

Podsjetnik za usmeni ispit iz Linearne algebre II, za ocjenu dovoljan (i sve ostale ocjene)

1. Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}$ . Dokažite: Za  $\alpha \in \mathbb{F}$  i  $a \in V$  vrijedi  $\alpha a = 0$  ako i samo ako je  $\alpha = 0$  ili  $a = 0$ .
2. Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}$ . Dokažite:
  - (a) za svaki  $a \in V$ ,  $a \neq 0$ , jednočlan skup  $\{a\}$  je linearno nezavisan;
  - (b) svaki skup koji sadrži nulvektor je linearno zavisn;
  - (c) svaki neprazni podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan.
3. Znati svojim riječima objasniti (ili pokazati na primjeru) kako sustav izvodnica možemo *reducirati* do baze te kako linearno nezavisan skup možemo *nadopuniti* do baze.
4. Neka je  $V$  konačnodimenzionalan vektorski prostor te  $L, M \leq V$ . Znati iskazati vezu između dimenzija potprostora  $L + M$ ,  $L \cap M$ ,  $L$ ,  $M$ .
5. Znati pokazati kako iz svojstva linearnosti operatora slijede svojstva aditivnosti i homogenosti.
6. Dokažite: Svaki linearan operator  $A : V \rightarrow W$  nulvektor prevodi u nulvektor:
$$A0 = 0.$$
7. Neka je  $A : V \rightarrow W$  linearan operator. Pokažite da je  $\text{Im } A \leq W$ .
8. Neka je  $A : V \rightarrow W$  linearan operator. Pokažite da je  $\text{Ker } A \leq V$ .
9. Što znači da je linearan operator  $A : V \rightarrow W$  monomorfizam/epimorfizam/izomorfizam.
10. Neka su  $A : V \rightarrow W$  i  $B : W \rightarrow X$  linearni operatori. Znati iskazati tvrdnju o kompoziciji linearnih operatora.
11. Neka je  $A : V \rightarrow W$  linearan operator. Opišite postupak određivanja matričnog zapisa operatora  $A$ .
12. Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}$ ,  $A \in L(V)$  i  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  svojstvena vrijednost operatora  $A$ . Definirajte svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_0$ , te pokažite da je to zaista potprostor.
13. Na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru  $V$ , kakvi su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima operatora  $A \in L(V)$ ? Znati ilustrirati na primjeru.
14. Koja je veza između svojstvenih polinoma sličnih matrica?
15. Definirajte algebarsku i geometrijsku kratnost svojstvene vrijednosti operatora. Koja nejednakost vrijedi za njih? Znati odrediti algebarsku i geometrijsku kratnost na primjeru.

16. Iskažite Hamilton-Cayleyev teorem. Opišite metodu za invertiranje regularnih matrica korištenjem tog teorema. Znati ilustrirati primjerom.
17. Znati iskazati Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost.
18. Iskažite teorem o Gram-Schmidtovom postupku ortogonalizacije.
19. Neka je  $V$  unitarni prostor i  $M \leq V$ . Pokažite da je  $M^\perp$  također potprostor od  $V$ .
20. Pokažite: produkt dvije unitarne (ortogonalne) matrice je također unitarna (ortogonalna) matrica.