# Linearni operatori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

## Matrični zapis linearnog operatora

**Napomena.** (Ponavljanje s prethodnog predavanja)

- $A \in L(V, W)$, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za $V$, odnosno $W$
- $A$ potpuno određen svojim djelovanjem na bazi: ako znamo $Ae_1, \ldots, Ae_n$, onda znamo kompletno djelovanje operatora $A$
- $Ae_1, \ldots, Ae_n \in W$ možemo pisati u obliku

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

- matrični zapis (prikaz) operatora $A$ u paru baza $(e, f)$

$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}).$$

  Prethodnom je matricom $A$ potpuno određen jer je on potpuno određen svojim djelovanjem na vektore baze od $V$, a na taj način smo dobili odgovarajuće skalare, tj. elemente matrice $[A]_e^f$.

**Napomena 2.36.** Za $A \in L(V, W)$ pišemo

$$[A]_e^f = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}.$$

Sjetimo se baze $\{E_{ij} \ : \ i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ prostora $L(V, W)$ koju smo konstruirali u dokazu teorema 2.27. Lako se vidi da u toj bazi operatoru $A$ pripada rastav

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij},$$

gdje su $\alpha_{ij}$ upravo matrični koeficijenti iz matrice $[A]_e^f$.

**Propozicija 2.37.** Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze vektorskih prostora $V$ i $W$, neka je $x \in V$ i $A \in L(V, W)$. Tada je

$$[Ax]^f = [A]_e^f [x]^e.$$

(**Dokaz.** Dokaz je dan na predavanju i trebaju ga znati studenti koji odgovaraju za ocjene 4 i 5. )

**Primjer** Neka je $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ operator iz primjera s prethodnog predavanja. Preciznije, neka su $e$ i $f$ kanonske baze u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$,

$$A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2)$$

te neka je $x = (1, -2) \in \mathbb{R}^3$. Pokažite da tada vrijedi

$$[Ax]^f = [A]_e^f [x]^e.$$

Primjer je detaljno riješen na predavanju.

**Propozicija 2.38.** Neka su redom $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ i $g = \{g_1, \ldots, g_l\}$ baze vektorskih prostora $V$, $W$ i $X$, neka je $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, X)$. Tada za operator $BA \in L(V, X)$ vrijedi

$$[BA]_e^g = [B]_f^g [A]_e^f.$$

(**Dokaz.** Bez dokaza. Dokaz se neće ispitivati na usmenom dijelu ispita.)

**Napomena 2.39.** Primjetimo da su matrice $[B]_f^g$ i $[A]_e^f$ ulančane te da je pridruživanje matričnog zapisa linearnim operatorima također usklađeno s komponiranjem operatora.

**Propozicija 2.40.** (kako izračunati rang linearnog operatora) Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze vektorskih prostora $V$ i $W$, te neka je $A \in L(V, W)$. Tada je

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A]_e^f).$$

(**Propozicija je dana bez dokaza; dakle dokaz se neće tražiti na usmenom dijelu ispita.**)
**Primjer 2.41.** Odredite rang linearnog operatora iz prethodnog primjera.

**Korolar 2.42.** Neka je $V$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za $V$. Operator $A \in L(V)$ je regularan ako i samo ako je $[A]_e^e$ regularna matrica.
(**Dokaz.** Bez dokaza. )

## Matrice prijelaza

Ako su $e'$ i $f'$ neke druge baze u $V$ te u $W$, redom, u kojoj su vezi matrice

$$[x]^e \qquad \text{i} \qquad [x]^{e'}$$

te

$$[A]_e^f \qquad \text{i} \qquad [A]_{e'}^{f'}?$$

U nastavku navodimo odgovore na to pitanje.

**Teorem 2.43.** Neka je $A \in L(V, W)$ i neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ te $f = \{f_1, \ldots, f_m\}, f' = \{f'_1, \ldots, f'_m\}$ po dvije baze prostora $V$, odnosno $W$. Neka su operatori $T \in L(W)$ i $S \in L(V)$ definirani na bazama $f$, odnosno $e$, s

$$Tf_i = f'_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

i

$$Se_j = e'_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Tada je

$$[A]_{e'}^{f'} = ([T]_f^f)^{-1}[A]_e^f[S]_e^e$$

(**Dokaz.** Na predavanju. Na usmenom dijelu ispita dokaz će se ispitivati za ocjene vrlo dobar i izvrstan.)

**Definicija 2.44.** Matrica

$$[S]_e^e = [I_V]_{e'}^e,$$

iz prethodnog teorema, zove se matrica prijelaza iz baze $e$ u bazu $e'$.

**Definicija.** Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za $V$, neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$, matrica prijelaza iz baze $e$ u bazu $e'$. Tada je

$$([S]_e^e)^{-1} = ([I]_{e'}^e)^{-1},$$

matrica prijelaza iz baze $e'$ u bazu $e$.

**Korolar 2.45.** Neka je $A \in L(V)$, neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za $V$ te neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$, matrica prijelaza iz baze $e$ u bazu $e'$. Tada je

$$[A]_{e'}^{e'} = ([S]_e^e)^{-1}[A]_e^e[S]_e^e$$

(**Bez dokaza; direktna posljedica prethodnog teorema.**)

**Korolar 2.47.** Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za $V$, neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$, matrica prijelaza iz baze $e$ u bazu $e'$. Tada za svaki vektor $x$ iz $V$ vrijedi

$$[x]^{e'} = ([S]_e^e)^{-1}[x]^e.$$

(**Bez dokaza; dakle dokaz se neće tražiti na usmenom dijelu ispita.**)

**Primjer 2.48.** Neka je $e$ kanonska baza u $\mathbb{R}^2$, a $e' = \{e'_1, e'_2\}$, $e'_1 = (2, -1)$, $e'_2 = (-1, 1)$ druga baza za $\mathbb{R}^2$. Neka je operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan s

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

te neka je $x = (1, 1)$. Izračunaj $[Ax]^e$ i $[Ax]^{e'}$.
Primjer je detaljno riješen na predavanju.