : \ Ax = 0\} \leq V$$

zovu se slika, odnosno jezgra operatora A. Kada su V i W konačnodimenzionalni, rang i defekt operatora A definiraju se kao brojevi

$$\mathrm{r}(A) = \dim(\operatorname{Im} A),$$

odnosno

$$\mathrm{d}(A) = \dim(\operatorname{Ker} A).$$

Na predavanju je dokazano da su slika i jezgra zaista potprostori od W, odnosno V.

Napomena $\star\star$ Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$,

$n \in \mathbb{N}$, bilo koja baza prostora V. Sada za proizvoljan

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V$$

imamo

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i,$$

što pokazuje da je skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ sustav izvodnica za $\mathrm{Im}\, A$. Vrijedi, dakle,

$$\mathrm{Im} A = [\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}] \quad \text{i} \quad \mathrm{r}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, A) \leq n.$$

Primjer. Neka je $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator definiran s

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2x_3, -2x_1 + x_2 + 3x_3, x_2 - x_3).$$

Nađite bazu za sliku te bazu za jezgru operatora $\mathcal{F}$. Zatim, odredite rang i defekt operatora $\mathcal{F}$.
(**Primjer je detaljno riješen na predavanju.**)