Prvi kolokvij - A

29.4.2019.

Pravila

Kolokvij se pise 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Kolokvij nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora. Sve tvrdnje je potrebno obrazloziti i precizno iskazati te, ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vjezbama i/ili predavanjima, navesti na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (15+5). Neka je točka A presjek pravca $p_1 \ldots \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1+\lambda \end{array}$ i ravnine $M_1 \ldots 2x+y+z+1=0$.

a) Odredite jednadžbu ravnine M_2 koja prolazi kroz ishodište, sadrži točku A i okomita je na ravninu M_1.

b) Odredite udaljenost točke $(1,1,1)$ do ravnine M_2.

Zadatak 2 (20). Neka je V vektorski prostor i $\dim V = 4$. Neka je $\{x,y,z,w\}$ skup izvodnica za V . Provjerite koji od sljedećih skupova je takoder skup izvodnica za V :

a) $S_1 = \{x+y, y+z, z+w\}$,

b) $S_2 = \{x, x+y, x+y+z, x+y+z+w\}$,

c) $S_3 = \{x+y, x-y, y+z, y-z, z+w, z-w\}$.

Svoje tvrdnje obrazložite i dokažite!

Zadatak 3 (10+15). Dani su skupovi $M = \{A \in M_2(\mathbb{R})\colon a_{11} = -a_{12}\}$ i

$$N = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}\right].$$

a) Dokažite da je $M \leq M_2(\mathbb{R})$ i odredite mu bazu i dimenziju. Obrazložite zašto je $N \leq M_2(\mathbb{R})$ i odredite mu bazu i dimenziju.

b) Odredite po jednu bazu za $M+N$ i $M \cap N$.

Zadatak 4 (10+20+5). Neka je dan operator $S : P_3 \to P_3$, gdje je P_3 vektorski prostor polinoma stupnja najviše 3 s

$$(Sp)(t) = (t\,p(t-2))''.$$

a) Dokažite da je S linearan operator.

b) Odredite jezgru i sliku od S te rang i defekt od S.

c) Odredite potprostor M takav da je $P_3 = \text{Ker A} \dot{+} M$.