Pismeni ispit

8.7.2019.

Pravila

Ispit se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Ispit nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora. Sve tvrdnje je potrebno obrazložiti i precizno iskazati te, ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vježbama i/ili predavanjima, navesti na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (20). U $M_2(\mathbb{R})$ zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$. Provjerite je li

$$M = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ AX = XB\}$$

potprostor od $M_2(\mathbb{R})$. U slučaju potvrdnog odgovora odredite neku bazu za M (u ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$).

Zadatak 2 (20). Neka je $A \in L(\mathbb{R}^4)$ operator koji u kanonskoj bazi ima matricu

$$[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

i $e' = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$. Odredite matrični prikaz operatora A u bazi e'. Za vektor $[x]^e = [1, -1, 2, 1]^T$ odredite $[x]^{e'}$ te $[Ax]^e$ i $[Ax]^{e'}$.

Zadatak 3 (20). Neka su $A,B \in L(V)$ operatori takvi da vrijedi $AB = BA$. Pokažite da su tada $\operatorname{Ker} A$ i Im A invarijantni potprostori za B.

Zadatak 4 (20). Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^7)$ ako je

$$k_A(\lambda) = (\lambda + 3)^3(\lambda + 5)^4, \ \mu_A(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 5)^2, \ d(A + 5I) = 2.$$

Odredite $A^3 + 2\sin(\pi A)$ u Jordanovoj bazi operatora A.

Zadatak 5 (20). U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^T)$$

zadan je skup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte skup S. Nadopunite dobiveni ortonormirani skup do ortonornirane baze za $M_2(\mathbb{R})$.