Cjelobrojne funkcije

Tema koju se uglavnom ne obrađuje u školi.

Cjelobrojne funkcije

Tema koju se uglavnom ne obrađuje u školi.

Najprije definirajmo:

Cjelobrojne funkcije

Tema koju se uglavnom ne obrađuje u školi.

Najprije definirajmo:
pod broja a = najveći cijeli broj koji nije veći od a

Cjelobrojne funkcije

Tema koju se uglavnom ne obrađuje u školi.

Najprije definirajmo:
pod broja $a =$ najveći cijeli broj koji nije veći od a
Oznaka: $\lfloor a \rfloor$.

Cjelobrojne funkcije

Tema koju se uglavnom ne obrađuje u školi.

Najprije definirajmo:
pod broja $a =$ najveći cijeli broj koji nije veći od a
Oznaka: $\lfloor a \rfloor$.
strop broja $a =$ najmanji cijeli broj koji nije manji od a

Cjelobrojne funkcije

Tema koju se uglavnom ne obrađuje u školi.

Najprije definirajmo:
pod broja $a =$ najveći cijeli broj koji nije veći od a
Oznaka: $\lfloor a \rfloor$.
strop broja $a =$ najmanji cijeli broj koji nije manji od a
Oznaka: $\lceil a \rceil$.

Cjelobrojne funkcije

pod od $a =$ najveće cijelo od a
strop od $a =$ najmanje cijelo od a

Cjelobrojne funkcije

pod od a = najveće cijelo od a
strop od a = najmanje cijelo od a

Kada obrađivati u školi?

Cjelobrojne funkcije

pod od a = najveće cijelo od a
strop od a = najmanje cijelo od a

Kada obrađivati u školi?
U višim razredima osnovne škole

Cjelobrojne funkcije

pod od a = najveće cijelo od a
strop od a = najmanje cijelo od a

Kada obrađivati u školi?
U višim razredima osnovne škole - kad učenici usvoje racionalne i realne brojeve

Cjelobrojne funkcije

pod od a = najveće cijelo od a
strop od a = najmanje cijelo od a

Kada obrađivati u školi?
U višim razredima osnovne škole - kad učenici usvoje racionalne i realne brojeve (bez spominjanja termina *funkcije*,

Cjelobrojne funkcije

pod od a = najveće cijelo od a
strop od a = najmanje cijelo od a

Kada obrađivati u školi?
U višim razredima osnovne škole - kad učenici usvoje racionalne i realne brojeve (bez spominjanja termina *funkcije*, pogodno za odnose na brojevnom pravcu).

Cjelobrojne funkcije

pod od $a =$ najveće cijelo od a
strop od $a =$ najmanje cijelo od a

Kada obrađivati u školi?
U višim razredima osnovne škole - kad učenici usvoje racionalne i realne brojeve (bez spominjanja termina *funkcije*, pogodno za odnose na brojevnom pravcu).

U srednjoj školi

Cjelobrojne funkcije

pod od a = najveće cijelo od a
strop od a = najmanje cijelo od a

Kada obrađivati u školi?
U višim razredima osnovne škole - kad učenici usvoje racionalne i realne brojeve (bez spominjanja termina *funkcije*, pogodno za odnose na brojevnom pravcu).

U srednjoj školi - u 4. razredu može i kao funkcije $\lfloor\cdot\rfloor, \lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

Primjeri:

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$

Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$

Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$

Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$

Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$
Zatim može i općenitije:

Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$
Zatim može i općenitije:
$\lfloor a \rfloor = a$

Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$
Zatim može i općenitije:
$\lfloor a \rfloor = a$ jedino ako je a cijeli broj

Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$
Zatim može i općenitije:
$\lfloor a \rfloor = a$ jedino ako je a cijeli broj
$\lfloor a \rfloor \leq a$,

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$
Zatim može i općenitije:
$\lfloor a \rfloor = a$ jedino ako je a cijeli broj
$\lfloor a \rfloor \leq a$,
$a \leq \lceil a \rceil$

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$
Zatim može i općenitije:
$\lfloor a \rfloor = a$ jedino ako je a cijeli broj
$\lfloor a \rfloor \leq a$,
$a \leq \lceil a \rceil$
$\lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil$

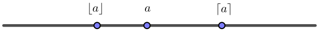
Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$
Zatim može i općenitije:
$\lfloor a \rfloor = a$ jedino ako je a cijeli broj
$\lfloor a \rfloor \leq a$,
$a \leq \lceil a \rceil$
$\lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil$
jedino ako je a cijeli broj

Cjelobrojne funkcije

Primjeri: (ključni za usvajanje ovih pojmova)
$\lfloor 5.2 \rfloor = 5, \lceil 5.2 \rceil = 6$
$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lceil 2 \rceil = 2$
$\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1, \lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
$\lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil -\pi \rceil = -3$
Zatim može i općenitije:
$\lfloor a \rfloor = a$ jedino ako je a cijeli broj
$\lfloor a \rfloor \leq a$,
$a \leq \lceil a \rceil$
$\lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil$
jedino ako je a cijeli broj

Cjelobrojne funkcije



Slika: Prikaz poda i stropa na brojevnom pravcu ($a \notin \mathbb{Z}$)

Još općenitije

Još općenitije
Za svaki realan broj a vrijedi $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$

Cjelobrojne funkcije

Još općenitije
Za svaki realan broj a vrijedi $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$
(drugim riječima, $\lfloor a \rfloor$ i $\lfloor a \rfloor + 1$ su uzastopni cijeli brojevi između kojih se nalazi a)

Cjelobrojne funkcije

Još općenitije

Za svaki realan broj a vrijedi $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$

(drugim riječima, $\lfloor a \rfloor$ i $\lfloor a \rfloor + 1$ su uzastopni cijeli brojevi između kojih se nalazi a) - isto vrijedi i za $\lceil a \rceil - 1$ i $\lceil a \rceil$.

Cjelobrojne funkcije

Pojavljivanje u udžbenicima?

Cjelobrojne funkcije

Pojavljivanje u udžbenicima?
Glavna mjera kuta α je jednaka $\alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{360} \right\rfloor \cdot 360^\circ$.

Cjelobrojne funkcije

Pojavljivanje u udžbenicima?
Glavna mjera kuta α je jednaka $\alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{360} \right\rfloor \cdot 360^\circ$. Odakle?

Cjelobrojne funkcije

Pojavljivanje u udžbenicima?

Glavna mjera kuta α je jednaka $\alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{360} \right\rfloor \cdot 360^\circ$. Odakle?

Za prirodne brojeve a, b je $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ kvocijent cjelobrojnog dijeljenja:

Cjelobrojne funkcije

Pojavljivanje u udžbenicima?

Glavna mjera kuta α je jednaka $\alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{360} \right\rfloor \cdot 360^\circ$. Odakle?

Za prirodne brojeve a, b je $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ kvocijent cjelobrojnog dijeljenja:

$$22 = 3 \cdot 7 + 1 = \left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor \cdot 7 + 1$$

Cjelobrojne funkcije

Pojavljivanje u udžbenicima?

Glavna mjera kuta α je jednaka $\alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{360} \right\rfloor \cdot 360^\circ$. Odakle?

Za prirodne brojeve a, b je $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ kvocijent cjelobrojnog dijeljenja:

$$22 = 3 \cdot 7 + 1 = \left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor \cdot 7 + 1$$

$a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b$ je ostatak pri dijeljenju broja a brojem b

Cjelobrojne funkcije

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.

Cjelobrojne funkcije

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.
Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$.

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima. Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$. Odredite broj (cijelih) brojeva između a i b.

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.
Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$. Odredite broj (cijelih) brojeva između a i b. (pri tome brojimo i a i b)

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.
Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$. Odredite broj (cijelih) brojeva između a i b. (pri tome brojimo i a i b)
Prilagoditi dobi učenika!

Cjelobrojne funkcije

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.
Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$. Odredite broj (cijelih) brojeva između a i b. (pri tome brojimo i a i b)
Prilagoditi dobi učenika!
Za $5., 6.$ razred uzimamo da su a i b prirodni brojevi.

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.
Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$. Odredite broj (cijelih) brojeva između a i b. (pri tome brojimo i a i b)
Prilagoditi dobi učenika!
Za $5., 6.$ razred uzimamo da su a i b prirodni brojevi.
Pogledamo nekoliko primjera iz kojih nastojimo izvući općeniti zaključak:

Cjelobrojne funkcije

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.
Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$. Odredite broj (cijelih) brojeva između a i b. (pri tome brojimo i a i b)
Prilagoditi dobi učenika!
Za $5., 6.$ razred uzimamo da su a i b prirodni brojevi.
Pogledamo nekoliko primjera iz kojih nastojimo izvući općeniti zaključak:
$a = 3$, $b = 7$: $3, 4, 5, 6, 7 \to 5$ brojeva

Cjelobrojne funkcije

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.
Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$. Odredite broj (cijelih) brojeva između a i b. (pri tome brojimo i a i b)
Prilagoditi dobi učenika!
Za $5., 6.$ razred uzimamo da su a i b prirodni brojevi.
Pogledamo nekoliko primjera iz kojih nastojimo izvući općeniti zaključak:
$a = 3,\ b = 7$: $3, 4, 5, 6, 7 \to 5$ brojeva
$a = 5,\ b = 12$: $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \to 8$ brojeva

Cjelobrojne funkcije

Cjelobrojne funkcije su česte u kombinatornim problemima.
Neka su a i b brojevi takvi da je $a < b$. Odredite broj (cijelih) brojeva između a i b. (pri tome brojimo i a i b)
Prilagoditi dobi učenika!
Za $5., 6.$ razred uzimamo da su a i b prirodni brojevi.
Pogledamo nekoliko primjera iz kojih nastojimo izvući općeniti zaključak:
$a = 3,\ b = 7$: $3, 4, 5, 6, 7 \rightarrow 5$ brojeva
$a = 5,\ b = 12$: $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \rightarrow 8$ brojeva
Općenito: $b - a + 1$ brojeva

Cjelobrojne funkcije

Za 7. razred uključimo i negativne cijele brojeve

Cjelobrojne funkcije

Za 7. razred uključimo i negativne cijele brojeve - opet pogledati neki primjer

Za 7. razred uključimo i negativne cijele brojeve - opet pogledati neki primjer
$a = -2$, $b = 4$: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \rightarrow 7$ brojeva

Cjelobrojne funkcije

Za 7. razred uključimo i negativne cijele brojeve - opet pogledati neki primjer

$a = -2,\ b = 4$: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \rightarrow 7$ brojeva

$a = -6,\ b = -2$: $-6, -5, -4, -3, -2 \rightarrow 5$ brojeva

Za 7. razred uključimo i negativne cijele brojeve - opet pogledati neki primjer

$a = -2,\ b = 4$: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \rightarrow 7$ brojeva

$a = -6,\ b = -2$: $-6, -5, -4, -3, -2 \rightarrow 5$ brojeva

Formula $b - a + 1$ prolazi i u ovom slučaju.

Za 7. razred uključimo i negativne cijele brojeve - opet pogledati neki primjer

$a = -2,\ b = 4$: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \to 7$ brojeva

$a = -6,\ b = -2$: $-6, -5, -4, -3, -2 \to 5$ brojeva

Formula $b - a + 1$ prolazi i u ovom slučaju.

Za 8. razred i srednju školu - racionalni ili realni brojevi a i b

Cjelobrojne funkcije

Za 7. razred uključimo i negativne cijele brojeve - opet pogledati neki primjer

$a = -2$, $b = 4$: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \to 7$ brojeva

$a = -6$, $b = -2$: $-6, -5, -4, -3, -2 \to 5$ brojeva

Formula $b - a + 1$ prolazi i u ovom slučaju.

Za 8. razred i srednju školu - racionalni ili realni brojevi a i b - sada formula sigurno ne prolazi, ali imamo formulu za cijele brojeve

Koji je najmanji cijeli broj koji se nalazi između a i b?

Cjelobrojne funkcije

Koji je najmanji cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najmanji cijeli broj koji nije manji od a,

Cjelobrojne funkcije

Koji je najmanji cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najmanji cijeli broj koji nije manji od a, tj. $\lceil a \rceil$.

Cjelobrojne funkcije

Koji je najmanji cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najmanji cijeli broj koji nije manji od a, tj. $\lceil a \rceil$.

Koji je najveći cijeli broj koji se nalazi između a i b?

Cjelobrojne funkcije

Koji je najmanji cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najmanji cijeli broj koji nije manji od a, tj. $\lceil a \rceil$.

Koji je najveći cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najveći cijeli broj koji nije veći od b, Koji je najmanji cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najmanji cijeli broj koji nije manji od a, tj. $\lceil a \rceil$.

Koji je najveći cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najveći cijeli broj koji nije veći od b, tj. $\lfloor b \rfloor$.

Cjelobrojne funkcije

Koji je najmanji cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najmanji cijeli broj koji nije manji od a, tj. $\lceil a \rceil$.

Koji je najveći cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najveći cijeli broj koji nije veći od b, tj. $\lfloor b \rfloor$.

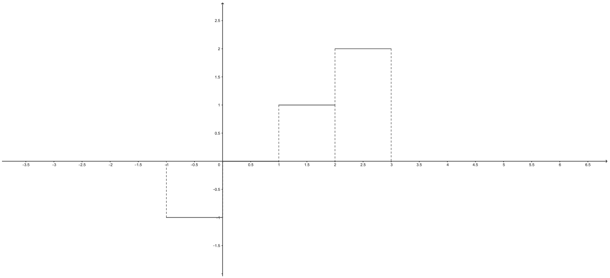
Dakle, tražimo broj cijelih brojeva između $\lceil a \rceil$ i $\lfloor b \rfloor$,

Cjelobrojne funkcije

Koji je najmanji cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najmanji cijeli broj koji nije manji od a, tj. $\lceil a \rceil$.

Koji je najveći cijeli broj koji se nalazi između a i b? To je najveći cijeli broj koji nije veći od b, tj. $\lfloor b \rfloor$.

Dakle, tražimo broj cijelih brojeva između $\lceil a \rceil$ i $\lfloor b \rfloor$, a to je $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$.



Slika: Graf funkcije pod (nad intervalom $\langle -1, 3\rangle$)

Primjer funkcije koja nije neprekidna, ali je integrabilna:

Primjer funkcije koja nije neprekidna, ali je integrabilna: (po interpretaciji preko površine)

Cjelobrojne funkcije

Primjer funkcije koja nije neprekidna, ali je integrabilna: (po interpretaciji preko površine)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} \lfloor x \rfloor dx &= \int_{-1}^{0} \lfloor x \rfloor dx + \int_{0}^{1} \lfloor x \rfloor dx + \int_{1}^{2} \lfloor x \rfloor dx + \int_{2}^{3} \lfloor x \rfloor dx \\ &= -1 + 0 + 1 + 2 = 2\end{aligned}$$

Cjelobrojne funkcije

Primjer funkcije koja nije neprekidna, ali je integrabilna: (po interpretaciji preko površine)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}\lfloor x\rfloor dx &= \int_{-1}^{0}\lfloor x\rfloor dx+\int_{0}^{1}\lfloor x\rfloor dx+\int_{1}^{2}\lfloor x\rfloor dx+\int_{2}^{3}\lfloor x\rfloor dx\\ &= -1+0+1+2=2\end{aligned}$$

Razlomljeni dio od x:

Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $(x = \lfloor x \rfloor + \{x\})$

Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $(x = \lfloor x \rfloor + \{x\})$
$\{2.5\} = 0.5$

Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $(x = \lfloor x \rfloor + \{x\})$
$\{2.5\} = 0.5$
$\{4\} = 0$

Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $(x = \lfloor x \rfloor + \{x\})$
$\{2.5\} = 0.5$
$\{4\} = 0$
$\{-2.3\} = 0.7$

Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $(x = \lfloor x \rfloor + \{x\})$
$\{2.5\} = 0.5$
$\{4\} = 0$
$\{-2.3\} = 0.7$
Zaključak:

Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $(x = \lfloor x \rfloor + \{x\})$
$\{2.5\} = 0.5$
$\{4\} = 0$
$\{-2.3\} = 0.7$
Zaključak: $0 \leq \{x\} < 1$,

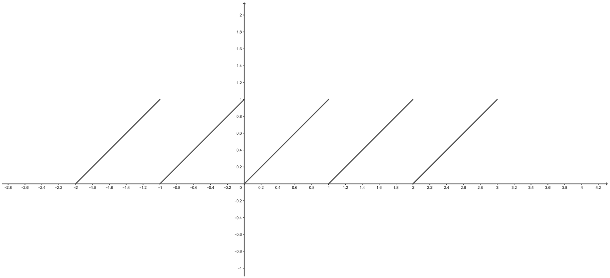
Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $(x = \lfloor x \rfloor + \{x\})$
$\{2.5\} = 0.5$
$\{4\} = 0$
$\{-2.3\} = 0.7$
Zaključak: $0 \leq \{x\} < 1$, $\{x\} = 0$ jedino za cijeli broj x

Cjelobrojne funkcije

Razlomljeni dio od x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ $(x = \lfloor x \rfloor + \{x\})$
$\{2.5\} = 0.5$
$\{4\} = 0$
$\{-2.3\} = 0.7$
Zaključak: $0 \leq \{x\} < 1$, $\{x\} = 0$ jedino za cijeli broj x
Periodična funkcija temeljnog perioda 1.

Cjelobrojne funkcije



Slika: Graf funkcije $f(x) = \{x\}$ (nad intervalom $\langle -2, 3 \rangle$)

Odrediti broj znamenki prirodnog broja n, prigodno uz učenje logaritama.

Odrediti broj znamenki prirodnog broja n, prigodno uz učenje logaritama. Temeljno pitanje: kako odrediti koliko prirodan broj n ima znamenki?

Odrediti broj znamenki prirodnog broja n, prigodno uz učenje logaritama. Temeljno pitanje: kako odrediti koliko prirodan broj n ima znamenki?
Označimo broj znamenki prirodnog broja n s r.

Odrediti broj znamenki prirodnog broja n, prigodno uz učenje logaritama. Temeljno pitanje: kako odrediti koliko prirodan broj n ima znamenki?

Označimo broj znamenki prirodnog broja n s r.

n dvoznamenkast: $10 \leq n < 10^2$

Cjelobrojne funkcije

Odrediti broj znamenki prirodnog broja n, prigodno uz učenje logaritama. Temeljno pitanje: kako odrediti koliko prirodan broj n ima znamenki?
Označimo broj znamenki prirodnog broja n s r.
n dvoznamenkast: $10 \leq n < 10^2$
n troznamenkast vrijedi $10^2 \leq n < 10^3$

Odrediti broj znamenki prirodnog broja n, prigodno uz učenje logaritama. Temeljno pitanje: kako odrediti koliko prirodan broj n ima znamenki?
Označimo broj znamenki prirodnog broja n s r.
n dvoznamenkast: $10 \leq n < 10^2$
n troznamenkast vrijedi $10^2 \leq n < 10^3$
općenito vrijedi $10^{r-1} \leq n < 10^r$.

Cjelobrojne funkcije

Slijedi $r - 1 \leq \log n < r$.

Cjelobrojne funkcije

Slijedi $r-1 \leq \log n < r$.
$r-1$ i r su uzastopni cijeli brojevi pa je $r-1 = \lfloor \log n \rfloor$ i konačno
$r = \lfloor \log n \rfloor + 1$

Slijedi $r - 1 \leq \log n < r$.
$r - 1$ i r su uzastopni cijeli brojevi pa je $r - 1 = \lfloor \log n \rfloor$ i konačno
$r = \lfloor \log n \rfloor + 1$
Broj znamenki prirodnog broja n jednak je $\lfloor \log n \rfloor + 1$.

Zadatak.

Zadatak.
Neka u decimalnom zapisu broja 2^{1997} ima m znamenki, a u zapisu broja 5^{1997} ima n znamenki. Odrediti $m + n$.

Zadatak.
Neka u decimalnom zapisu broja 2^{1997} ima m znamenki, a u zapisu broja 5^{1997} ima n znamenki. Odrediti $m + n$.
Uočimo da ne trebao odrediti m niti n, već njihovu sumu.

Zadatak.
Neka u decimalnom zapisu broja 2^{1997} ima m znamenki, a u zapisu broja 5^{1997} ima n znamenki. Odrediti $m + n$.
Uočimo da ne trebao odrediti m niti n, već njihovu sumu.
Znamo da je $m = \lfloor \log(2^{1997}) \rfloor + 1 = \lfloor 1997 \cdot \log 2 \rfloor + 1$ te $n = \lfloor 1997 \cdot \log 5 \rfloor + 1$.

Zadatak.
Neka u decimalnom zapisu broja 2^{1997} ima m znamenki, a u zapisu broja 5^{1997} ima n znamenki. Odrediti $m+n$.
Uočimo da ne trebao odrediti m niti n, već njihovu sumu.
Znamo da je $m = \lfloor \log(2^{1997}) \rfloor + 1 = \lfloor 1997 \cdot \log 2 \rfloor + 1$ te
$n = \lfloor 1997 \cdot \log 5 \rfloor + 1$.
Kako $1997 \cdot \log 2$ i $1997 \cdot \log 5$ nisu cijeli, slijedi
$1997 \cdot \log 2 < m < 1997 \cdot \log 2 + 1$ i
$1997 \cdot \log 5 < n < 1997 \cdot \log 5 + 1$.

Zadatak.
Neka u decimalnom zapisu broja 2^{1997} ima m znamenki, a u zapisu broja 5^{1997} ima n znamenki. Odrediti $m+n$.
Uočimo da ne trebao odrediti m niti n, već njihovu sumu.
Znamo da je $m = \lfloor \log(2^{1997}) \rfloor + 1 = \lfloor 1997 \cdot \log 2 \rfloor + 1$ te
$n = \lfloor 1997 \cdot \log 5 \rfloor + 1$.
Kako $1997 \cdot \log 2$ i $1997 \cdot \log 5$ nisu cijeli, slijedi
$1997 \cdot \log 2 < m < 1997 \cdot \log 2 + 1$ i
$1997 \cdot \log 5 < n < 1997 \cdot \log 5 + 1$.

Sada je
$1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 < m + n < 1997 \cdot \log 2 + 1 + 1997 \cdot \log 5 + 1.$

Cjelobrojne funkcije

Sada je
$1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 < m + n < 1997 \cdot \log 2 + 1 + 1997 \cdot \log 5 + 1$.
Iz $1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 = 1997 \cdot (\log 2 + \log 5) =$
$1997 \cdot \log(2 \cdot 5) = 1997$

Sada je
$1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 < m + n < 1997 \cdot \log 2 + 1 + 1997 \cdot \log 5 + 1.$
Iz $1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 = 1997 \cdot (\log 2 + \log 5) =$
$1997 \cdot \log(2 \cdot 5) = 1997$ te dobivamo $1997 < m + n < 1999$

Sada je
$1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 < m + n < 1997 \cdot \log 2 + 1 + 1997 \cdot \log 5 + 1$.
Iz $1997 \cdot \log 2 + 1997 \cdot \log 5 = 1997 \cdot (\log 2 + \log 5) = 1997 \cdot \log(2 \cdot 5) = 1997$ te dobivamo $1997 < m + n < 1999$ pa je $m + n = 1998$.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. (U ovakvim zadatcima se uvijek dodaje i definicija funkcije pod.)

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. (U ovakvim zadatcima se uvijek dodaje i definicija funkcije pod.)
Primijetimo da je lijeva strana jednadžbe cijeli broj.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. (U ovakvim zadatcima se uvijek dodaje i definicija funkcije pod.)
Primijetimo da je lijeva strana jednadžbe cijeli broj. Zato i desna strana mora biti cijeli broj, tj. $x \in \mathbb{Z}$.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. (U ovakvim zadatcima se uvijek dodaje i definicija funkcije pod.)
Primijetimo da je lijeva strana jednadžbe cijeli broj. Zato i desna strana mora biti cijeli broj, tj. $x \in \mathbb{Z}$. No, tada je i $3x^2 - x$ cijeli broj te jednadžba prelazi u $3x^2 - x = x + 1$.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. (U ovakvim zadatcima se uvijek dodaje i definicija funkcije pod.)
Primijetimo da je lijeva strana jednadžbe cijeli broj. Zato i desna strana mora biti cijeli broj, tj. $x \in \mathbb{Z}$. No, tada je i $3x^2 - x$ cijeli broj te jednadžba prelazi u $3x^2 - x = x + 1$. Dobivamo kvadratnu jednadžbu $3x^2 - 2x - 1 = 0$,

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. (U ovakvim zadatcima se uvijek dodaje i definicija funkcije pod.)
Primijetimo da je lijeva strana jednadžbe cijeli broj. Zato i desna strana mora biti cijeli broj, tj. $x \in \mathbb{Z}$. No, tada je i $3x^2 - x$ cijeli broj te jednadžba prelazi u $3x^2 - x = x + 1$. Dobivamo kvadratnu jednadžbu $3x^2 - 2x - 1 = 0$, čije jedino cjelobrojno rješenje je 1.

Zadatak.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor\frac{x^2+3}{x+2}\rfloor = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Na isti način kao u prethodnom zadatku vidimo da je x cijeli broj.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Na isti način kao u prethodnom zadatku vidimo da je x cijeli broj.
Primijetimo da za cijeli broj a i realan broj b vrijedi $\lfloor a + b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$.

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Na isti način kao u prethodnom zadatku vidimo da je x cijeli broj.
Primijetimo da za cijeli broj a i realan broj b vrijedi
$\lfloor a + b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$.
Sada imamo

$$\left\lfloor \frac{x^2 + 3}{x + 2} \right\rfloor =$$

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Na isti način kao u prethodnom zadatku vidimo da je x cijeli broj.
Primijetimo da za cijeli broj a i realan broj b vrijedi
$\lfloor a + b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$.
Sada imamo

$$\left\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x^2-4+7}{x+2} \right\rfloor =$$

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Na isti način kao u prethodnom zadatku vidimo da je x cijeli broj.
Primijetimo da za cijeli broj a i realan broj b vrijedi
$\lfloor a + b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$.
Sada imamo

$$\left\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x^2-4+7}{x+2} \right\rfloor = \left\lfloor x-2+\frac{7}{x+2} \right\rfloor =$$

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Na isti način kao u prethodnom zadatku vidimo da je x cijeli broj.
Primijetimo da za cijeli broj a i realan broj b vrijedi
$\lfloor a + b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$.
Sada imamo

$$\left\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x^2-4+7}{x+2} \right\rfloor = \left\lfloor x-2+\frac{7}{x+2} \right\rfloor = x-2+\left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor.$$

Zadatak.
Riješiti jednadžbu $\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \rfloor = x-1$, $x \in \mathbb{R}$. Na isti način kao u prethodnom zadatku vidimo da je x cijeli broj.
Primijetimo da za cijeli broj a i realan broj b vrijedi
$\lfloor a+b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor$.
Sada imamo

$$\left\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x^2-4+7}{x+2} \right\rfloor = \left\lfloor x-2+\frac{7}{x+2} \right\rfloor = x-2+\left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor.$$

Jednadžba sada prelazi u

$$x - 2 + \left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor = x - 1$$

Cjelobrojne funkcije

Jednadžba sada prelazi u

$$x - 2 + \left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor = x - 1$$

odakle je $\left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor = 1.$

Jednadžba sada prelazi u

$$x - 2 + \left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor = x - 1$$

odakle je $\left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor = 1.$

Prema tome, tražimo sve cijele brojeve x takve da je $1 \leq \frac{7}{x+2} < 2$

Jednadžba sada prelazi u

$$x - 2 + \left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor = x - 1$$

odakle je $\left\lfloor \frac{7}{x+2} \right\rfloor = 1$.
Prema tome, tražimo sve cijele brojeve x takve da je $1 \leq \frac{7}{x+2} < 2$ pa je $x \in \{2, 3, 4, 5\}$.