Linearni operatori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Prostor linearnih operatora

Definicija 2.25. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Za $A, B \in L(V,W)$ definira se $A + B : V \to W$ s

$$(A + B)x = Ax + Bx.$$

Nadalje, za $A \in L(V,W)$ i $\alpha \in \mathbb{F}$, definira se $\alpha A : V \to W$ s

$$(\alpha A)x = \alpha Ax.$$

Teorem 2.26. Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Tada je i $L(V,W)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.
(**Dokaz.** Na predavanju je dokazano da je prethodno definirana operacija $+$ binarna te da je i druga navedena operacija dobro definirana. Provjera svojstava vektorskog prostora je rutinska te smo je izostavili. Dio dokaza koji smo proveli je za ocjene od 3 do 5)

Teorem 2.27. Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je

$$\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W.$$

(**Dokaz.** Na predavanju. Iskaz trebaju znati svi studenti, a dokaz samo oni koji odgovaraju za ocjenu 5.)

- u specijalnom slučaju kada je $V = W$, umjesto $L(V,V)$ ćemo pisati $L(V)$

Napomena. Komponiranje linearnih operatora je binarna operacija na $L(V)$.

Matrični zapis linearnog operatora

- V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven prikaz oblika
$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i;$$
- matrični zapis (prikaz) vektora x u bazi e dan je s
$$[x]^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{F}).$$

Primjer. Pronađi matrični zapis vektora $x = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ u kanonskoj bazi.

Propozicija 2.29. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Preslikavanje
$$\varphi : V \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{F}), \quad \varphi(x) = [x]^e$$
je izomorfizam.
(**Dokaz.** Na predavanju. Na usmenom dijelu ispita, dokaz se ispituje za ocjene 4 i 5.)

Napomena.

- $A \in L(V, W)$, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V, odnosno W
- A potpuno određen svojim djelovanjem na bazi: ako znamo $Ae_1, \ldots, Ae_n$, onda znamo kompletno djelovanje operatora A
- $Ae_1, \ldots, Ae_n \in W$ možemo pisati u obliku
$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$
- matrični zapis (prikaz) operatora A u paru baza (e, f)
$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$$

Propozicija 2.30. Neka su V i W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V, odnosno W. Preslikavanje

$$\Phi : L(V, W) \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}), \quad \Phi(A) = [A]_e^f,$$

je izomorfizam.
(**Dokaz.** Bez dokaza; analogan dokazu Propozicije 2.29. Dokaz se neće ispitivati na usmenom dijelu ispita.)

Primjer 2.31. Neka su e i f kanonske baze u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Odredimo matrični zapis operatora $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$,

$$A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2)$$

u ovom paru baza.
Primjer je riješen na predavanju.