Pravila

Ispit se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Ispit nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora. Sve tvrdnje je potrebno obrazložiti i precizno iskazati te, ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vježbama i/ili predavanjima, navesti na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (20). Neka je skup $\{x, y\}$ baza vektorskog prostora V nad poljem K. Odredite uvjete na skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ tako da skup $\{\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y\}$ također bude baza od V.

Zadatak 2 (20). Neka je $\mathcal{P}_3$ vektorski prostor realnih polinoma stupnja ne većeg od 3, te neka je linearan funkcional $f\colon \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ zadan s $f(p) = p(5)$.

(a) Odredite neku bazu B za jezgru funkcionala f.

(b) Odredite jedan polinom (različit od nul-polinoma) koji je u jezgri funkcionala f i prikažite ga kao linearnu kombinaciju vektora iz B.

Zadatak 3 (20). Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^7)$ ako je poznato da je $k_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3 \mu_A(\lambda)$ i $(\mu_A(\lambda))^4 = -(\lambda + 1)^9 k_A(\lambda)$. Odredite $\sin(\pi A)$ u Jordanovoj bazi operatora A.

Zadatak 4 (20). U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle A, B \rangle = tr(\mathrm{B}^T A)$, Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije ortonormirajte skup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Zadatak 5 (20). Zadan je linearan operator $S\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ na unitarnom prostoru (uz standardni skalarni produkt) formulom $S(A) = MA$, gdje je

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite matricu operatora S u kanonskoj bazi za $M_2(\mathbb{C})$ te odredite njemu adjungirani operator S^*.

(b) Provjerite koja od sljedećih svojstava zadovoljava operator S: regularan, normalan, hermitski, antihermitski, unitaran.