Linearni operatori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Propozicija 2.14. Linearan operator $A : V \to W$ je injekcija ako i samo ako je

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}$$

(tj. ako i samo ako je $\mathrm{d}(A) = 0$).
(**Propozicija je dana bez dokaza; dakle dokaz se neće tražiti na usmenom dijelu ispita.**)
Propozicija 2.15. Neka je $A : V \to W$ linearan operator. A je injekcija ako i samo ako je za svaki linearno nezavisan skup S u V skup

$$A(S) = \{Ax \ : \ x \in S\}$$

linearno nezavisan u W.
(**Propozicija je dana bez dokaza; dakle dokaz se neće tražiti na usmenom dijelu ispita.**)
Teorem 2.16. (Teorem o rangu i defektu) Neka je $A : V \to W$ linearan operator, te neka je $\dim V < \infty$. Tada je

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V.$$

(**Dokaz.** Na predavanju. Iskaz trebaju znati svi studenti, a dokaz samo oni koji odgovaraju za ocjene 4 i 5.)

Definicija 2.17. Linearan operator $A : V \to W$ naziva se:

(i) monomorfizam ako je A injekcija;

(ii) epimorfizam ako je A surjekcija;

(iii) izomorfizam ako je A bijekcija.

U nastavku navodimo posljedice teorema o rangu i defektu.

Korolar 2.18. Neka je $A : V \to W$ linearan operator te neka je $\dim V = \dim W < \infty$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:

(i) A je monomorfizam;

(ii) A je epimorfizam;

(iii) A je izomorfizam.

(**Dokaz.** Na predavanju. Na usmenom dijelu ispita ispituje se za ocjene 3 i više.)

Za linearan operator $A : V \to V$ pretpostavka $\dim V = \dim V$ je odmah ispunjena te za takve operatore odmah vrijedi tvrdnja prethodnog korolara, no naravno uz uvjet da je $\dim V < \infty$ (kao što je i navedeno u tvrdnji korolara).

Propozicija 2.19. Neka je $A : V \to W$ linearan operator te neka je $\dim V = n < \infty$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:

(i) A je izomorfizam;

(ii) za svaku bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ od V skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ je baza za W;

(iii) postoji baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od V takva da je skup $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ baza za W.

(**Dokaz.** Na predavanju. Na usmenom dijelu ispita ispituje se za ocjene 4 i 5.)

Propozicija 2.20. Neka su $A : V \to W$ i $B : W \to X$ linearni operatori. Tada je i $BA : V \to X$ linearan operator. Posebno, kompozicija dvaju monomorfizama (epimorfizama, izomorfizama) je opet monomorfizam (epimorfizam, izomorfizam).
(**Dokaz.** Na predavanju. Na usmenom dijelu ispita ispituje se za ocjene 3 i više.)

Definicija 2.21. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem. Kažemo da je V izomorfan s W (i pišemo $V \simeq W$) ako postoji izomorfizam $A : V \to W$.

Propozicija 2.22. Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad istim poljem. Tada je $V \simeq W$ ako i samo ako vrijedi

$$\dim V = \dim W.$$

Posebno, izomorfnost prostora je relacija ekvivalencije.
(**Dokaz.** Na predavanju. Na usmenom dijelu ispita ispituje se za ocjene 4 i 5.)

Napomena 2.23.

(a) Da je izomorfizam relacija ekvivalencije, može se pokazati i za prostore koji nisu konačnodimenzionalni, tj. ne pozivajući se na dimenziju prostora.

(b) Ako je

$$A : V \to W$$

izomorfizam, onda je i inverzno preslikavanje

$$A^{-1} : W \to V$$

izomorfizam.

(c) Ako je $A : V \to V$ linearan i bijektivan, češće se kaže da je A regularan ili invertibilan operator. Termin izomorfizam je rezerviran za operatore između različitih prostora. U toj terminologiji za operatore koji nisu regularni kaže se da su singularni.