# Cjelobrojne funkcije

Broj znamenki prirodnog broja $n$, prigodno uz učenje logaritama. Temeljno pitanje: kako odrediti koliko prirodan broj $n$ ima znamenki? Pri tom tražimo formulu u koju bi se $n$ mogao uvrstiti. Izvorno govorimo o decimalnom zapisu, no problem se može kasnije prebaciti i u prikaz broja $n$ u proizvoljnoj bazi, kod obrade brojevnih sustava.

Označimo broj znamenki prirodnog broja $n$ s $r$.

Primijetimo da ako je $n$ dvoznamenkast vrijedi $10 \leq n < 99 = 10^2 - 1$, ako je $n$ troznamenkast vrijedi $10^2 \leq n < 10^3 - 1$ te bi slično mogli zaključiti da općenito vrijedi $10^{r-1} \leq n < 10^r$. Kako iz $a \leq b$ slijedi $\log a \leq \log b$, dobivamo

$$r - 1 \leq \log n < r.$$

Očito su $r-1$ i $r$ uzastopni cijeli brojevi te se $\log n$ nalazi između njih. Prema tome, $r - 1 = \lfloor \log n \rfloor$ i konačno $r = \lfloor \log n \rfloor + 1$. Dakle, broj znamenki prirodnog broja $n$ jednak je $\lfloor \log n \rfloor + 1$.

U sljedećem primjeru ćemo primijeniti izvedenu formulu. Zadatak je s državnog natjecanja, upotreba kalkulatora nije dopuštena.

**Zadatak.**

Neka u decimalnom zapisu broja $2^{1997}$ ima $m$ znamenki, a u zapisu broja $5^{1997}$ ima $n$ znamenki. Odrediti $m + n$.

Rješenje. Najprije uočimo da ne trebao odrediti $m$ niti $n$, već njihovu sumu. Prema ranijem, znamo da je $m = \lfloor \log(2^{1997}) \rfloor + 1 = \lfloor 1997 \cdot \log 2 \rfloor + 1$. Slično je i $n = \lfloor 1997 \cdot \log 5 \rfloor + 1$. Brojevi $1997 \cdot \log 2$ i $1997 \cdot \log 5$ nisu cijeli, pa je $1997 \cdot \log 2 < m < 1997 \cdot \log 2 + 1$ i $1997 \cdot \log 5 < n < 1997 \cdot \log 5 + 1$. Odavde je $1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 < m + n < 1997 \cdot \log 2 + 1 + 1997 \cdot \log 5 + 1$. Kako je $1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 = 1997 \cdot (\log 2 + \log 5) = 1997 \cdot \log(2 \cdot 5) = 1997$, slijedi $1997 < m + n < 1999$ pa je $m + n = 1998$.

Sljedeći zadatak primjeren za povezivanje kvadratnih jednadžbi i osnovnih svojstava cjelobrojnih funkcija.

**Zadatak.**

Riješiti jednadžbu $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. (U ovakvim zadatcima se uvijek dodaje i definicija funkcije "pod", što ćemo preskočiti u našim primjerima.)

Rješenje. Primijetimo da je lijeva strana jednadžbe cijeli broj. Zato i desna strana mora biti cijeli broj, tj. $x \in \mathbb{Z}$. No, tada je i $3x^2 - x$ cijeli broj te jednadžba postaje $3x^2 - x = x + 1$. Dobivamo kvadratnu jednadžbu $3x^2 - 2x - 1 = 0$, čija jedino cjelobrojno rješenje je $1$.

U sljedećih nekoliko primjera ćemo vidjeti metode rješavanja jednadžbi sa cjelobrojnim funkcijama.

**Zadatak.**

Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Na isti način kao u prethodnom zadatku vidimo da je $x$ cijeli broj. Redom imamo

$$\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = \lfloor \frac{x^2-4+7}{x+2} \rfloor = \lfloor x - 2 + \frac{7}{x+2} \rfloor = x - 2 + \lfloor \frac{7}{x+2} \rfloor.$$

Za zadnju je jednakost važno primijetiti da za cijeli broj $a$ i realan broj $b$ vrijedi $\lfloor a+b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$. Jednadžba sada prelazi u $x - 2 + \lfloor \frac{7}{x+2} \rfloor = x - 1$, tj. $\lfloor \frac{7}{x+2} \rfloor = 1$. Dakle, $1 \leq \frac{7}{x+2} < 2$ pa je $x \in \{2, 3, 4, 5\}$.

**Zadatak.**

Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{2x+2}{3} \rfloor = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Najprije zaključimo da je $x$ cijeli broj. Kako se pod cjelobrojnom funkcijom pojavljuje razlomak kojem se u nazivniku nalazi 3, u ovakvoj se situaciji promatraju slučajevi ovisno o obliku od $x$, tj. ovisno o ostatku koji $x$ daje pri dijeljenju s 3.

Dakle, $x$ ima jedan od idućih oblika: $3k, 3k+1, 3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Neka je najprije $x = 3k$. Uvrštavanjem dobivamo $\lfloor 2k + \frac{2}{3} \rfloor = 3k$ te $2k = 3k$, odakle je $k = x = 0$.

Neka je sada $x = 3k+1$. Uvrštavanjem dobivamo $\lfloor 2k + \frac{4}{3} \rfloor = 3k+1$, odakle je $2k+1 = 3k+1$, odakle je $k = 0$ i $x = 1$.

Konačno, neka je $x = 3k+2$. Uvrštavanjem dobivamo $\lfloor 2k+2 \rfloor = 3k+2$, odakle je $2k+2 = 3k+2$, odakle je $k = 0$ i $x = 2$. Rješenja su $0, 1, 2$.

**Zadatak.**

Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x+1}{3} \rfloor = \frac{x-1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Opet, osnovno je primijetiti da $\frac{x-1}{2}$ mora biti cijeli broj, odakle slijedi da je $x$ neparan cijeli broj. Prema tome, $x$ možemo zapisati u obliku $x = 2k+1$, za neki cijeli broj $k$. Na taj način dobivamo $\lfloor \frac{2k+2}{3} \rfloor = k$ i prema prethodnom zadatku je $k \in \{0, 1, 2\}$ te $x \in \{1, 3, 5\}$.

Ranije smo vidjeli kako se definira razlomljeni dio realnog broja, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Odavde slijedi i prikaz realnog broja u obliku $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, pri čemu je $0 \leq \{x\} < 1$. Ovaj oblik zapisa može biti koristan pri dokazivanju određenih tvrdnji.

**Zadatak.**

Dokazati da za realan broj $x$ vrijedi $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$.

Rješenje. Ključno je povezati $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ i $\lfloor 2x \rfloor$ s $\lfloor x \rfloor$. Pri tome će nam pomoći zapis $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Primijetimo da je $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$ ako je $\{x\} < \frac{1}{2}$ i $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ ako je $\{x\} \geq \frac{1}{2}$. Zato ćemo promatrati dva slučaja.

Ako je $0 \leq \{x\} < \frac{1}{2}$, tada je $0 \leq 2\{x\} < 1$ pa je

$$\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\{x\} \rfloor - \lfloor x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor.$$

Ako je $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$, tada je $1 \leq 2\{x\} < 2$ pa je

$$\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\{x\} \rfloor - \lfloor x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\{x\} \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor.$$

Ovim smo provjerili sve slučajeve i tvrdnja je dokazana.

Pokažimo sada da za prirodan broj $n$ i realan broj $x$ vrijedi

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq n\lfloor x \rfloor + n - 1.$$

Pri tome ćemo se opet koristiti zapisom $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Kako je $0 \leq \{x\} < 1$, slijedi $0 \leq n\{x\} < n$ ili $0 \leq \lfloor n\{x\} \rfloor \leq n - 1$. Zato je

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + n\{x\} \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor$$

te $n\lfloor x\rfloor \leq \lfloor nx\rfloor \leq n\lfloor x\rfloor + n - 1$.

Nejednakost ovog oblika se naziva ugnježđivanje. Primijenit ćemo ju u idućem zadatku.

**Zadatak.**

Dokazati da jednadžba

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 4x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor + \lfloor 16x\rfloor + \lfloor 32x\rfloor = 12345$$

nema rješenja u skupu realnih brojeva.

Rješenje. Prema prethodnim nejednakostima je $\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 4x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor + \lfloor 16x\rfloor + \lfloor 32x\rfloor \geq \lfloor x\rfloor + 2\lfloor x\rfloor + 4\lfloor x\rfloor + 8\lfloor x\rfloor + 16\lfloor x\rfloor + 32\lfloor x\rfloor = 63\lfloor x\rfloor$ te $\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 4x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor + \lfloor 16x\rfloor + \lfloor 32x\rfloor \leq \lfloor x\rfloor + 2\lfloor x\rfloor + 1 + 4\lfloor x\rfloor + 3 + 8\lfloor x\rfloor + 7 + 16\lfloor x\rfloor + 15 + 32\lfloor x\rfloor + 31 = 63\lfloor x\rfloor + 57$.

Možemo zaključiti da lijeva strana polazne jednadžbe pri dijeljenju sa $63$ daje ostatak između $0$ i $57$. S druge strane, imamo da je $12345 = 195 \cdot 63 + 60$ te desna strana jednadžbe pri dijeljenju sa $63$ daje ostatak $60$. Prema tome, jednadžba nema rješenja.

# Primjena vektora

Vektori se obično dosta detaljno obrađuju u nastavi matematike, ali u toj nastavnoj temi se kriju mnogo zanimljivije i korisnije metode od samog računanja s vektorima ili njihovog prikazivanja u koordinatnom sustavu u ravnini i prostoru. Naravno, temeljna je primjena vektora u geometrijskim problemima. Primjenu vektora često nije jednostavno prepoznati te treba posebnu pažnju obratiti na elemente koji mogu ukazati na korištenje vektora.

Neki od tih elemenata slijede direktno iz definicija s kojima se susrećemo. Jedna od njih, u primjena često i najkorištenija, je skalarni produkt vektora: ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ vektori te $\varphi$ kut između njih, tada je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ definiran s

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Ovu definiciju u odgovarajućim situacijama možemo promatrati i kao jednadžbu s četiri nepoznanice. Ukoliko su tri od njih poznate, skalarni produkt možemo iskoristiti kako bi odredili četvrtu.

Dva elementarna svojstva skalarnog množenja vektora nam govore da za vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ te realne brojeve $\alpha$ i $\beta$ vrijedi $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$ i $(\alpha\overrightarrow{a}) \cdot (\beta\overrightarrow{b}) = \alpha\beta\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$. Drugim riječima, kod skalarnog množenja možemo množiti ,,svaki sa svakim" i izlučivati realne brojeve.

Još elementarnije, sjetimo se same posljedice jednakosti dvaju vektora: neka su $A, B, C, D$ nekolinearne točke, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ako i samo ako je četverokut $ABCD$ paralelogram. Pogledajmo kako se može iskoristiti ova činjenica.

**Zadatak 1**
Neka je $ABCD$ nedegenerirani četverokut takav da je

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2.$$

Dokazati da je $ABCD$ paralelogram.
Rješenje. Iz definicije skalarnog produkta slijedi $|AC|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$. Zapišemo li vektor $\overrightarrow{AC}$ u obliku $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, dobivamo

$$|AC|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = |AB|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + |BC|^2.$$

Zapišemo li vektor $\overrightarrow{BD}$ u obliku $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, na isti način dobivamo

$$|BD|^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = |BC|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + |CD|^2.$$

Uvrštavanjem u jednakost $|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$ dobivamo

$$2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = |DA|^2 - |BC|^2. \tag{1}$$

Na lijevoj se strani pojavljuju vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CD}$, a njihova je suma upravo vektor $\overrightarrow{AD}$. Iskoristimo li zapis $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$, dobivamo

$$|DA|^2 = |DC|^2 + |BC|^2 + |AB|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} + 2 \cdot \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Kako je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$, uvrštavanjem u jednakost (1) slijedi

$$|CD|^2 + |AB|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0,$$

odnosno

$$|AB|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + |CD|^2 = 0.$$

Kako je

$$|AB|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + |CD|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|^2,$$

dobivamo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$, odakle je $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ odnosno $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ te je četverokut $ABCD$ paralelogram.

Stereometrijski zadatci pogotovo znaju predstavljati problem učenicima. Najprije zbog vizualizacije problema, uočavanja geometrijskih likova koji nastaju u presjecima pojedinih tijela te promatranju njihovih svojstava. Obično se pri takvim problemima nameće trigonometrijski pristup, koji često zna biti izuzetno tehnički kompliciran te odvesti u pogrešnom smjeru. Korištenje vektora, s druge strane, omogućava zaobilaženje uočavanja geometrijskih struktura i obično sasvim direktan račun.

**Zadatak 2**
Odrediti kut između težišnica $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ strana $ABC$ i $SAC$ pravilnog tetraedra $SABC$.
Rješenje. Označimo duljnu stranice tetraedra s $a$. Znamo da su sve strane jednakostranični trokuti. Traženi kut ćemo označiti s $\varphi$. Iz definicije skalarnog produkta slijedi

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}}{|\overline{BD}| \cdot |\overline{CE}|}.$$

Dužine $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ su težišnice jednakostraničnih trokuta pa znamo da je

$$|\overline{BD}| = |\overline{CE}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Dakle, preostaje odrediti skalarni produkt $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE}$. Kako bi to učinili, izrazit ćemo vektore $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{CE}$ pomoću vektora $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{SC}$. Najprije, to je sigurno moguće učiniti (čak i bez da spominjemo na ovom mjestu kako ti vektori čine bazu, čak niti da ne leže u istoj ravnini). Nadalje, za ove vektore znamo da su svi duljine $a$ te da su kutovi između svaka dva od njih jednaki $60°$, jer su sve strane tetraedra jednakostranični trokuti. Zato će njih skalarni produkt biti jednostavno izračunati, tj. vrijedi

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = a^2 \cos 60° = \frac{a^2}{2}. \tag{2}$$

Također, vrijedi i

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SC} = a^2. \tag{3}$$

Odredimo najprije vektor težišnice $\overrightarrow{BD}$. Očito je $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Zbrajanjem dobivamo $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Kako su vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{CD}$ suprotni, slijedi

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}.$$

Na isti je način

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CS}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{CS}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}.$$

Sada je

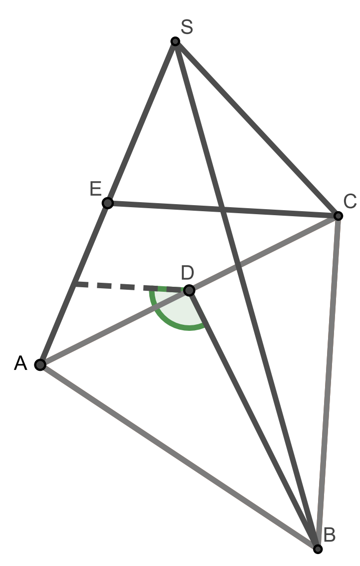
$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}\right).$$

Korištenjem svojstava skalarnog produkta te (2) i (3), dobivamo

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = -\frac{a^2}{8}.$$

Konačno, slijedi

$$\cos\varphi = \frac{-\frac{a^2}{8}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{6}.$$




Slika 1: Zadatak 2.

Kako smo vidjeli u prethodnom primjeru, vektori su pogodni za određivanje traženog kuta, korištenjem skalarnog produkta. Poseban slučaj takve situacije je i dokazivanje okomitosti.

**Zadatak 3**

U jednakokračnom trokutu $ABC$ s osnovicom $BC$, točka $D$ je polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je $E$ nožište okomice iz $D$ na stranicu $\overline{AB}$ te neka je $F$ polovište dužine $\overline{DE}$. Dokazati da je $AF$ okomito na $CE$.

Rješenje. Prikazat ćemo rješenje pomoću vektora, koje ne koristi nikakva posebna planimetrijska znanja, niti uočavanja trokuta, sličnosti ili računanja kutova. Primijetimo kako odmah znamo $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ i $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, jer se težišnica na osnovicu podudara s visinom. Treba pokazati da je $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$. Kako bi to pokazali, koristit ćemo kombinatoriku koju vektori omogućavaju - prikazivat ćemo vektore $\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{CE}$ pomoću drugih vektora i koristiti okomitosti koje su nam poznate, tj. koristit ćemo poznate skalarne produkte. Redom imamo:

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}) \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE}) =$$
$$(\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}) \cdot (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}) \cdot (\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{ED}) =$$
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED}.$$

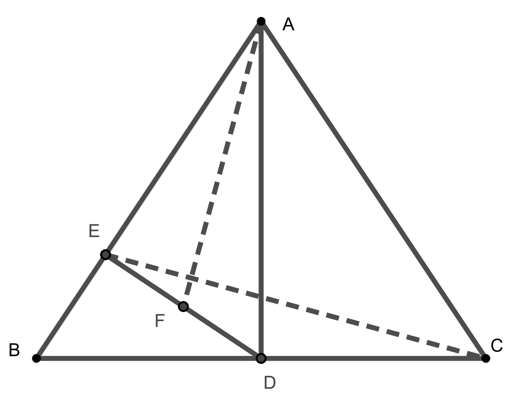
Također, vrijedi

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED}.$$

Zato je

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$$

čime smo pokazali da je $AF$ okomite na $CE$.




Slika 2: Zadatak 3.

Još jedna primjena vektora, donekle skrivena, leži u određivanju omjera duljina dvaju dužina. Prikažemo li vektore tih dužina pomoću istih vektora, moći ćemo odrediti i njihov omjer te time i omjer njihovih duljina. Primijetimo kako ova metoda nije uspješna u određivanju duljina pojedinih dužina, već upravo u određivanju njihovih omjera.

Sve što nam treba je idući teorijski rezultat: Ako su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori koji ne leže u istoj ravini (tj. nisu komplanarni) tada za proizvoljan vektor $\overrightarrow{v}$ u prostoru postoje jedinstveni realni brojevi $\alpha, \beta$ i $\gamma$ takvi da je

$$\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}.$$

**Zadatak 4**

Na dijagonalama $\overline{AB_1}$ i $\overline{CA_1}$ bočnih strana $ABB_1A_1$ i $CAA_1C_1$ pravilne trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ dane su točke $E$ i $F$ takve da je $EF$ paralelno s $BC_1$. Odrediti omjer duljina dužina $\overline{EF}$ i $\overline{BC_1}$.

Rješenje. Neka je $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{c}$. Primijetimo da vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori koji ne leže u istoj ravini pa ćemo sve prikazivati pomoću njih. Također vrijedi i $\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{b}$ te $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{c}$. Redom je $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$ te $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.
Kako su $\overline{AE}$ i $\overline{AB_1}$ kolinearni, postoji $x$ takav da je $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB_1} = x(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$. Na isti način možemo zaključiti da postoji $y$ takav da je $\overrightarrow{CF} = y\overrightarrow{CA_1} = y(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})$ i $z$ takav da je $\overrightarrow{EF} = z\overrightarrow{BC_1} = z(-\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$. Nas zanima čemu je jednako $|z|$.
Sada ćemo ove jednakosti spojiti u jednu, jer znamo da je s jedne strane $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{a}$, dok je s druge strane $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}$. Izjednačavanjem dobivamo

$$-\overrightarrow{a} = x(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) + z(-\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) - y(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}),$$

odakle je

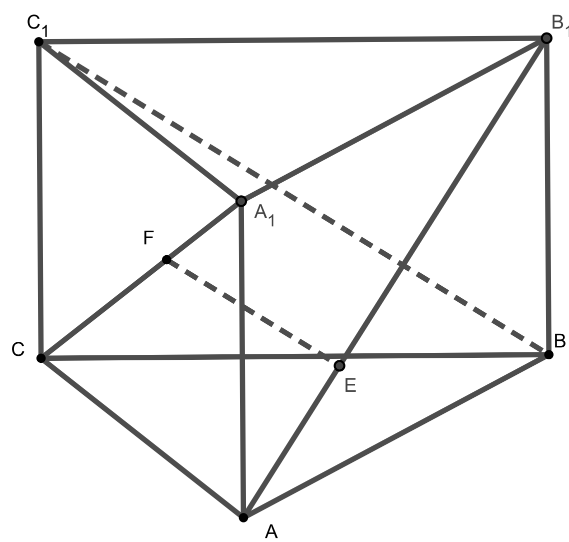
$$(1 - x - y)\overrightarrow{a} + (x - z)\overrightarrow{b} + (x - y + z)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}.$$

Znamo da je $\overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b} + 0 \cdot \overrightarrow{c}$ pa iz jedinstvenosti prikaza slijedi

$$\begin{aligned} 1 - x - y &= 0 \\ x - z &= 0 \\ x - y + z &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $x = z = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ pa je traženi omjer

$$|EF| : |BC_1| = |z| = \frac{1}{3}.$$




Slika 3: Zadatak 4.

# Planimetrija - osnovna škola

Geometrijski zadatci često učenicima predstavljaju velik problem. Iako se radi o vizualnom području, važno je primijetiti da geometrija, pogotovo planimetrija, obiluje rezultatima koji se koriste pri rješavanju zadataka, a istovremeno se u geometrijskim problemima pojavljuje vrlo malo standardiziranih i šablonskih postupaka.

Često nije dovoljno samo reći da se nešto treba uočiti sa slike i da se problemima može pristupiti na čisto vizualan način. Gradivom planimetrije prožeto je gradivo matematike u čitavoj osnovnoj školi, a mi ćemo se prvenstveno orijentirati na gradivo $6.$, $7.$ i $8.$ razreda. Nastojat ćemo uvijek formirati isti princip predavanja - najprije ćemo navesti neke poznate geometrijske rezultate (koji su obično dobro poznati manje-više svim učenicima, bez obziran na njihov interes i talent), a zatim ćemo pokazati kako se ti rezultati mogu primijeniti u rješavanju određenih problema, tj. zadataka.

Krenimo najprije s nejednakosti trokuta: dužine duljina $a$, $b$ i $c$ čine trokut ako je svaka od njih manja od sume preostaliih dviju. Radi se o dobro poznatoj nejednakosti, ali ipak su vrlo rijetki primjeri u kojima se ona koristi. Upravo je od posebne važnosti naglasiti neki od takvih primjera, da se vidi važnost navedenog rezultata i direktna korist.

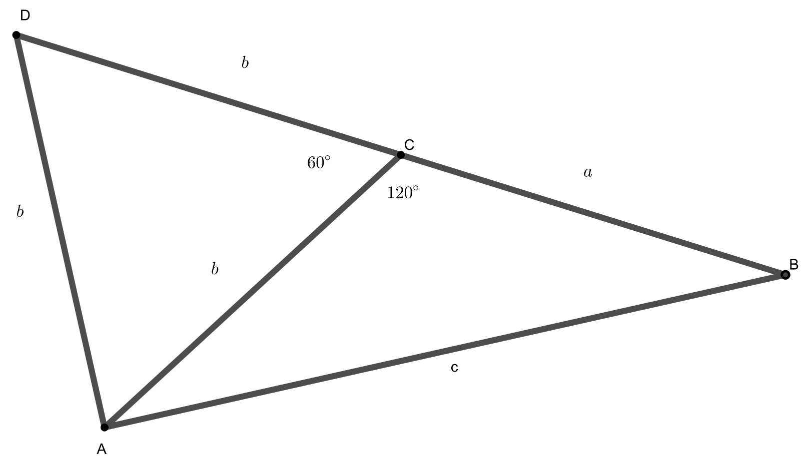
Iskoristit ćemo i još jedan rezultat, koji svakako zaslužuje da ga se spomene prilikom obrade trokuta: nasuprot većeg kuta leži veća stranica (namjerno nećemo previše inzistirati na detaljima, nije nam ideja na taj način izgubiti motivaciju, nećemo spominjati mjeru kuta već sam kut - naglasimo da se radi o pristupu gdje učenike želimo usmjeriti, zainteresirati i motivirati, a ne na ovom mjestu nepotrebno zatupljivati terminologijom).

Također, detalj koji je svima poznat: suma kutova u trokutu iznosi $180°$.

Naveli smo tri rezultata, nije mnogo, ali ni malo. Pogledajmo kako se nekad mogu iskombinirati:

**Zadatak 1 ($6., 7.$ razred)**
U trokutu $ABC$ su duljine stranice jednake $a, b, c$ te je $\angle BCA = 120°$. Dokažite da dužine duljina $a+b, b, c$ određuju trokut.
Rješenje. Prvi način: dovoljno je provjeriti da vrijedi nejednakost trokuta! Uopće ne moramo konstruirati traženi trokut, niti doživjeti kako on izgleda. Samo treba provjeriti odnose između duljina stranica. Kako je kut u vrhu $C$, nasuprot stranice duljine $c$, jednak $120°$, svi preostali kutovi trokuta $ABC$ moraju biti manji od kuta u vrhu $C$ (jer je suma preostala dva kuta jednaka $60°$). Zato su i odgovarajuće stranice manje duljine, tj. $a < c$ i $b < c$. Odmah slijedi da je $a + b < b + c$. Ova nejednakost je bila i najteža, jer očito vrijedi $b < a + b + c$, kako su $a$ i $c$ pozitivni, te je i $c < a + b + b$ jer već iz nejednakosti trokuta primijenjenje na trokut $ABC$ znamo da je $c < a + b$. Prema tome, dužine duljina $a + b, b, c$ određuju trokut.
Drugi način: naravno, mnogim bi učenicima bio draži konstruktivni pristup, u kojem ćemo konstruirati trokut čije su stranice duljina $a + b, b$ i $c$. Zato na produžetke stranice $\overline{BC}$ preko vrha $C$ odaberimo točku $D$ takvu da je $|CD| = |AC| = b$. Kako kutovi $\angle BCA$ i $\angle ACD$ zajedno čine ispruženi kut (tu dodatno naglasimo da je mjera tog kuta $180°$), slijedi da je $\angle ACD = 60°$. Trokut $ACD$ je jednakokračan jer je $|CD| = |AC|$, a kako mu je kut nasuprot osnovici $\overline{AD}$ jednak $60°$, odmah

slijedi da je i jednakostraničan (nije loše ovaj rezultat i dodatno pojasniti: krenuti od jednakosti kutova uz osnovicu te ih izračunati; takvi su kratki izvodi iz elementarnih relacija često motivirajući za učenike). Prema tome, $|AD| = b$ te su duljina stranica trokuta $ABD$ jednake $a + b, b, c$ i time smo dobili traženi trokut.




Slika 1: Zadatak 1.

Posebno su česti zadatci u kojima se dokazuje okomitost. U brojnim slučajevima se provjera okomitosti svodi na pokazivanje da je odgovarajući kut pravi. Pogledat ćemo i neke takve primjere, no najprije opišimo na koje bi korake pri tome trebalo obratiti pažnju:

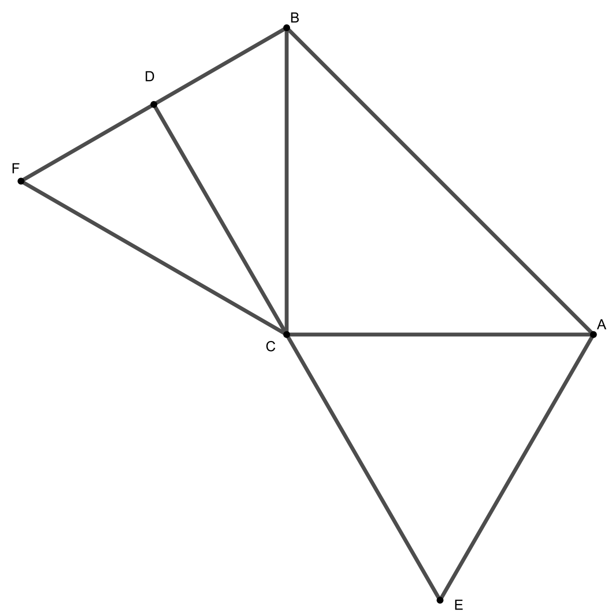
- Prepoznati i uočiti kut koji treba odrediti.
- Smjestiti traženi kut u geometrijski konteksta (kao kut u nekom trokutu, kojem tada znamo sumu kutova; ili kao dio ispruženog kuta).
- Iskoristiti podatke dane u tekstu zadatka kako bi postavili relacije između različitih kutova.
- Iz danih relacija postaviti jednadžbu iz koje možemo odrediti traženi kut. Ako ništa drugo, ispisati sve dostupne podatke i redom povezati traženi kut s drugim kutovima.

Zasad će nam biti dovoljni odnosi između kutova: ponovili smo suma kutova u trokutu i ispruženi kut, podsjetimo još da su u jednakostraničnom trokutu svi kutovi jednaki $60°$.

**Zadatak 2 (**$6$**. razred)**
Nad katetama pravokutnog trokuta $ABC$ su nacrtani jednakostranični trokuti $CBF$ i $CEA$. Dokažite da je $CE \perp FB$.
Rješenje. Neka pravac $CE$ siječe $BF$ u točki $D$. Najprije uočimo da je dovoljno

pokazati da je $\angle BDC = 90°$ pa ćemo pokušati odrediti $\angle BDC$. Taj se kut nalazi u trokutu $BDC$, u kojem znamo da je $\angle CBD = 60°$, jer je trokut $CBF$ jednakostraničan. Kada bi znali još $\angle DCB$, mogli bi odrediti i $\angle BDC$

Primijetimo da je $\angle DCB + \angle BCA + \angle ACE = 180°$ (ispruženi kut). Kako je $\angle BCA = 60°$ i $\angle ACE = 60°$, slijedi da je $\angle DCB = 30°$. Iz $\angle BDC + \angle DCB + \angle CBD = 180°$ (suma kutova u trokutu) i $\angle DCB = 30°$, $\angle CBD = 60°$ slijedi $\angle BDC = 90°$ pa je $CE \perp FB$.




Slika 2: Zadatak 2.

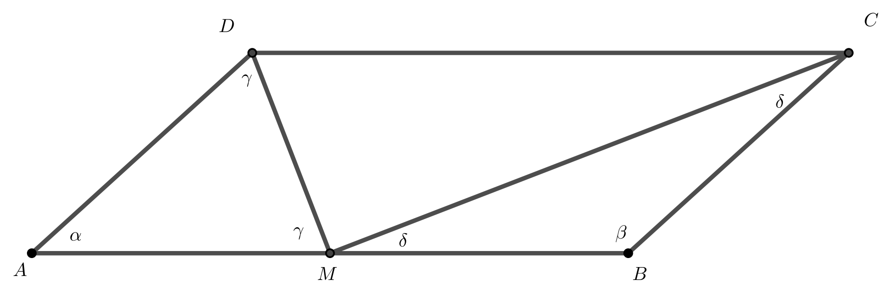
Za idući primjer ponovimo i jednu elementarnu relaciju za paralelogram: suma kutova uz stranicu paralelograma jednaka je $180°$. Ovaj se rezultat može lako i izvesti iz poznavanja sume kutova u paralelogramu i činjenice da su nasuprotni kutovi paralelograma međusobno jednaki.

**Zadatak 3 (7. razred)**
Neka u paralelogramu $ABCD$ vrijedi $|AB| = 2|BC|$. Ako je $M$ polovište stranice $\overline{AB}$, dokažite da je $CM \perp DM$.
Rješenje. Radi lakšeg zapisa, označimo $\angle DAB$ s $\alpha$, $\angle ABC$ s $\beta$, $\angle CMB$ s $\gamma$ te $\angle AMD$ s $\delta$. Ovakva zamjena nije sasvim standardna, ali često pojednostavljuje zapis i postavljanje odgovarajućih relacija. Naravno, koristi se ovisno o broju uključenih kutova i točaka. Uočimo da nam je potreban $\angle DMC$. Po napomeni koja prethodi zadatku je $\alpha + \beta = 180°$.

Kako je $M$ polovište stranice $\overline{AB}$, slijedi da je $|AM| = |MB| = \frac{1}{2}|AB|$. S druge strane, vrijedi i $|BC| = |AD| = \frac{1}{2}|AB|$, pa su trokuti $AMD$ i $MBC$ jednakokračni. Iz tih trokuta dobivamo $\angle MDA = \delta$ i $\angle BCM = \gamma$. Sada vidimo kako bi moglo biti najkorisnije traženi kut $\angle DMC$ promatrati kao dio ispruženog kuta, koji čini zajedno se kutovima $\angle AMD$ i $\angle CMB$.

Dakle, imamo $\delta + \angle DMC + \gamma = 180°$. Ovdje se pojavljuje jedna posebnost - da bi odredili $\angle DMC$, nije nužno znati koliki je svaki od kutova $\gamma$ i $\delta$, već je dovoljno poznavati njihovu sumu.

Iskoristimo li sumu kutova u trokutu, dobivamo $\alpha + 2\delta = 180°$ i $\beta + 2\gamma = 180°$. Zbrajanjem ovih jednakosti te korištenjem $\alpha + \beta = 180°$, dobivamo $2\gamma + 2\delta = 180°$ te $\gamma + \delta = 90°$. Uvrštavanjem u $\delta + \angle DMC + \gamma = 180°$ dobivamo $\angle DMC = 90°$ pa je $CM \perp DM$.




Slika 3: Zadatak 3.

**Zadatak 4 ($6., 7.$ razred)**
Zadan je kut $\angle AVB = 45°$. Neka se točka $D$ nalazi na kraku $VA$ tako da je $A$ između $V$ i $D$. Također, neka se točka $E$ nalazi na kraku $VB$ tako da je $B$ između $V$ i $E$. Unutar kuta $\angle AVB$ odabrana je točka $C$ tako da je $\angle BAV = \angle CAD$ i $\angle ABV = \angle CBE$. Odrediti kut $\angle BCA$.

Rješenje. Opet, radi lakšeg zapisa, označimo $\angle BAV = \angle CAD$ s $\alpha$ te $\angle ABV = \angle CBE$ s $\beta$. Uočimo da traženi $\angle BCA$ možemo smjestiti jedino unutar trokuta $ABC$. Prema tome, da bi odredili $\angle BCA$ trebamo sumu kutova $\angle CAB$ i $\angle ABC$ je jer $\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = 180°$.

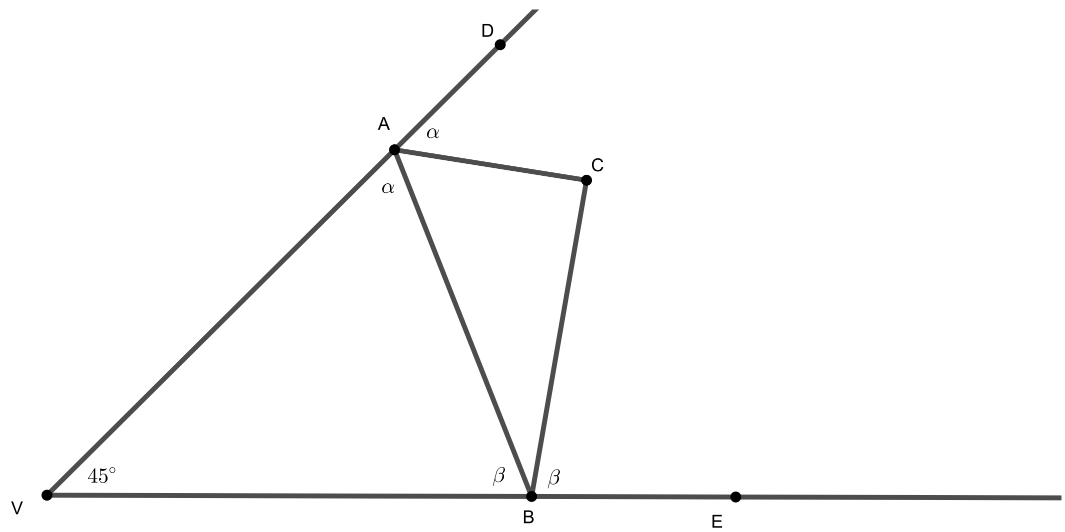
Svaki od kutova $\angle CAB$ i $\angle ABC$ možemo smjestiti unutar ispruženih kutovima na kracima $VA$ i $VB$. Prema uvjetima zadatka, vrijedi $\angle CAB + 2\alpha = 180°$ i $\angle ABC + 2\beta = 180°$.

Nadalje, na nekom mjestu bi trebali iskoristiti i $\angle AVB = 45°$. Primijetimo da su $\alpha, \beta$ i $\angle AVB$ kutovi trokuta $AVB$ pa je njihova suma jednaka $180°$, odakle je $\alpha + \beta = 135°$.

Zbrajanjem jednakosti $\angle CAB + 2\alpha = 180°$ i $\angle ABC + 2\beta = 180°$ dobivamo $\angle CAB + \angle ABC + 2(\alpha + \beta) = 360°$. Kako je $2(\alpha + \beta) = 270°$, slijedi $\angle CAB + \angle ABC = 90°$ ili $\angle ABC + \angle CAB = 90°$.

Uvrstimo li dobivenu jednakost u ranije dobivenu jednakost $\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = 180°$, konačno dobivamo $\angle BCA = 90°$ i traženi kut je pravi kut.

Već smo ranije komentirali kako se u planimetrijskim problemima često pojavljuje dokazivanje okomitosti. Nekad je to samo dio problema. Pogledajmo i jedan takav slučaj.




Slika 4: Zadatak 4.

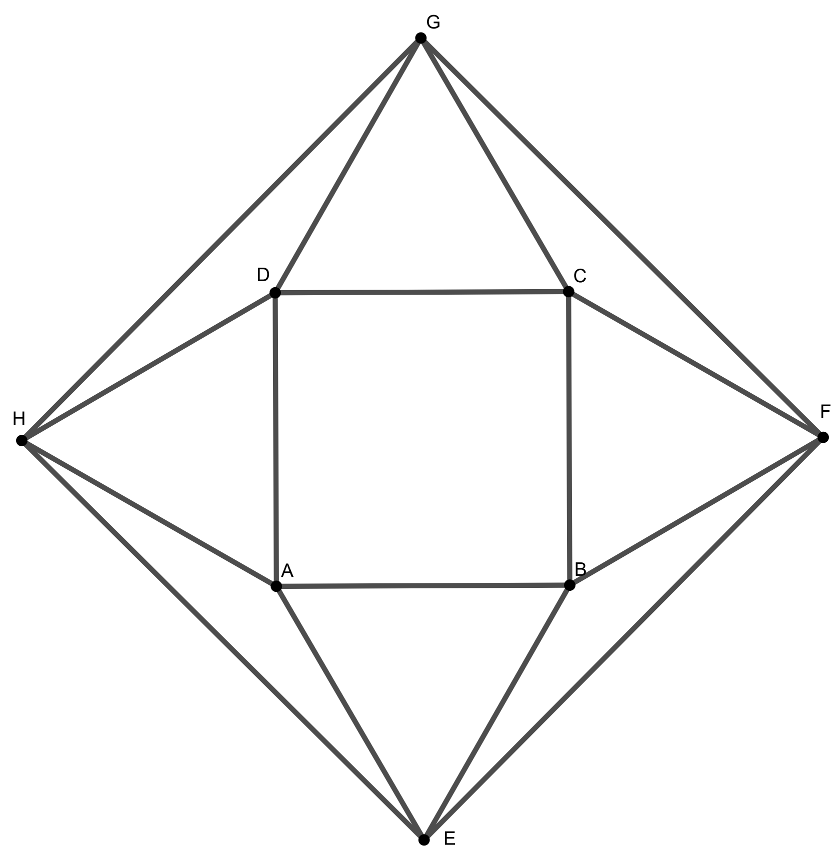
**Zadatak 5** ($7., 8.$ **razred)**
Nad svakom stranicom kvadrata $ABCD$ s vanjske su strane nacrtani jednakostranični trokuti $ABE, BCF, CDG$ i $DAH$. Dokažite da je četverokut $EFGH$ kvadrat.
Rješenje. U ovakvim je zadatcima temeljni korak primijetiti što treba pokazati - u ovom slučaju, da su sve stranice četverokuta $EFGH$ jednake duljine te da su mu svi kutovi pravi. Da bi pokazali da je neki kut pravi, možemo se poslužiti sličnim direktnim računom kao u prethodnim primjerima. No, nemamo na raspolaganju sličnu tehniku kojom bi pokazali jednakost duljina stranica. Zato se za dokazivanje jednakosti duljina stranica koristima drugačijom metodom, u ovom slučaju je to sukladnost trokuta - ponovimo: pokažemo li da su dva trokuta sukladna, slijedit će i da su odgovarajuće stranice jednake duljine. Na neki se način radi o obratu sukladnosti: iz jednakosti pojedinih elemenata dvaju trokuta ćemo zaključiti da su sukladni, iz čega možemo zaključiti da su i drugi elementi tih trokuta jednaki.

Pokazat ćemo da su trokuti $AHE$, $BEF$, $CFG$ i $DGH$ međusobno sukladni. Dovoljno je pokazati da su npr. trokuti $AEH$ i $BEF$ sukladni, na isti se način može pokazati sukladnost i ostalih navedenih trokuta.

Kako su svi konstruirani trokuti jednakostranični, slijedi $|AH| = |AE| = |AB|$ te $|BE| = |BF| = |AB|$. Prema tome $AEH$ i $BEF$ su oba jednakostranični s kracima jednake duljine. Odredimo sada kutove između krakova. Sada smo u novoj situaciji, gdje $\angle EAH$ moežmo promatrati kao dio punog kuta, koji čini zajedno s kutovima $\angle BAE$, $\angle DAB$ i $\angle HAD$. Kako su $\angle BAE$ i $\angle HAD$ kutovi jednakostraničnih trokuta, jednaki su $60°$. S druge strane, $\angle DAB$ je pravi kut. Sada je $\angle EAH = 360° - 90° - 60° - 60° = 150°$. Na potpuno isti način možemo zaključiti da je i $\angle FBE = 150°$. Prema S-K-S teoremu o sukladnosti su trokuti

$AEH$ i $BEF$ sukladni pa vrijedi i $|AH| = |BF|$. Na isti način možemo zaključiti da su i ostale stranice četverokuta $EFGH$ jednake duljine.

Sada znamo da su svi trokuti $AHE$, $BEF$, $CFG$ i $DGH$ međusobno sukladni i jednakokračni. Kut između krakova svakog od ovih trokuta je $150°$ pa odatle slijedi da su kutovi uz osnovicu jednaki $\frac{180°-150°}{2} = 15°$. Uočimo sada jedan kut četverokuta $EFGH$. Na primjer, pogledajmo kut $\angle HEF$. Iz $\angle HEF = \angle HEA + \angle AEB + \angle BEF = 15° + 60° + 15°$, jer je $\angle AEB$ kut u jednakostraničnom trokutu, slijedi da je $\angle HEF$ pravi kut. Na isti način vidimo da su svi kutovi četverokuta $EFGH$ pravi, a kako su i sve stranice jednake duljine slijedi da je četverokut $EFGH$ kvadrat.




Slika 5: Zadatak 5.

Mnogi planimetrijski rezultati su svima poznati, a malobrojni ih znaju kvalitetno iskoristiti, tj. prepoznati situaciju u kojoj određeno svojstvo može biti korisno. Sigurno praktički svi učenici znaju da se sve tri visine trokuta sijeku u istoj točki, isto kao i sve tri težišnice, ili simetrale kutova ili stranica. Sve su to relativno netrivijalni rezultati koji se lako pamte, a imaju i odgovarajuće primjene koje su često nepravedno zapostavljene.

Primjerice, recimo da se u trokutu $ABC$ visina iz vrha $A$ i visina iz vrha $B$ sijeku u točki $O$ (ortocentar). Što tada možemo zaključiti? Znamo da i visina iz vrha $C$ prolazi točkom $O$ pa su pravci $AB$ i $OC$ međusobno okomiti. Na taj smo način dobili još jednu metodu dokazivanja okomitosti. I na ovaj način možemo rezimirati i u drugim situacijama: npr. ako se u trokutu $ABC$ težišnica iz vrha $A$ i težišnica iz vrha $B$ sijeku u točki $T$, tada pravac $CT$ prolazi polovištem stranice $\overline{AB}$.

Za idući primjer ponovimo još neke planimetrijske tvrdnje: U jednakokračnom trokutu se visina na osnovicu i težišnica na osnovicu podudaraju, tj. u jednakokračnom trokutu visina na osnovicu raspolavlja osnovicu (što je često i korisnije). Nadalje, srednjica je uvijek paralelna odgovarajućoj stranici. Još će nam trebati i: ako su pravci $a$ i $b$ međusobno okomiti, a pravci $b$ i $c$ paralelni, tada su i pravci $a$ i $c$ međusobno okomiti.

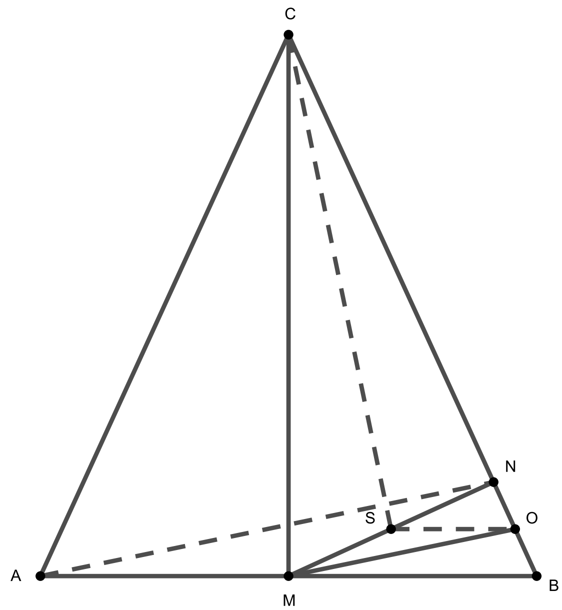
**Zadatak 6 ($7., 8.$ razred)**

Dan je jednakokračan trokut $ABC$ te neka je $M$ polovište osnovice $\overline{AB}$. Na kraku $\overline{BC}$ je odabrana točka $N$ tako da je $MN \perp BC$, te neka je $S$ polovište dužine $\overline{MN}$. Dokažite da je $AN \perp CS$.

Rješenje. Opet se radi o dokazivanju okomitosti, ali sada ćemo se poslužiti sasvim drugačijom metodom nego ranije. Označimo s $O$ polovište dužine $\overline{BN}$ te uočimo trokut $MBN$. Točka $S$ je polovište jedne njegove stranice, a točka $O$ je polovište druge njegove stranice. Po definiciji je $OS$ srednjica trokuta $MBN$ pa je $OS \| MB$. Kako je $\overline{CM}$ ujedno i težišnica i visina trokuta $ABC$, vrijedi $CM \perp AB$ pa je $CM \perp MB$ te je zato i $CM \perp OS$.

Sada pogledajmo trokut $MBC$. Dosad znamo $MN \perp BC$ i $CM \perp OS$ pa na pravcima $MN$ i $OS$ leže visine trokuta $MBC$. Kako se ovi pravci sijeku u točki $S$, točka $S$ je ortocentar trokuta $MBC$. Zato je $CS \perp OM$.

Kako je $M$ polovište dužine $\overline{AB}$, a $O$ polovište dužine $\overline{BN}$, dužina $\overline{OM}$ je srednjica trokuta $ABN$ pa je $OM \| AN$. Iz $CS \perp OM$ i $OM \| AN$ slijedi $AN \perp CS$.



Slika 6: Zadatak 6.

Uvijek je potrebno novu metodu potkrijepiti s više primjera. Na taj način učenici bolje usvajaju metodu, a potvrđuje se i da metoda ne prolazi samo u jednom izoliranom slučaju, već zaista može biti korisna. Tako ćemo učiniti i na ovom mjestu.

**Zadatak 7 (**$8$. **razred)**

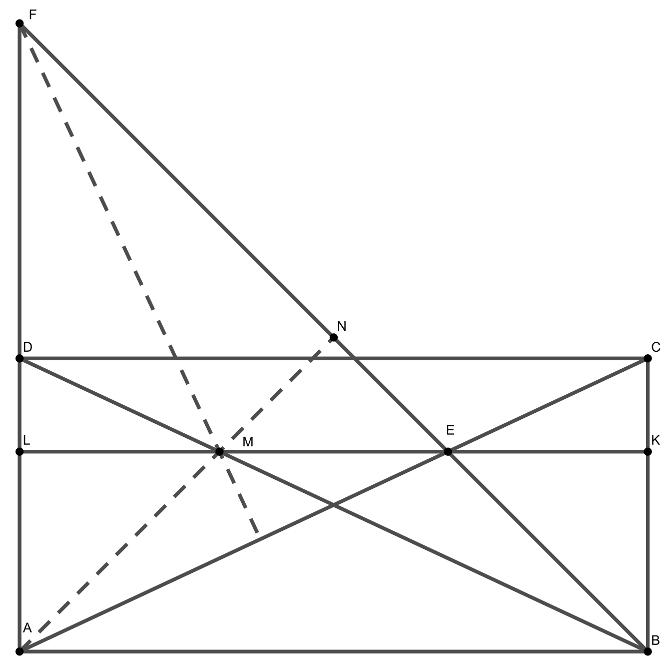
Neka je dan pravokutnik $ABCD$ pri čemu je $|AB| > |BC|$. Simetrala kuta pri vrhu $B$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki $E$, a pravac $AD$ u točki $F$. Točkom $E$ povučen je pravac paralelan pravcu $AB$, te siječe dijagonalu $\overline{BD}$ i točki $M$. Pokažite da je $FM \perp AC$.

Rješenje. Ovdje nemamo nikakvih računskih mogućnosti pa je jedini alat za dobivanje odgovarajućih veza sukladnost. Uvedimo neke oznake: neka je $K$ presjek $ME$ i $BC$, neka je $L$ presjek $ME$ i $AD$ te neka je $N$ presjek od $BF$ i $AM$.

Primijetimo da je $\angle ALE = \angle BKM = 90°$, $\angle LAE = \angle MBK$ te $|AL| = |BKW$. Prema tome, trokuti $LAE$ i $MBK$ se podudaraju u stranici i kutovima na njoj pa su sukladni (K-S-K teorem). Odatle slijedi i $|AE| = |BM|$.

Odmah možemo primijetiti da je i $\angle ABM = \angle EAB$ pa se trokuti $ABM$ i $ABE$ podudaraju u dvjema stranicama (osim $|AE| = |BM|$ imaju i zajedničku stranicu $\overline{AB}$) i kutu između njih, pa su sukladni prema S-K-S teoremu. Zato je $\angle BAM = \angle ABE = 45°$, jer se točka $E$ nalazi na simetrali kuta pri vrhu $B$. Pravci $AM$ i $BE = BF$ se sijeku u točki $N$, pa oba kuta $\angle BAM$ i $\angle ABE$ pripadaju trokutu $ABN$, koji je zato jednakokračan i pravokutan te je $\angle BNA = 90°$.

Pogledajmo sada trokut $AEF$. Kako je $AN \perp BN = EF$, slijedi da je $\overline{AN}$ visina trokuta $AEF$ iz vrha $A$. Slično, primijetimo da je $ME = EL \perp AD = AF$ pa je $\overline{EL}$ visina trokuta $AEF$ iz vrha $E$. Pravci $AN$ i $EL$ se sijeku u točki $M$, koja je zato ortocentar trokuta $AEF$. No tada pravac $FM$ mora biti okomit na pravac na kojem leži stranica tog trokuta nasuprotna vrhu $F$ pa je $FM \perp AE = AC$.




Slika 7: Zadatak 7.

Osim poznatih planimetrijskih teorema, ponekad treba iskoristiti i njihove obrate, koji se često u nastavi neopravdano zanemaruju. Primjerice, svatko zna kako glasi Pitagorin teorem, ali ne i obrat tog teorema (Ako za duljine stranica trokuta vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$, tada je trokut pravokutan).

U idući primjerima ćemo vidjeti koliko je važno poznavati obrat još jednog istaknutog teorema, Talesova teorema. Podsjetimo, prema Talesovu teoremu je obodni kut nad promjer pravi. Ali, vrijedi i obrat: ako je kut nad promjerom pravi, tada je taj kut i obodni. Drugim riječima, u pravokutnom trokutu je duljina težišnice iz vrha pravog kuta jednaka polovici duljine hipotenuze. Ili: težišnica iz vrha pravog kuta dijeli pravokutni trokut na dva jednakokračna trokuta. Time je dana jednakost određenih kutova ili stranica, do koje bi teško došli drugim putem.

Pogledajmo neke primjene:

**Zadatak 8 (**$8$. **razred)**
Dokazati da je u pravokutnom trokutu simetrala pravog kuta ujedno i simetrala kuta koji čine težišnica i visina iz vrha pravog kuta.
Rješenje. Standardno, uzmimo da je u $C$ pravi kut. Označimo $\angle CAB$ s $\alpha$ i $\angle ABC$ s $\beta$. Ako je $\alpha = \beta$, trokut je jednakokračan pravokutan pa se simetrala pravog kuta, težišnica i visina iz vrha pravog kuta podudaraju pa nemamo što pokazivati. Zato možemo uzeti da je $\alpha \neq \beta$. Možemo pretpostaviti da je $\alpha > \beta$. Neka je $D$ polovište

stranice $AB$, $E$ sjecište simetrale pravog kuta s $AB$ te neka je $F$ nožište visine iz vrha $C$.

Označimo $\angle DCE$ s $x$ i $\angle ECF$ s $y$. Treba pokazati da je $x = y$.

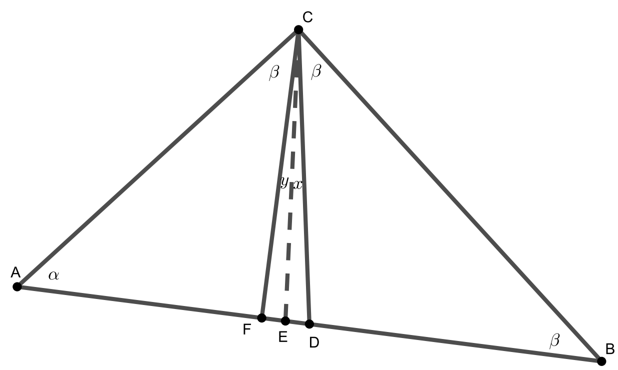
Kako je $CE$ simetrala kuta $BCA$, vrijedi $\angle BCE = \angle ECA$ pa je $\angle BCD + x = \angle FCA + y$.

Trokut $AFC$ je pravokutan s pravim kutom u vrhu $F$, pa je $\angle FCA = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = \beta$.

Prema obratu Talesova teorema je trokut $BCD$ jednakokračan, pa je $\angle DBC = \angle BCD$ pa je i $\angle BCD = \beta$.

Uvrštavanjem u raniju jednakost dobivamo $\beta + x = \beta + y$, odakle je $x = y$, što je i trebalo pokazati.

Primijetimo dva važna detalja: bez poznavanja obrata Talesova teorema ne bi mogli argumentirati da je trokut $BCD$ jednakokračan, a poredak točaka $F$, $E$ i $D$ na stranici $\overline{AB}$ ovisi o odnosu kutova $\alpha$ i $\beta$. Da smo krenuli od $\alpha < \beta$, dokaz bi išao na isti način, ali bi morali promatrati druge trokute unutar trokuta $ABC$.




Slika 8: Zadatak 8.

Sukladno ranije opisanoj strategiji, obradit ćemo još jedan zadatak u kojem se primijenjuje obrat Talesova teorema (štoviše, još jedan primjer koji se ne bi mogao pravilno i jasno argumentirati bez korištenja obrata Talesova teorema).

**Zadatak 9 ($7., 8.$ razred)**

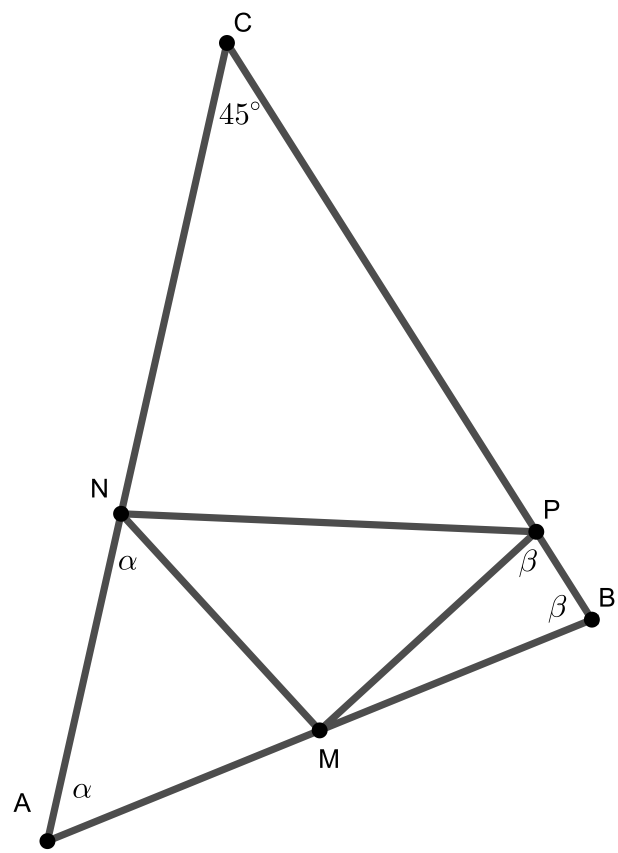
Dan je šiljastokutan i raznostraničan trokut $ABC$ pri čemu je $\angle BCA = 45^\circ$. Neka je točka $N$ nožište okomice iz vrha $B$ na stranicu $\overline{AC}$ te neka je točka $P$ nožište okomice iz vrha $A$ na stranicu $\overline{BC}$. Ako je s $M$ označeno polovište stranice $\overline{AB}$, dokažite da je trokut $NMP$ jednakokračan i pravokutan. Rješenje. Kao su kutovi $\angle BNA$ i $\angle BPA$ pravi, prema obratu Talesova teorema točke $A, N, P, B$ leže na kružnici sa središtem u točki $M$ pa je $|AM| = |MB| = |MN| = |MP|$ te su trokuti $AMN, BPM$ i $NMP$ jednakokračni. Preostaje dokazati da je trokut $NMP$ pravokutan, te očito jedino kut $\angle NMP$ može biti pravi.

Primijetimo da $\angle NMP$ zajedno s kutovima $\angle AMN$ i $\angle PMB$ čini ispruženi kut.

Označimo li $\angle CAM$ s $\alpha$ i $\angle ABC$ s $\beta$, iz trokuta $ABC$ slijedi $\alpha + \beta + 45^\circ = 180^\circ$ pa je $\alpha + \beta = 135^\circ$.

Iz jednakokračnih trokuta $AMN$ i $MBP$ dobivamo $2\alpha + \angle AMN = 180^\circ$ i $2\beta + \angle PMB = 180^\circ$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo $2(\alpha + \beta) + \angle AMN + \angle PMB = 360^\circ$, odakle je $\angle AMN + \angle PMB = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$.

Iz $\angle NMP + \angle AMN + \angle PMB = 180^\circ$ sada dobivamo $\angle NMP = 90^\circ$ pa je trokut $NMP$ pravokutan.




Slika 9: Zadatak 9.

# Fermatova metoda beskonačnog spusta

Ova metoda zvučnog naziva se pojavljuje među temama potrebnim za natjecanja učenika srednjih škola. Metoda se ustvari temelji na vrlo jasnom svojstvu skupa prirodnih brojeva: *Svaki neprazan podskup skupa prirodnih brojeva ima najmanji element.* Za razumijevanje ovakve tvrdnje nije potrebno neko posebno predznanje. Uzmemo li nekoliko prirodnih brojeva, tada među njima mora postojati najmanji. Stvar je nešto osjetljivija ukoliko uzmemo beskonačno mnogo prirodnih brojeva. U tom slučaju ne moramo moći naći najveći od njih, ali najmanji uvijek možemo naći.

Na to možemo gledati i ovako: skup prirodnih brojeva je poseban po tome što ima najmanji element. Takvo svojstvo ima i svaki (neprazan) podskup skupa prirodnih brojeva. Drugim riječima, u skupu prirodnih brojeva ne možemo naći niz elemenata $a_1, a_2, a_3, \dots$ tako da je $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$. Dakle, u prirodnim brojevima se ne možemo beskonačno spuštati, odakle i dolazi naziv ove metode.

Krenemo li od nekog prirodnog broja, postoji samo konačno mnogo prirodnih brojeva koji su od njega manji, pa spuštanje mora stati nakon konačno mnogo koraka.

Metoda beskonačnog spusta se koristi isključivo za dokazivanje negativnih tvrdnji, kada treba dokazati da nešto ne postoji, da ne postoji prikaz određenog tipa, da neka jednadžba nema rješenja ili da se npr. u danom nizu ne može pronaći element s nekim svojstvom.

Kako se metoda koristi? Ključno je na nekom mjestu u problemu prepoznati pojavljivanje prirodnih brojeva. Tada se kreće metodom suprotnog: pretpostavi se da postoji prikaz određenog tipa, da jednadžba ima rješenje ili da u nizu postoji element s traženim svojstvom. Zatim se među svim takvima uzme najmanji prikaz, najmanje rješenje ili najmanji element u nizu, a zatim se konstruira još manji. Obično je najkompliciraniji dio konstrukcije elementa odnosno izraza s prirodnim brojem manjim od onog s kojim smo krenuli.

Metodu je najbolje pojasniti na primjerima. Kod korištenja i usvajanje ovakve metode nije moguće strogo ulaziti u dob učenika, jer školsko gradivo u ovom slučaju ne čini razliku. Presudna je odgovarajuća matematička zrelost. Također, metoda u sebi ne sadrži neki strogi formalizam, već standardno logičko zaključivanje.

Krenimo s dobro poznatim primjerom.

**Primjer**

Dokažimo da je $\sqrt{2}$ iracionalan.

Rješenje: Pokazat ćemo jednu varijantu klasičnog pristupa ovom problemu. Najprije, pretpostavimo suprotno, neka je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada se $\sqrt{2}$ može prikazati u obliku $\frac{m}{n}$, pri čemu su $m, n$ *prirodni brojevi*. Primijetimo kako se na ovom mjestu pojavljuju prirodni brojevi. Od svih prikaza broja $\sqrt{2}$ u obliku $\frac{m}{n}$, odaberimo onaj u kojem je brojnik najmanji. Isto tako, mogli smo uzeti i prikaz u kojem je nazivnik najmanji. Formalnije, mogli smo rezimirati na idući način: neka je $S = \{m \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Iz pretpostavke da je $\sqrt{2}$ racionalan, slijedi da je skup $S$ neprazan, pa ima najmanji element, kojeg označimo s $m$.

Iz $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ slijedi $m = n\sqrt{2}$, odnosno $m^2 = 2n^2$. Kako je desna strana djeljiva s $2$, mora i lijeva strana biti djeljiva s $2$. Prema tome, $m$ je djeljiv s $2$. Ako je $m$ neparan, tada je $m = 2k+1$, za neki cijeli broj $k$, pa je $m^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$,

što je također neparan broj. Zato $m$ mora biti paran te je $m = 2k$ za neki prirodan broj $k$. Primijetimo da je $k < m$.
Uvrštavanjem dobivamo $4k^2 = 2n^2$ te $n^2 = 2k^2$. Sada na isti način dobivamo da je i $n$ paran te je $n = 2l$, za neki prirodan broj $l$. Odatle je $4l^2 = 2k^2$ te $k^2 = 2l^2$ i $\sqrt{2} = \frac{k}{l}$. Time smo našli prikaz od $\sqrt{2}$ u obliku razlomka s brojnikom manjim od $m$, što nije moguće. Ili: sada je i $k \in S$, $k < m$, što nije moguće. Prema tome, broj $\sqrt{2}$ je iracionalan.

Pokažimo sada primjene ove metode na dokazivanja da jednadžba određenog tipa nema rješenja.

**Zadatak**
Dokažite da ne postoje prirodni brojevi $a, b, c, d$ takvi da je $a^2 + b^2 = 3c^2 + 3d^2$.
Rješenje: Neka je $S = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{N}, a^2 + b^2 = 3c^2 + 3d^2\}$. Treba pokazati da je $S = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, neka je $S \neq \emptyset$. U ovom slučaju imamo dana četiri prirodna broja, ali ćemo ih okupiti u jednog: neka je $S_1 = \{a + b + c + d : (a, b, c, d) \in S\}$. Tada je $S_1$ neprazan podskup skupa prirodnih brojeva pa ima najmanji element. Označimo najmanji element skupa $S_1$ s $m$ te neka je $(a, b, c, d)$ element iz $S$ za koji vrijedi $a + b + c + d = m$. Dakle, uzimamo rješenje u kojem je suma nepoznanica najmanja.

Iz $a^2 + b^2 = 3c^2 + 3d^2$ slijedi da je $a^2 + b^2$ djeljivo s $3$. Primijetimo da se prirodan broj koji nije djeljiv s $3$ može zapisati u obliku $3k + 1$ ili $3k + 2$, pri čemu je $k$ neki nenegativan cijeli broj. Prema tome, kvadrat prirodnog broja koji nije djeljiv s $3$ je oblika $3l + 1$, za neki nenegativan cijeli broj $l$, jer je $(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ i $(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Dakle, ako niti jedan od brojeva $a$ i $b$ nije djeljiv s $3$, tada je $a^2 + b^2$ oblika $3l_1 + 1 + 3l_2 + 1 = 3(l_1 + l_2) + 2$, za neke nenegativne cijele brojeve $l_1, l_2$, pa $a^2 + b^2$ nije djeljivo s $3$. Ako je točno jedan od brojeva $a$ i $b$ djeljiv s $3$, tada je jedan od brojeva $a^2$, $b^2$ oblika $3l_1$, a drugi oblika $3l_2 + 1$, za neki prirodan broj $l_1$ i nenegativan cijeli broj $l_2$ pa je $a^2 + b^2 = 3(l_1 + l_2) + 1$, što također nije djeljivo s $3$. Prema tome, da bi $a^2 + b^2$ bilo djeljivo s $3$, moraju i $a$ i $b$ biti djeljivi s $3$, pa je $a = 3e$ i $b = 3f$, za neke prirodne brojeve $e, f$, jer su $a$ i $b$ prirodni brojevi. Sada je $a^2 + b^2 = 9e^2 + 9f^2$ odakle je $9e^2 + 9f^2 = 3c^2 + 3d^2$ ili $c^2 + d^2 = 3e^2 + 3f^2$. Slijedi $(c, d, e, f) \in S$, uz $e < a$ i $f < b$ pa je $c + d + e + f \in S_1$ uz $c + d + e + f < a + b + c + d = m$, što nije moguće. Prema tome, $S = \emptyset$.

**Zadatak**
Odredite sve proste brojeve $p$ za koje postoje prirodni brojevi $x, y$ i $n$ takvi da je $p^n = x^3 + y^3$.
Rješenje: Najprije primijetimo da je $2^1 = 1^3 + 1^3$ te $3^2 = 2^3 + 1^3$. Prema tome, prosti brojevi $p = 2$ i $p = 3$ zadovoljavaju prethodni identitet. Pokazat ćemo da za druge proste brojeve $p$ ne postoje prirodni brojevi $x, y$ i $n$ takvi da je $p^n = x^3 + y^3$.
Neka je $p$ prost broj, $p > 3$, takav da je $p^n = x^3 + y^3$ za neke prirodne brojeve $x, y$ i $n$. Od svih prikaza tog oblika, uzmimo onaj u kojem je $n$ najmanji. Ili: neka je $S = \{n \in \mathbb{N} : p^n = x^3 + y^3$, za neke $x, y \in \mathbb{N}\}$ te neka je $n$ najmanji element skupa $S$, uz pretpostavku da je skup $S$ neprazan.
Kako je $p > 3$, slijedi $p^n > 3$ pa je barem jedan od brojeva $x, y$ veći od $1$. S druge strane, $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, pri čemu je $x + y \geq 3$ (jer su $x, y$ prirodni brojevi od kojih je barem jedan veći od $1$). Također, iz $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy$

slijedi da je i $x^2 - xy + y^2 \geq 2$, jer je $(x-y)^2 \geq 0$ te $xy \geq 2$. Prema tome, i $x+y$ i $x^2 - xy + y^2$ imaju proste djelitelje, jer su to prirodni brojevi veći od 1. Iz

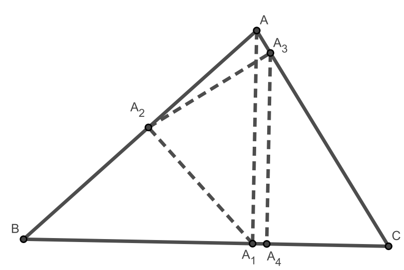
$$p^n = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

slijedi da jedini prost djelitelj i od $x+y$ i od $x^2 - xy + y^2$ može biti jedino $p$. Prema tome, i $x+y$ i $x^2 - xy + y^2$ su djeljivi s $p$. Zato je i $(x+y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = xy$ djeljivo prostim brojem $p$ pa je barem jedan od brojeva $x, y$ djeljiv s $p$. No, kako $p$ dijeli $x+y$, ako $p$ dijeli jedan od ovih brojeva, tada mora dijeliti i drugi te su i $x$ i $y$ djeljivi s $p$. Prikažimo ih u obliku $x = pk$, $y = pl$, pri čemu su $k$ i $l$ prirodnih brojevi.
Tada je i $x^3 + y^3 = k^3p^3 + l^3p^3 = (k^3 + l^3)p^3 \geq 2p^3$ te iz $p^n = x^3 + y^3$ slijedi $n \geq 4$. Također, uvrštavanjem u $p^n = x^3 + y^3$ dobivamo $p^n = (k^3 + l^3)p^3$, odakle je $p^{n-3} = k^3 + l^3$, čime dobivamo prikaz s potencijom $n-3$, što nije moguće jer je $n$ bila najmanja moguća potencija (ili: sada je $n - 3 \in S$, što nije moguće jer je $n - 3 < n$, a $n$ je najmanji element skupa $S$). Prema tome, za prost broj $p$, $p > 3$, ne postoje prirodni brojevi $x, y$ i $n$ takvi da je $p^n = x^3 + y^3$. Zato su traženi prosti brojevi samo $p = 2$ i $p = 3$.

Pogledat ćemo i jedan geometrijski zadatak u kojem se koristi ova metoda.

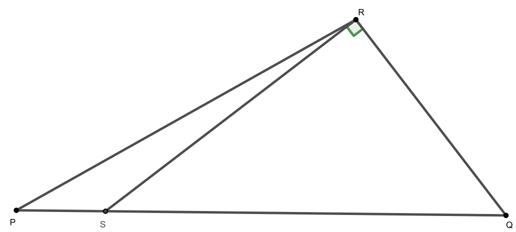
**Zadatak**

Iz vrha $A$ šiljastokutnog trokuta $ABC$ povučena je okomica na pravac $BC$ kojeg siječe u točki $A_1$. Zatim je točkom $A_1$ povučen pravac okomit na pravac $AB$, kojeg siječe u točki $A_2$. Točkom $A_2$ povučen je pravac okomit na pravac $AC$, kojeg siječe u točki $A_3$. Točkom $A_3$ povučen je pravac okomit na pravac $BC$, kojeg siječe u točki $A_4$ te se zatim nastavlja na isti način. Dokažite da su sve točke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ međusobno različite.



Slika 1: Zadatak 2. trokut $ABC$

Rješenje: Kako je trokut $ABC$ šiljastokutan, sve točke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ leže na stranicama tog trokuta. Također, niti jedna od ovih točaka se ne podudara s nekim vrhova trokuta. Zaista, primijetimo da ako je u npr. trokutu $PQR$ na stranici $\overline{PQ}$ dana točka $S$, koja je različita od točaka $P$ i $Q$, te okomica na pravac $QR$ kroz $S$ siječe $QR$ u točki $R$, tada se pri vrhu $R$ mora nalaziti tupi kut. Neka je $T = \{i \in \mathbb{N} : A_i = A_j, \text{ za neki } j \in \mathbb{N}, j > i\}$. Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$ te neka je $m$ najmanji element skupa $T$. Dakle, sada smo kao prirodni broj uzeli indeks elementa u nizu te odabrali prvi element u nizu koji bi se trebao ponoviti. Prema tome, postoji $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, takav da je $A_m = A_n$. Ako je $m > 1$, tada je, prema konstrukciji, i $A_{m-1} = A_{n-1}$, što nije moguće jer bi tada i $m-1$ bio element skupa $T$, no $m$ je najmanji element tog skupa. Dakle, mora vrijediti $m = 1$, no tada iz $A_n = A_1$ slijedi $A_{n-1} = A$, što nije moguće jer je $A_j \neq A$, za sve $j \in \mathbb{N}$. Prema tome, $T = \emptyset$ te su sve točke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ međusobno različite.




Slika 2: Zadatak 2. trokut $PQR$

# (Ne)Primjereni zadatci

Ovaj predmet ćemo završiti jednom temom koja namjerno nije zamišljena u obliku materijala pogodnih za poučavanje učenika na dodatnoj nastavi matematike. Ideja ove teme je da iznese nekoliko detalja i pitanja vezanih uz odabir zadataka. Sam odabir zadataka je vrlo kompleksan i često diskutabilan dio pripreme ispita i natjecanja.

Prvenstveno, nije lako zadati odgovarajuće zadatke i kvalitetno procijeniti njihovu težinu. Da stvari budu jasne, tu ne mislimo na smišljanje kvadratne jednadžbe ili sličnog tipa zadatka koji traži provjeru tehničkog postupka. Određeni ispiti naravno sadrže i takve zadatke, ali nama je cilj ići korak dalje. Na ovom mjestu nećemo sami krenuti u kreaciju zadataka, već ćemo prokomentirati osnovne ideje pri procijeni dostupnih zadataka te zatim iznijeti neke primjere, od kojih svaki sadrži diskutabilan dio.

Kada procijenjujemo težinu nekog zadatka, iz čije perspektive to činimo? Svakako bi kompleksnost problema trebalo promatrati iz perspektive rješavatelja, ali često nije izvedivo staviti se u tuđu perspektivu. Sjetimo se kako niti u običnim ispitima ne smiju svi zadatci biti jednako teški, ali ne smiju svi biti niti prelaki. Pogotovo se to ne smije dogoditi na dodatnoj nastavi ili na natjecanjima. Lagani zadatci neće rezultirati jasnom i kvalitetnom procijenom kvalitete i pripremljenosti rješavatelja, rang-ljestvica tada neće biti primjerena situaciji. No, zadatci ne smiju biti niti preteški. Stavimo li pred ispitanike preteške izazove, moći ćemo jedino procijenjivati koliko daleko su ostali od željenih rezultata.

Kako onda procijeniti da li je neki zadatak pretežak? Temeljni princip je da ga pokušamo sami riješiti. Pogledamo li samo rješenje, možda će nam se ono činiti jednostavno, iako i možda i nije tako lako samostalno doći do potrebnih ideja. No podsjetimo, ukoliko neki problem i nismo sami odmah riješili u kratkom roku, to ne znači da je taj problem nužno neprimjeren za zadavanje. Možda se radilo samo o nekoj specifičnoj ideji za koju bi na bilo potrebno više razmišljanja, što nakon pokušaja rješavanja možemo vidjeti iz dostupnog rješenja. U tom se slučaju zadatak može okarakterizirati kao težak / kompliciran / onaj zadatak koji bi mogao napraviti razliku među rješavateljima. Bez pokušaja samostalnog rješavatelja bi taj aspekt vjerojatno bio izgubljen.

Također, kod rješavanja ili proučavanja rješenja treba i detaljno analizirati sve korake. Moguće je da se pojedini koraci nama čine elementarni ili dobro poznati, no ne znači da to mora biti slučaj i kod učenika.

Osnovni pristup nalaže da bi se postavljeni zadatci moraju uklapati u gradivo (školsko ili ono koje je predviđeno). Svakako od učenika srednje škole ne treba tražiti da npr. rješavaju plošne integrale ili određuju reziduume, ali što je s nekim relativno poznatim područjima poput nejednakosti i teorije brojeva? Na kojim se mjestima ove teme obrađuju u osnovnoj i srednjoj školi? Gdje se uči više o djeljivosti ili o nejednakostima između sredina? Recimo da bi velik dio nejednakosti na natjecanjima zaista i trebao biti pokriven poznavanjem nejednakosti između sredina (ako ništa drugo, barem da se iz $(x-y)^2 \geq 0$ može zaključiti $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$), ali primijetimo koliko je izuzetno općenito kada se u pripremi za natjecanje navodi da treba poznavati diofantske jednadžbe. Uvijek je dobro upitati se kada ste se sami sreli s takvom tematikom (u kojem razredu, kojoj dobi, ili tek na studiju?).

Krenimo upravo zato s primjerima zadataka iz teorije brojeva. Napominjem, svi zadatci koje ću navesti su se zaista pojavili na natjecanjima učenika srednjih škola.

**Zadatak.**
Odrediti najmanji prirodan broj s točno $30$ djelitelja.
Rješenje. Prema osnovnom teoremu aritmetike, prirodan broj $n$ možemo zapisati u obliku $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, pri čemu su $p_1, \ldots, p_k$ prosti brojevi, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ prirodni brojevi. Tada je broj djelitelja od $n$ jednak $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Prema tome, treba broj $30$ prikazati u obliku produkta $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$, pri čemu je svaki od faktora veći od $1$, a zatim uz veće potencije stavljati manje proste brojeve kako bi dobili najmanji rezultat. Postoji nekoliko mogućnosti:

- $30 = 30$, pa je $k = 1$, $\alpha_1 = 29$ te $n = 2^29$;
- $30 = 2 \cdot 15$ pa je $k = 2$, $\alpha_1 = 14$, $\alpha_2 = 1$ te $n = 2^14 \cdot 3$;
- $30 = 3 \cdot 10$ pa je $k = 2$, $\alpha_1 = 9$, $\alpha_2 = 2$ te $n = 2^9 \cdot 3^2$;
- $30 = 5 \cdot 6$ pa je $k = 2$, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 4$ te $n = 2^5 \cdot 3^4$;
- $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ pa je $k = 3$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ te $n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

Očito je $720$ najmanji od dobivenih kandidata pa je traženi broj $720$.

Kada su se učenici susreli s primjenom osnovnog teorema aritmetike i izrazom za broj djelitelja prirodnog broja? Bez toga je teško riješiti ovaj zadatak, koji svakako pripada u područje teorije brojeva. Da li je ovaj zadatak primjeren ili nije? I standardno - kada ste se susreli s teorijom potrebnom za rješavanje ovog zadatka? S druge strane, ova teorija nije posebno komplicirana i svakako se može ispredavati u višim razredima srednje škole, u okviru dodatne nastave. Nakon toga rješavanje zadataka ovog tipa više ne bi trebalo predstavljati problem.

**Zadatak.**
Odrediti sve parove uzastopnih cijelih brojeva čija razlika kubova je jednaka kvadratu cijelog broja.
Rješenje. Neka su $m, n$ cijeli brojevi takvi da je

$$(m + 1)^3 - m^3 = n^2.$$

Kako $m$ i $m + 1$ nisu iste parnosti, nisu niti njihovi kubovi, pa je $n^2$ neparan te i $n$ mora biti neparan. Zato možemo uzeti $n = 2k + 1$, za neki cijeli broj $k$. Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
3m^2 + 3m + 1 &= 4k^2 + 4k + 1 \\
3m^2 + 3m &= 4k^2 + 4k \\
12m^2 + 12m &= 16k^2 + 16k \\
3(4m^2 + 4m) &= 4(4k^2 + 4k) \\
3(4m^2 + 4m + 1) - 3 &= 4(4k^2 + 4k + 1) - 4 \\
3(2m + 1)^2 &= 4(2k + 1)^2 - 1.
\end{aligned}$$

Za $x = 2(2k+1)$ i $y = 2m+1$ dobivamo

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

Ovo je Pellova jednadžba. Ako je $(x_1, y_1)$ najmanje rješenje u prirodnim brojevima, tada su sva rješenja dana s

$$x_n = x_{n-1}x_1 + 3y_{n-1}y_1,$$
$$y_n = x_{n-1}y_1 + y_{n-1}x_1.$$

Iz $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ dobivamo $y_2 = 4$, $y_3 = 15$ itd. Odatle za tražena rješenja $m = \frac{y-1}{2}$ dobivamo $m = 0, 7, 104, \ldots$

Dakle, treba prepoznati i riješiti Pellovu jednadžbu. Primjereno ili ne?

Pogledajmo sada nešto drugačiji primjer.

**Zadatak.**

Neka je $M$ podskup skupa $\{1, 2, \ldots, 99\}$ te neka skup $M$ ima 10 elemenata. Pokazati da postoje neprazni disjunktni podskupovi $A$ i $B$ od $M$ takvi da je suma brojeva u skupu $A$ jednaka sumi brojeva u skupu $B$.

Rješenje. Nepraznih podskupova od $M$ je ukupno $2^1 0 - 1 = 1023$. Suma elemenata u nekom podskupu je najviše $90 + 91 + \cdots + 99 = 945 < 1023$. Kako postoji više nepraznih podskupova nego mogućih suma, prema Dirichletovu principu slijedi da postoje $X, Y \subseteq M$, $X \neq Y$, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, takvi da je suma elemenata u $X$ jednaka sumi elemenata u $Y$. Još trebamo dobiti i disjunktne skupove s tim svojstvima, što ćemo ostvariti izbacivanjem zajedničkih elemenata: neka je $A = X \setminus Y$ i $B = Y \setminus X$.

Što je ovdje problem? Dirichletov princip je standardna metoda te je zadatak možda primjeren i za učenike nešto mlađe dobi. Ali - kada (u kojem razredu) bi učenici trebali biti upoznati s brojem podskupova $n$-članog skupa? Drugim riječima, polazište ovog zadatke je rezultat iz čiste kombinatorike i ta je teorijska pozadina ovdje element na koji treba obratiti pažnju. Vjerojatno vam se svima taj rezultat sada čini dobro poznat i sasvim elementaran, ali treba vidjeti kada će takav biti i učenicima.

Jedan geometrijski primjer:

**Zadatak.**

Nad svakom stranom tetraedra $ABCD$ konstruiran je vektor koji je okomit na tu stranu, njegova norma (modul) je jednaka površini te strane i usmjeren je na vanjsku stranu tetraedra. Dokazati da je suma tih vektora nul-vektor.

Rješenje. Neka je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD}$. Označimo s $\overrightarrow{v}_1$ vektor konstruiran na strani $ABD$. U zadatku je taj vektor potpuno zadan. Prisjetimo se ove definicije: vektorski produkt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$ je vektor koji je okomit na stranu $ABD$, usmjeren je na vanjsku stranu tetraedra te je njegova norma jednaka površini paraleleograma kojeg određuju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{c}$. Prema tome, slijedi

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}).$$

Kada se ovo prepozna, ostali vektori slijede na isti način:

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{2}(\vec{b} \times \vec{a}), \vec{v}_3 = \frac{1}{2}(\vec{c} \times \vec{b}), \vec{v}_4 = \frac{1}{2}((\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})).$$

Korištenje distributivnosti vektorskog produkta, antikomutativnosti vektorskog produkta ($\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$) i $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$, sada direktno slijedi $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{0}$.

U ovom zadatku je temeljno prepoznati (i naravno dobro poznavati) definiciju vektorskog produkta i svojstva te algebarske operacije. Radi se o temi koja je uključena u nastavno gradivo srednje škole, ali pitanje je koliko učenika je zaista vidjelo primjenu i obradu ove teme. Tema nije sasvim jednostavna, ali niti prekomplicirana. Ovaj primjer pokazuje kako su pojedini zadatci nerješivi bez kvalitetnog poznavanja teoretskog dijela srednjoškolske matematike.

**Zadatak.**
Neka su $a$ i $b$ prirodni brojevi takvi da $ab + 1$ dijeli $a^2 + b^2$. Dokažite da je tada

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

potpun kvadrat.

Rješenje. Priča koja stoji iza ovog zadatka je vrlo specifična. Znate li kako se odabiru zadatci za Međunarodnu matematičku olimpijadu? Svaka zemlja sudionica može predložiti zadatak te je ovaj zadatak tadašanja Zapadna Njemačka $1988.$ predložila za Međunarodnu matematičku olimpijadu u Australiji. Povjerenstvo za odabir zadataka zatim rješava predložene zadatke, svaki član samostalno. Niti jedan od članova povjerenstva nije uspio riješiti ovaj zadatak u vremenu od $3$ sata (vrijeme rješavanja pojedinog predloženog zadatka se namjerno tako ograničava). Zatim je povjerenstvo zamolilo $10$-ak australskih matematičara koji se bave teorijom brojeva da pokušaju riješiti ovaj zadatak. Niti jedan od njih nije uspio riješiti ovaj zadatak unutar $3$ sata. Zadatak je okarakteriziran kao vrlo težak te je u prijedlogu obilježen s dvije zvjezdice, standardnom oznakom za izuzetno kompliciran problem prema mišljenju povjerenstva. Unatoč tome, zadatak je te godine zadan na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, kao $6.$ zadatak (tradicionalno najteži). Ukupno je $11$ učenika uspjelo riješiti taj zadatak (učenici za rješavanje tri zadatka imaju predviđeno $4.5$ sati).

Dakle, iako bi prema iskustvima prethodnih rješavatelja zadatak vjerojatno bio neprimjeren, određen broj učenika ga je uspio riješiti te je taj zadatak u potpunosti ispunio svoju svrhu - odvojio je najbolje natjecatelje od ostalih.

Rješenje ovog zadatka nećemo iznositi na ovom mjestu. Možete ga pokušati sami riješiti ili potražiti rješenje, ukoliko vas zanima. Napomenut ću da samo rješenje ne donosi neke nevjerojatne ideje niti specifičnu pozadinsku teoriju. Jedan mogući pristup je upravo pomoću Fermatove metode beskonačnog spusta - krenuti od pretpostavke da izraz iz iskaza zadatka nije potpun kvadrat, uzeti najmanji takav izraz te konstruirati još manji.