Dr. Miljenko Crnjac, Mr. Dragan Jukić, Dr. Rudolf Scitovski

MATEMATIKA

Osijek, 1994.

M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski – Matematika

Udžbenik U-62

Recenzenti:

Prof.dr.sc. Hrvoje Kraljević

Prof.dr.sc. Harry Miller

Prof.dr.sc. Radoslav Galić

Urednik:

Prof.dr.sc. Ivan Boras

Tehnička obrada:

mr.sc. Dragan Jukić

Crteže izradili:

mr.sc. Dragan Jukić i Prof.dr.sc. Rudolf Scitovski

Naslovna stranica:

Prof.dr.sc. Rudolf Scitovski

UDK 517
CRNJAC, Miljenko
Matematika / Miljenko Crnjac, Dragan Jukić, Rudolf Scitovski. -
Osijek : Ekonomski fakultet, 1994. - VII, 367 str. : 110 slika : 31 tablica ; 24 cm. -
Naklada: 500 primj. - (Biblioteka Ekonomskog fakulteta Osijek, U-62)

ISBN 953-6073-03-X

1. Jukić, Dragan
2. Scitovski, Rudolf

Na naslovnoj stranici prikazan je "nemogući trokut", koga je prvi 1934. godine nacrtao švedski umjetnik Oscar Reutersvärd.

Sadržaj:

PREDGOVOR

U knjizi su obrađena područja *matematičke analize funkcija jedne varijable* i *financijska matematika*. Knjiga je pisana prema nastavnom programu matematike na prvoj godini studija ekonomskih i poljoprivrednih znanosti. Međutim, njome se mogu koristiti i studenti tehničkih fakulteta, inženjeri, fizičari, kemičari, biolozi, učenici srednjih škola i svi oni koji žele upoznati ovaj dio matematike u opsegu i na razini izloženoj u ovoj knjizi.

Prvih osam poglavlja napisali su prof. dr Miljenko Crnjac i mr Dragan Jukić, a deveto poglavlje napisao je prof. dr Rudolf Scitovski.

U svim poglavljima teorijski dio ilustriran je mnoštvom primjera. Primjeri iz područja matematičke analize preuzeti su uglavnom iz sljedećih knjiga: [4], [6], [7], [12], [16]. Za jedan broj zadataka date su osim rješenja i upute. U svakom poglavlju redom su i zasebno numerirani primjeri, tablice i slike. Definicije nisu numerirane, nego su u tekstu otisnute **masnim slovima.**

Autori će biti zahvalni svim čitateljima na njihovim primjedbama u svezi s eventualnim greškama, nepreciznostima ili nedostacima koje će koristiti za eventualno novo izdanje.

Na kraju, zahvaljujemo svima koji su izravno ili na drugi način pomogli da se ova knjiga tiska i bude što bolja. To se posebice odnosi na recenzente prof. dr Hrvoja Kraljevića, prof. dr Harry Millera i prof. dr Radoslava Galića koji su pažljivo pročitali rukopis i svojim primjedbama i sugestijama utjecali na mnoge dijelove teksta.

U Osijeku, rujna 1994. Autori

PREGLED SIMBOLA

a) Značenje nekih simbola

Simbol	*Upotreba*	*Značenje*
$\in$	$x \in A$	x je element skupa A
$\notin$	$x \notin A$	x nije element skupa A
$\subseteq$	$A \subseteq B$	A je podskup skupa B
$\subset$	$A \subset B$	A je pravi podskup skupa B
$\cap$	$A \cap B$	presjek skupova A i B
$\cup$	$A \cup B$	unija skupova A i B
$\setminus$	$A \setminus B$	razlika skupova A i B
$\times$	$A \times B$	Kartezijev produkt skupova A i B
(a, b)		uređeni par brojeva a i b
$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$	znak implikacije. Iz A slijedi B
$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$	znak ekvivalencije. Iz A slijedi B i iz B slijedi A
$\forall$	$(\forall a)(a \in S)$	univerzalni kvantifikator. Za svako a koje je u S
$\mid\ \mid$	$\mid x \mid$	apsolutna vrijednost broja x
$D(f)$		domena funkcije f
$\mathrm{Im}\, f$		slika funkcije f
(a_n)		niz realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots$; funkcija s $\mathbb{N}$ u skup $\mathbb{R}$ koja elementu n pridružuje a_n
$\circ$	$f \circ g$	kompozicija funkcija f i g (najprije g pa onda f)
f^{-1}		inverzna funkcija funkcije f
$\sup$	$\sup A$	supremum skupa A
$\inf$	$\inf A$	infimum skupa A
$\vert_a^b$	$F(x) \mid \vert_a^b$	razlika $F(b) - F(a)$
$\int_a^b$	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a, b]$
$<$	$a < b$	a je strogo manje od b
$\leq$	$a \leq b$	a manje ili jednako b
$\approx$	$a \approx b$	a je približno jednako b
$\sum$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	zbroj brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$\rightarrow$	$f : D \rightarrow K$	funkcija sa skupa D u skup K
	$a_n \rightarrow a$	niz realnih brojeva (a_n) konvergira broju a
$\mapsto$	$x \mapsto f(x)$	funkcija koja elementu x pridružuje $f(x)$
$n!$		faktorijele, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$
$\binom{n}{k}$		binomni koeficijent, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

b) Slova sa stalnim značenjem

$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup cijelih brojeva
$\mathbb{Q}$	skup racionalnih brojeva
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{R}_+$	skup svih strogo pozitivnih realnih brojeva
$\mathbb{R}^n$	Kartezijev produkt $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	skup kompleksnih brojeva
Ω	otvoren skup

c) Grčki alfabet

A	α	alfa	I	ι	jota	P	ρ	ro
B	β	beta	K	κ	kapa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gama	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mi	Υ	υ	ipsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	ni	Φ	ϕ	fi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	ksi	X	χ	hi
H	η	eta	O	o	omikron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Velika slova identična latiničnim: A,B,E,Z,H,I,K,M,N,O,P,T,X čitamo kao slova latinice. Malo slovo omikron ne razlikuje se od latiničnog o. Za slova ϵ, θ, ρ i ϕ koristimo varijante ε, ϑ, ϱ i φ.

1. BROJEVI

I danas mnogi matematičari smatraju da je broj ne samo povijesni začetak matematike već i njena najdublja osnova. Čak je i primitivni čovjek bio primoran da broji ljude u svojoj grupi, predmete koje posjeduje, stada, neprijatelje itd. Stari „problem” što je starije, kokoš ili jaje, ostavljamo filozofima.

1.1 Prirodni brojevi

Od djetinjstva nas prate tzv. **prirodni brojevi** $1, 2, 3, \ldots$. Skup svih prirodnih brojeva označavamo s $\mathbb{N}$ [1], tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Prirodne brojeve znamo zbrajati i množiti, a rezultat tih računskih operacija je opet prirodan broj pa kažemo da je skup $\mathbb{N}$ **zatvoren** s obzirom na te operacije.

Poznato je da su stari Egipćani i Babilonci (3000 god.pr.n.e) znali zbrajati i množiti prirodne brojeve. Dijeljenje nisu poznavali premda su u izvjesnom smislu koristili razlomke.

Sa skupom prirodnih brojeva i nekim njegovim svojstvima upoznali ste se u osnovnoj i srednjoj školi. Sve to je bilo prirodno i razumljivo, ali ne i aksiomatski utemeljeno. Čitava stvar se može aksiomatizirati, tj. izložiti sustav aksioma koji u cjelosti karakterizira skup $\mathbb{N}$ i omogućava aksiomatsku izgradnju algebre prirodnih brojeva. To je 1889. učinio talijanski matematičar G. Peano (1858 − 1931). Mi navodimo samo onaj Peanov aksiom na kome se bazira važna metoda dokazivanja poznata pod nazivom matematička ili potpuna indukcija.

Peanov aksiom:

Ako je $\mathbf{M}$ podskup od $\mathbb{N}$ i ako vrijedi:
(i) $1 \in \mathbf{M}$
(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (n \in \mathbf{M} \Rightarrow n + 1 \in M)$
onda je $\mathbf{M} = \mathbb{N}$.

[1] Početno slovo lat. riječi *naturalis* = prirodan.

Neka je T_n tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n i $\mathbf{M}$ skup svih prirodnih brojeva n za koje je tvrdnja T_n istinita. Kao posljedicu Peanovog aksioma dobivamo:

Princip matematičke indukcije:

Ako za tvrdnju T_n (koja ovisi o prirodnom broju n) vrijedi:
(i) Tvrdnja T_1 je istinita,
(ii) Iz istinitosti tvrdnje T_n proizlazi istinitost tvrdnje T_{n+1},
onda je tvrdnja T_n istinita za svaki prirodni broj n.

U sljedećim primjerima $\mathbf{M}$ označava skup svih prirodnih brojeva za koje je tvrdnja istinita.

Primjer 1.1 *Pokažimo metodom matematičke indukcije da vrijedi:*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Budući da je $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, skupu $\mathbf{M}$ pripada broj 1. Pretpostavimo da skupu $\mathbf{M}$ pripada broj n, tj. da je $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ i dodajmo lijevoj i desnoj strani prirodni broj $n + 1$. Dobivamo:

$$(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2},$$

tj. skupu $\mathbf{M}$ pripada $n+1$ pa je prema principu matematičke indukcije $\mathbf{M}=\mathbb{N}$, tj. tvrdnja je istinita za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.2 *Dokažimo da za svaki realan broj $x > -1$ i za svaki prirodni broj n vrijedi* **Bernoullijeva nejednakost***:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Iz $(1+x)^1 = 1+x$ slijedi $1 \in \mathbf{M}$. Neka je $(1+x)^n \geq 1+nx$, tj. $n \in \mathbf{M}$. Prema pretpostavci je $1 + x > 0$ pa je

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2,$$

odakle je (zbog $nx^2 \geq 0$) $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$. Dakle $n + 1 \in \mathbf{M}$. Prema principu matematičke indukcije je $\mathbf{M} = \mathbb{N}$. Dakle, nejednakost vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Često je potrebno pokazati da je tvrdnja T_n istinita, ne za svaki prirodni broj n, već za sve cijele brojeve n koji su veći ili jednaki od cijelog broja n_0. I u ovom slučaju vrijedi gore navedeni princip matematičke indukcije ako se uvjet (i) zamijeni uvjetom:

Tvrdnja T_{n_0} je istinita.

Primjer 1.3 *Pokažimo matematičkom indukcijom da je broj* $5^n + 2^{n+1}$ *djeljiv*[2] *s* 3 *za* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$5^0 + 2^{0+1} = 3$, pa je tvrdnja istinita za $n = 0$. Pretpostavimo da je broj $5^n + 2^{n+1}$ djeljiv s 3, tj. da postoji prirodni broj k takav da je $5^n + 2^{n+1} = 3k$, i pokažimo da je tada i broj $5^{n+1} + 2^{(n+1)+1}$ djeljiv s 3.

$$5^{n+1} + 2^{(n+1)+1} = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot 5^n + 3 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n+1} = 2\left(5^n + 2^{n+1}\right) + 3 \cdot 5^n.$$

Iskoristimo li induktivnu pretpostavku dobivamo

$$5^{n+1} + 2^{(n+1)+1} = 2 \cdot 3 \cdot k + 3 \cdot 5^n = 3\,(2 \cdot k + 5^n)\,,$$

odakle zaključujemo da je $5^{n+1} + 2^{(n+1)+1}$ djeljiv s 3.

Primjer 1.4 *Pokažimo da za svaki prirodni broj* $n \geq 3$ *vrijedi* $2^n > 2n + 1$.

Za $n = 3$ je $2^3 = 8 > 2 \cdot 3 + 1$. Neka je $n \geq 3$ i $2^n > 2n + 1$. Iz te pretpostavke dobivamo:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(2n + 1) = 4n + 2 = 2n + 2n + 2 > 2n + 3 = 2(n + 1) + 1,$$

pa je tvrdnja istinita za svaki prirodni broj $n \geq 3$.

Zadaci za vježbu 1.1

Dokazati metodom matematičke indukcije da su sljedeće tvrdnje točne za svaki prirodni broj n:

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$,
2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$,
3. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$,
4. $3 + 4 + 5 + \cdots + (n + 2) = \frac{1}{2}n(n + 5)$,
5. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$,
6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2$,
7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$,
8. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n - 1)(2n) = \frac{1}{3}n(n + 1)(4n - 1)$,
9. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$,
10. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$,
11. $n! \geq 2^{n-1}$, gdje je[3] $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n - 1) \cdot n$,

[2] Kažemo da je a djeljiv s b ako postoji cijeli broj k takav da je $a = k \cdot b$.
[3] Funkciju $n \mapsto n!$ čitamo *en - faktorijela*, ž. rod.

12. Pomoću kalkulatora pronađite najmanji prirodni broj n_0 za koji je $\log n_0! > n_0$ i zatim dokažite da je $\log n! > n$ za svaki $n > n_0$,
13. $n^2 + n$ je djeljivo s 2,
14. $n^3 + 2n$ je djeljivo s 3,
15. $n(n+1)(n+2)$ je djeljivo s 6,
16. Uočite da je tvrdnja "$n^2 - n + 41$ je prost broj[4]" istinita za $n = 1, 2, \ldots, 40$ i neistinita za $n = 41$. Dakle, na osnovu nepotpune indukcije ne možemo prihvatiti istinitost neke tvrdnje.
17. Pokažite da tvrdnja
$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 2$$
ispunjava uvjet (ii) principa matematičke indukcije, a zatim uočite da je lažna za svaki prirodni broj n (vidi prvi *Primjer 1.1*).

1.2 Cijeli brojevi

U skupu $\mathbb{N}$ oduzimanje nije uvijek moguće. Tako npr. $n - n$ i $n - m$ nema smisla za $n, m \in \mathbb{N}$ i $n < m$. Da bi i ti izrazi imali smisla uvodimo 0 i negativne prirodne brojeve: $-1, -2, -3, \ldots$. Brojeve $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ nazivamo **cijelim brojevima,** a skup svih cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$, tj. $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Uočite da je skup $\mathbf{Z}$ zatvoren s obzirom na operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja.

Primjer 1.5 *Ako je n cijeli broj, onda je i $\frac{n^3-n}{6}$ cijeli broj.*

Budući da je $\frac{n^3-n}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$, od tri faktora $n-1, n, n+1$, barem je jedan paran i jedan od njih je sigurno djeljiv s 3, jer se radi o umnošku tri uzastopna cijela broja.

Primjer 1.6 *Zbroj kubova triju uzastopnih cijelih brojeva je djeljiv s 9.*

Iz $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2+2)$ zaključujemo da je dovoljno pokazati da je $n(n^2+2)$ djeljiv s 3. Dovoljno je razmotriti slučaj kada n nije djeljiv s 3, tj. kada je $n = 3k \pm 1$ gdje je $k \in \mathbf{Z}$. Tada je $n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3$.

Primjer 1.7 *Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu $x + y = xy$.*

Jednadžbu možemo zapisati u obliku $(x-1)(y-1) = 1$, odakle dobivamo dva cjelobrojna rješenja: $x = 0, y = 0$ i $x = 2, y = 2$.

[4]Prim broj ili prost broj je takav prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i samim sobom.

1.2.1 Brojevni sustavi

Za svaki prirodni broj m i za dani prirodni broj B jednoznačno su određeni cijeli brojevi q i r takvi da je $m = qB + r$, s tim da je $r \in \{0, 1, \ldots, B-1\}$. q je kvocijent, a r ostatak kod dijeljenja broja m brojem B.

Za dane prirodne brojeve m i $B \geq 2$ neka je:

$$m = m_1 B + b_0,\ m_1 = m_2 B + b_1,\ m_2 = m_3 B + b_2, \ldots, m_{n-1} = m_n B + b_{n-1}, m_n = 0 \cdot B + b_n,$$

gdje su $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n$ kvocijenti, a $b_0, b_1, b_2, b_{n-1}, b_n$ ostaci kod dijeljenja. Sada imamo:

$$\begin{aligned} m = m_1 B + b_0 &= (m_2 B + b_1) B + b_0 = m_2 B^2 + b_1 B + b_0 = \ldots = \\ &= b_n B^n + b_{n-1} B^{n-1} + \ldots + b_1 B + b_0. \end{aligned}$$

Dakle, broj m možemo na jedinstven način zapisati u obliku

$$m = b_n B^n + b_{n-1} B^{n-1} + \ldots + b_1 B + b_0,$$

gdje su $0 \leq b_0, b_1, \ldots, b_n < B$. Broj m pišemo u obliku:

$$m = b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_{0(B)}. \tag{1.1}$$

Brojevi $b_n, \ldots, b_0$ su **znamenke** broja m u **sustavu s bazom** B. Kažemo da je (1.1) zapis broja m u sustavu s bazom B. Sustav je **binarni**, ako je $B = 2$, **decimalni** ili **dekadski** ako je $B = 10$. Radi kratkoće zapisa umjesto $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_{0(10)}$ pišemo $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$.

Primjer 1.8 *Zapišimo broj* 253 *u sustavu s bazom* $B = 8$.

$$253 = 31 \cdot 8 + 5 \Rightarrow b_0 = 5, \quad 31 = 3 \cdot 8 + 7 \Rightarrow b_1 = 7, \quad 3 = 0 \cdot 8 + 3 \Rightarrow b_2 = 3.$$

Dakle, $253 = 375_{(8)}$.

Primjer 1.9 *Zapišimo broj* 253 *u binarnom sustavu:*

$$\begin{array}{ll} 253 = 126 \cdot 2 + 1 \Rightarrow b_0 = 1, & 126 = 63 \cdot 2 + 0 \Rightarrow b_1 = 0, \\ 63 = 31 \cdot 2 + 1 \Rightarrow b_2 = 1, & 31 = 15 \cdot 2 + 1 \Rightarrow b_3 = 1, \\ 15 = 7 \cdot 2 + 1 \Rightarrow b_4 = 1, & 7 = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow b_5 = 1, \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow b_6 = 1, & 1 = 0 \cdot 2 + 1 \Rightarrow b_7 = 1. \\ 253 = 11111101_{(2)}. & \end{array}$$

Primjer 1.10 *Dokažimo da je prirodni broj m zapisan u dekadskom brojevnom sustavu djeljiv s 9 onda i samo onda kad mu je zbroj znamenki djeljiv s 9.*

Neka je $m = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0$ i zapišimo ga u obliku:

$$m = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1(10^1 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0).$$

Svaki od brojeva $(10^n - 1), (10^{n-1} - 1), \ldots, (10^1 - 1)$ je djeljiv s 9 pa je m djeljiv s 9 onda i samo onda kad mu je zbroj znamenki $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0)$ djeljiv s 9.

Zadaci za vježbu 1.2

1. Pokažite primjerom da oduzimanje cijelih brojeva nije komutativna operacija.
2. Pokažite primjerom da oduzimanje cijelih brojeva nije asocijativna operacija.
3. Da li je skup $\{-2, -4, -6, \ldots\}$ zatvoren s obzirom na operacije: a) zbrajanja, b) oduzimanja, c) množenja?
4. Da li je skup $\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$ zatvoren s obzirom na operacije: a) zbrajanja,
   b) oduzimanja, c) množenja, d) dijeljenja?
5. Dokazati da je prirodni broj zapisan u dekadskom brojevnom sustavu djeljiv s 3 onda i samo onda kad mu je zbroj znamenki djeljiv s 3.
6. Dokazati da je $m^3 - m$ djeljivo s 6 za svaki $m \in \mathbf{Z}$.
7. Dokazati da je $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ cijeli broj za svaki $m \in \mathbf{Z}$. Uputa: $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{(m+1)^3-(m+1)}{6}$.
8. Odrediti sve cijele brojeve m za koje je $\frac{2m+3}{5m+1}$ cijeli broj. Uputa: $x = \frac{2m+3}{5m+1}$, $5x = \frac{10m+15}{5m+1} = 2 + \frac{13}{5m+1}$.
9. Dokazati da je broj $n = 3^{105} + 4^{105}$ djeljiv s $13, 49, 181, 379$. Uputa: Za neparan n je
   $$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}\right).$$
   Iz $n = \left(3^3\right)^{35} + \left(4^3\right)^{35}$ zaključujemo da je n djeljiv s $3^3 + 4^3 = 91 = 13 \cdot 7$. Preostali slučaji se dokazuju slično.
10. Dokazati da jednadžba $3x^2 - 4y^2 = 13$ nema cjelobrojna rješenja. Uputa: Zamijetite da x, da bi bio cjelobrojno rješenje te jednadžbe, mora biti neparan broj i da tu jednadžbu možemo zapisati u obliku $3(x-1)(x+1) - 4y^2 = 10$. Nadalje, $(x-1)(x+1)$ je produkt uzastopnih parnih brojeva i djeljiv je s 4.
11. Zapisati broj 253 u sustavu s bazom a) $B = 3$, b) $B = 8$.
12. Prirodan broj $m = 2301_{(4)}$ zapisati u sustavu s bazom $B = 5$.

1.3 Racionalni brojevi

Jednadžba $ax = b$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}$, nema uvijek rješenje u skupu $\mathbb{Z}$ pa se ukazuje potreba za njegovim proširenjem, uvodimo **racionalne**[5] brojeve. Skup svih racionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{Q}$ i definiramo s $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Cijeli broj m može se reprezentirati razlomkom $\frac{m}{1}$, pa racionalni brojevi sadrže cijele, a ovi prirodne, tj. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

U skupu racionalnih brojeva sve četiri osnovne računske operacije izvodljive su bez ograničenja, osim dijeljenja s nulom.

Za racionalan broj q kažemo da je **decimalan razlomak** ako se može zapisati u obliku:

$$q = \pm(a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + a_m \cdot 10^{-m}),$$

gdje je $a_0 = 0$ ili $a_0 \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $i = 1, \ldots, m$, i pišemo ga u obliku: $q = \pm a_0.a_1a_2 \cdots a_m$. Tako su naprimjer:

$$\frac{1962}{1000} = 1 + \frac{9}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{2}{10^3} = 1.962\,; \quad \frac{1994}{100} = 19 + \frac{9}{10} + \frac{4}{10^2} = 19.94$$

decimalni razlomci.

Ako se razlomak $\frac{a}{b}$ ne može zapisati kao decimalni razlomak, tj. ako se dijeljenje $a : b$ ne završava, ali se određena skupina znamenki neprestano ponavlja, kažemo da je u pitanju **periodičan decimalni razlomak**. Broj $\frac{7}{22} = 0.31818181818\ldots$ je primjer periodičnog decimalnog razlomka. Nije teško pokazati da je svaki periodični decimalni razlomak ujedno racionalan broj.

Primjer 1.11 *Za koje cijele brojeve n je razlomak $\frac{3n+15}{n+2}$ cijeli broj?*

Iz $\frac{3n+15}{n+2} = 3 + \frac{9}{n+2}$ zaključujemo da mora biti $n + 2 \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$ odnosno $n \in \{-11, -5, -3, -1, 1, 7\}$.

Primjer 1.12 *Zapišimo u obliku razlomka decimalni razlomak $q = 0.363636\ldots$*

Množeći s 100 dobivamo $100q = 36.3636\ldots$. Oduzimanjem broja q dobivamo $99q = 36$, odnosno $q = \frac{4}{11}$.

[5]Lat. *ratio* = omjer,odnos.

Zadaci za vježbu 1.3

1. Pokažite primjerom da a) oduzimanje, b) dijeljenje racionalnih brojeva nije komutativna operacija.
2. Pokažite primjerom da a) oduzimanje, b) dijeljenje racionalnih brojeva nije asocijativna operacija.
3. Pokazati da nema susjednih racionalnih brojeva, tj. da se između bilo koja dva racionalna broja $\frac{m_1}{n_1}$ i $\frac{m_2}{n_2}$ nalazi barem jedan racionalan broj (dakle, i beskonačno mnogo).

   Uputa: Neka je s aritmetička sredina brojeva $\frac{m_1}{n_1}$ i $\frac{m_2}{n_2}$ i $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$. Pokažite da je $s \in \mathbb{Q}$. Uočite da je $s = \frac{m_1}{n_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_2}\right)$, odakle je $\frac{m_1}{n_1} < s$. Slično se pokaže da je $s < \frac{m_2}{n_2}$.
4. Naći 5 racionalnih brojeva između $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{10}$.
5. Da li je $\frac{605}{121} \in \mathbb{N}$? Da li je $\frac{121}{605} \in \mathbb{N}$? Da li je $\frac{83}{42} \in \mathbb{N}$?
6. Riješiti jednadžbe: a) $\frac{2}{5} + x = \frac{3}{4}$, b) $\frac{3}{7}x = \frac{6}{5}$
7. Zapisati u obliku razlomka periodične decimalne razlomke: a) $q = 2.363636\ldots$, b) $q = 0.361361361\ldots$.

1.4 Iracionalni brojevi

Na prvi pogled nam se čini da nema potrebe posezati za novim brojevima. Jednostavni primjeri kao npr. duljina dijagonale ($\sqrt{2}$) kvadrata stranice jedan govore nam da postoje brojevi koji nisu racionalni. To su **iracionalni brojevi**[6].

Iracionalne brojeve možemo definirati i kao neperiodične decimalne razlomke s beskonačno mnogo znamenki. Skup svih iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbf{I}$. Brojevi $\sqrt{2} = 1.414213562...$, $\pi = 3.14159265...$ su primjeri iracionalnih brojeva.

Primjer 1.13 *Pokažimo da su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{6}$ iracionalni brojevi.*

Dovoljno je pokazati da ne postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, tj. da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ i da je najveća zajednička mjera brojeva m, n jednaka 1. Tada bi kvadriranjem dobili $2n^2 = m^2$, odakle bi slijedilo da je m^2 pa i m paran broj. Neka je $m = 2k$. Iz $2n^2 = m^2$ dobivamo $2n^2 = 4k^2$, odnosno $n^2 = 2k^2$, tj. n^2 je paran broj pa je prema tome i n paran broj. Tada bi za najveću zajedničku mjeru $M(m, n)$ brojeva m, n vrijedilo $M(m, n) \geq 2$, što je u suprotnosti s pretpostavkom $M(m, n) = 1$. Dakle, $\sqrt{2}$ je iracionalan broj. Na sličan način se dokaže da su $\sqrt{3}$ i $\sqrt{6}$ iracionalni brojevi.

[6] Lat *in*=ne + *ratio*.

Primjer 1.14 *Broj* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *je iracionalan.*

Pretpostavimo da je $q=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionalan broj, tj. da je $q \in \mathbb{Q}$. Kvadriranjem dobivamo $5+2\sqrt{6}=q^2$, pa je $\sqrt{6}=\frac{q^2-5}{2}$. Budući da je $\sqrt{6} \in \mathbf{I}$, a $\frac{q^2-5}{2} \in \mathbb{Q}$, dolazimo do proturječja.

Zadaci za vježbu 1.4

1. Ako je a racionalan broj, a b iracionalan broj, da li može biti a) zbroj, b) razlika, c) produkt, d) kvocijent tih brojeva racionalan broj?
2. Neka su $a \neq 0$ i b racionalni brojevi, a s iracionalan broj. Dokazati da je $x=as+b$ iracionalan broj.
3. Dokazati da je $\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}$ iracionalan broj ako su $p_1,\ldots,p_n$ različiti prosti brojevi.
4. Ako prirodni broj n nije m-ta potencija nekog prirodnog broja, onda je $\sqrt[m]{n}$ iracionalan broj.

   Rješenje: Pretpostavimo da je $\sqrt[m]{n}=\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $M(p,q)=1$ i da su $p=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}$ i $q=q_1^{l_1}q_2^{l_2}\cdots q_s^{l_s}$ rastavi brojeva p i q na proste faktore. Kako je $M(p,q)=1$, to je $p_i \neq q_j$ za sve $i \in \{1,\ldots,t\}$ i $j \in \{1,\ldots,s\}$ i $p^m=p_1^{n_1 m}\cdots p_t^{n_t m}$ ne sadrži ni jedan prost faktor q_j. S druge strane, potenciranjem se dobiva $p^m=nq_1^{l_1 m}\cdots q_s^{l_s m}$, odakle slijedi da p^m sadrži prost faktor q_j. Dakle, $\sqrt[m]{n}$ je iracionalan broj.

1.5 Realni brojevi

Racionalne i iracionalne brojeve nazivamo zajedničkim imenom **realni brojevi**[7] i označavamo s $\mathbb{R}$. Dakle, $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbf{I}$. Osim toga je $\mathbf{I}\cap\mathbb{Q}=\emptyset$ i $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

U skupu realnih brojeva definirane su operacije zbrajanje $(+)$ i množenje $(\cdot)$, tj. za svaka dva realna broja x i y jednoznačno su određeni realni brojevi $x+y$ i $x\cdot y$. Te operacije imaju sljedeća svojstva:

1A Za sve $x,y,z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x+y)+z=x+(y+z)$ (*zakon asocijacije za zbrajanje*).

2A Postoji samo jedan realan broj $0 \in \mathbb{R}$ (neutralni element za zbrajanje-**nula**) takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x+0=0+x=x$.

3A Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji samo jedan $-x \in \mathbb{R}$ (inverzni element s obzirom na zbrajanje) takav da je $x+(-x)=(-x)+x=0$.

4A Za sve $x,y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x+y=y+x$ (*zakon komutacije za zbrajanje*).

5A Za sve $x,y,z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(xy)z=x(yz)$ (*zakon asocijacije za množenje*).

[7] Lat. *res* = stvar.

6A Postoji samo jedan realan broj $1 \in \mathbb{R}$ (neutralni element za množenje-**jedan**) takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

7A Za svaki $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, postoji jedinstven element $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ (inverzni element za množenje) takav da je $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

8A Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $xy = yx$ (*zakon komutacije za množenje*).

9A Za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $x(y + z) = xy + xz$ (*zakon distribucije množenja prema zbrajanju*).

Općenito, uređenu trojku $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, koju čine proizvoljan neprazan skup $\mathbb{R}$, binarne operacije $(+)$ i $(\cdot)$ koje imaju prethodnih devet svojstava nazivamo **polje**.

Sva navedena svojstva ima i skup $\mathbb{Q}$, tj. skup racionalnih brojeva je polje. Skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja nisu polja.

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je uređen, tj. bilo koja dva njegova elementa se mogu usporediti. Pri tome za uređaj vrijedi:

10A Za bilo koja dva realna broja $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$.

11A $x \leq y$ i $y \leq x$, onda i samo onda ako je $x = y$.

12A Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$.

13A Ako je $(x \leq y)$, onda za svaki $z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x + z \leq y + z)$.

14A $(0 \leq x \text{ i } 0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq xy)$.

Kažemo da je neprazan skup **R uređeno polje** kad god operacije zbrajanja $(+)$ i množenja $(\cdot)$ imaju prethodno navedenih 14 svojstava. Zamijetite da je i skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva uređeno polje s obzirom na uobičajeno zbrajanje i množenje, dok skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu.

Primjer 1.15 *Neka su x, y, z realni brojevi i dokažimo sljedeće tvrdnje:*

$$\begin{aligned}
&\text{a) } x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0\,,\\
&\text{b) } x \leq 0 \ i \ y \geq 0 \ \text{ povlači } \ xy \leq 0\,,\\
&\text{c) } x \leq 0 \ i \ y \leq 0 \ \text{ povlači } \ xy \geq 0\,,\\
&\text{d) } x \leq y \ i \ z \geq 0 \ \text{ povlači } \ zx \leq zy\,,\\
&\text{e) } x \leq y \ i \ z \leq 0 \ \text{ povlači } \ zx \geq zy\,.
\end{aligned}$$

Krenimo redom. Prema svojstvu 13A, $x \leq 0 \Leftrightarrow x + (-x) \leq 0 + (-x)$, tj. $x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -x$. Prva tvrdnja je dokazana. U slučaju tvrdnje b), prema tvrdnji a) je $-x \geq 0$, pa iz svojstva 14A dobivamo $0 \leq (-x)y = -(xy)$. Ponovnom primjenom tvrdnje a) slijedi tvrdnja b). Slično se dokaže tvrdnja c). Iz $x \leq y$ i svojstva 13A dobivamo $x + (-x) \leq y + (-x)$, tj. $0 \leq y - x$. No $z \geq 0$ i svojstvo 14A daju $z(y - x) \geq 0$. Tada je $zy - zx \geq 0$, pa primjenom svojstva 13A slijedi tvrdnja d). Dokažimo zadnju tvrdnju. Prema tvrdnji b) je $z(y - x) \leq 0$, odakle je $zy \leq zx$.

Primjer 1.16 *U ovom primjeru želimo ukazati na čestu grešku.*

Pravilno:	$-2x < 4\,/\cdot(-1/2)\ \Rightarrow x > -2$
Nepravilno:	$-2x < 4\,/\cdot(-1/2)\ \Rightarrow x < -2$

Vidi tvrdnju e) iz prethodnog primjera.

1.5.1 Intervali

Najčešće upotrebljavani skupovi u matematičkoj analizi su intervali. To su skupovi realnih brojeva koji imaju svojstvo da njihovi elementi zadovoljavaju određene nejednakosti.

Otvoreni interval realnih brojeva $< a, b >$, određen s dva realna broja $a, b,\ a < b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$, tj.

$$< a, b >= \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a < x < b\}\,.$$

Zatvoreni interval ili **segment** realnih brojeva $[a, b]$, određen s dva realna broja $a, b,\ a \leq b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leq x \leq b$, tj.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a \leq x \leq b\}\,.$$

Pored otvorenih i zatvorenih intervala definiraju se i skupovi

$$< a, b] = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a < x \leq b\}\,,\ [a, b >= \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad a \leq x < b\}\,,$$

$$< -\infty, a >= \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x < a\}\,,\ < -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \leq a\}\,,$$

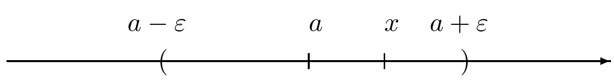
$$< a, \infty >= \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x > a\}\,,\ [a, \infty >= \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad x \geq a\}\,.$$

1.5.1.1 Okolina

Otvorenom okolinom realnog broja a nazivamo svaki otvoreni interval realnih brojeva koji sadrži broj a.

Primjer 1.17 $< 0, 3 >,\ < 0, 2.99 >,\ < 1, 2.1 >,\ < -1, 10 >$ *su neke od otvorenih okolina broja 2.*

Simetrična okolina realnog broja a je okolina kojoj je a sredina.



Slika 1.1.

Sve simetrične okoline broja a su oblika

$$< a - \varepsilon, a + \varepsilon >,$$

gdje je $\varepsilon > 0$. Tu okolinu nazivamo ε – **okolinom** broja a. Duljina te ε – okoline je 2ε. Zamijetite da realan broj x pripada toj ε – okolini onda i samo onda ako je $| x - a |< \varepsilon$.

1.5.2 Supremum i infimum

Skup $S \subset \mathbb{R}$ je **odozgo** [**odozdo**] **omeđen** ili **ograničen**, ako postoji realan broj M [m] takav da je $x \leq M$ [$x \geq m$] za svako $x \in S$.

Svaki broj M [m] s navedenim svojstvom nazivamo **majoranta** ili **gornja međa** [**minoranta** ili **donja međa**] skupa S.

Ako skup S nije odozgo [odozdo] omeđen kažemo da je **odozgo** [**odozdo**] **neomeđen**. Skup S je **omeđen**, ako je odozdo i odozgo omeđen. U protivnom se kaže da je S **neomeđen**.

Primjer 1.18 *Skup* $\mathbb{N}$ *svih prirodnih brojeva nije odozgo omeđen jer za svaki realan broj M postoji prirodan broj veći od M. Skup* $\mathbb{N}$ *je omeđen odozdo; za minorantu je dovoljno uzeti bilo koji realan broj manji ili jednak jedan.*

Primjer 1.19 *Skupovi* $< a, b >$, $[a, b]$, $< a, b]$, $[a, b >$ *su omeđeni, a skupovi* $< -\infty, a >$, $< -\infty, a]$ *su omeđeni odozgo dok su skupovi* $< a, \infty >$, $[a, \infty >$ *omeđeni odozdo.*

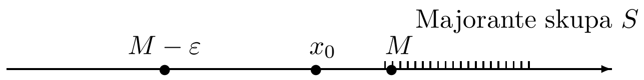
Svaki odozgo [odozdo] omeđen skup S ima majorantu M [minorantu m]. Tada je i svaki realan broj $M' > M$ [$m' < m$] majoranta [minoranta] skupa S, pa se postavlja pitanje najmanje [najveće] majorante [minorante] skupa S.

Realan broj M [m] nazivamo **supremum** [**infimum**] skupa S ako ima sljedeća dva svojstva (*Slika 1.2*):

i) M [m] je majoranta [minoranta] od S, tj. $x \leq M$ [$x \geq m$] za svako $x \in S$;

ii) M [m] je najmanja majoranta [najveća minoranta] od S, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x_0$ [$m + \varepsilon > x_0$].

Supremum skupa S označavamo s $M = \sup S$, a infimum skupa S označavamo s $m = \inf S$. Ako je $\sup S \in S$ [$\inf S \in S$] nazivamo ga **maksimalnim** [**minimalnim**] elementom skupa S i označavamo s $\max S$ [$\min S$].



Slika 1.2.

Primjer 1.20 $\sup\ < a,b >= b \notin < a,b >$, $\sup\ [a,b] = b = \max\ ([a,b]) \in [a,b]$, $\inf\ < a,b >= a \notin < a,b >$, $\inf\ [a,b] = a = \min\ ([a,b]) \in [a,b]$.

Iz prethodnog primjera se vidi da $\sup\ S$ i $\inf\ S$ mogu ali ne moraju pripadati skupu S.

Navedimo sljedeće važno svojstvo skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$:

15A Svaki odozgo [odozdo] omeđen skup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum [infimum] u $\mathbb{R}$.

Kaže se da je $\mathbb{R}$ **potpuno uređeno polje** kad god mislimo na skup $\mathbb{R}$ s navedenih 15 svojstava. Važna posljedica prethodnog svojstva je

Primjer 1.21 *(**Arhimedov teorem**) Ako je $x \in \mathbb{R}$ i $x > 0$, onda za svaki $y \in \mathbb{R}$ postoji prirodan broj n takav da je $nx > y$.*

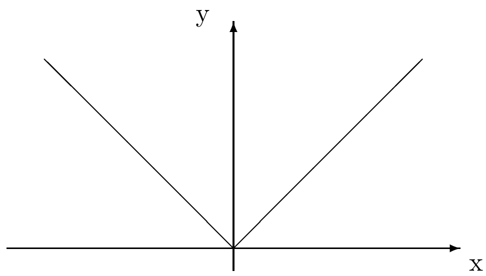
Za $y \leq 0$ tvrdnja je točna jer je $1 \cdot x > 0 \geq y$. Neka je $y > 0$ i pretpostavimo da je $nx \leq y$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je skup $S = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ omeđen odozgo. Neka je $M = \sup S$. Prema definiciji supremuma, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedilo bi $(n+1)x \leq M$, odakle je $nx \leq M - x$. Iz posljednje nejednakosti dobivamo da je $M - x$ gornja međa skupa S, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je M najmanja gornja međa skupa S.

1.5.3 Apsolutna vrijednost realnog broja

Ako je x realan broj tada je jedan od brojeva x, $-x$ nenegativan i nazivamo ga apsolutna vrijednost od x.

Apsolutnu vrijednost realnog broja x, u oznaci $\mid x \mid$, definiramo s:

$$\mid x \mid = \begin{cases} \ \ x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



Slika 1.3. Graf funkcije $x \mapsto |\, x \,|$

Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:

1) $\mid -x \mid = \mid x \mid$	2) $x \leq \mid x \mid$
3) $\mid xy \mid = \mid x \mid\mid y \mid$	4) $\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert = \dfrac{\mid x \mid}{\mid y \mid}$
5) $\mid x+y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$	6) $\mid x-y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$
7) $\mid x \mid \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$	8) $\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \leq \mid x-y \mid$.

Tvrdnje 1. i 2. slijede neposredno iz definicije. Tvrdnje 3. i 4. se lako dokažu tako da se provjeri njihova istinitost u sljedeća četiri slučaja:

$$1.\ x \geq 0,\ y \geq 0\ \ 2.\ x \geq 0,\ y \leq 0\ \ 3.\ x \leq 0,\ y \geq 0\ \ 4.\ x \leq 0,\ y \leq 0.$$

Dokažimo tvrdnju 5 (**nejednakost trokuta**): $\mid x+y \mid = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+2xy+y^2}$ $\leq \sqrt{x^2+2 \mid x \mid\mid y \mid + y^2} = \sqrt{(\mid x \mid + \mid y \mid)^2} = \mid x \mid + \mid y \mid$. Tvrdnja 6 slijedi iz tvrdnje 1 i tvrdnje 5. Dokažimo tvrdnju 7: Prema tvrdnji 2. je $-x \leq \mid -x \mid = \mid x \mid$,tj. $x \geq - \mid x \mid$. Pomoću iste tvrdnje dobivamo $- \mid x \mid \leq x \leq \mid x \mid$, pa

$$\mid x \mid \leq a \Rightarrow -a \leq - \mid x \mid \leq x \leq \mid x \mid \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

Obratno, iz $-a \leq x \leq a$ u slučaju $x \geq 0$ slijedi $\mid x \mid = x \leq a$, odnosno $\mid x \mid = -x \leq a$ za $x < 0$.
Dokažimo posljednju tvrdnju: Primjenom nejednakosti trokuta dobivamo

$$\mid x \mid = \mid (x-y)+y \mid \leq \mid x-y \mid + \mid y \mid, \quad \text{tj.}$$

$$\mid x \mid - \mid y \mid \leq \mid x-y \mid .$$

Zamjenom x s y i obratno imamo

$$\mid y \mid - \mid x \mid \leq \mid x-y \mid .$$

Jedan od brojeva $\mid x \mid - \mid y \mid$, $\mid y \mid - \mid x \mid$ je $\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid$, pa je stoga $\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \leq \mid x-y \mid$. Tako je dokazana tvrdnja 8.

Primjer 1.22 *Riješimo jednadžbu* $| 3x - 1 | = 2x + 5$.

a) za $x \geq \frac{1}{3}$ vrijedi	b) za $x < \frac{1}{3}$ vrijedi
$3x - 1 = 2x + 5$	$1 - 3x = 2x + 5$
$x = 6$	$x = -\frac{4}{5}$

Primjer 1.23 *Riješimo nejednadžbu* $| 3x - 1 | < 2x + 5$

Zamijetite da mora biti $2x + 5 \geq 0$. Pomoću svojstva 7 dobivamo

$$| 3x - 1 | < 2x + 5 \Leftrightarrow -2x - 5 < 3x - 1 < 2x + 5 \Leftrightarrow -4 < 5x \text{ i } x < 6 \Leftrightarrow x \in < -\frac{4}{5}, 6 > .$$

Zadaci za vježbu 1.5

1. Stavite znak $<$, $>$ ili $=$ unutar $\square$:

a) $\frac{2}{3} \square\ 0.67$	b) $\frac{2}{3} \square\ 0.66$	c) $\frac{1}{3} \square\ 0$	d) $0.125 \square\ \frac{1}{8}$
e) $\pi \square\ 3.14$	f) $\sqrt{2} \square\ 2.14$	g) $-1 \square\ -1.2$	h) $\sqrt{2} \square\ 1.142$.

2. Mjesečne potrebe za život jednog domaćinstva iznose 10 000 NJ. Od ukupnog prihoda 30% treba odvojiti za režije. Koliki mora biti minimalni mjesečni prihod domaćinstva ako domaćica od novca preostalog nakon plaćanja režija želi uštedjeti 10%?

   Uputa: Neka je x mjesečni prihod domaćinstva. Nakon plaćanja režija preostaje $x - 0.3x = 0.7x$ NJ, od čega se želi uštedjeti $0.1(0.7x) = 0.07x$ NJ. Iz $0.7x \geq 10000 + 0.07x$ dobivamo $x \geq 15873.02$ NJ.

3. **Fiksni troškovi** proizvodnje(troškovi neovisni o kapacitetu proizvodnje) neke robe iznose 1525 NJ. Proizvodnja jedne jedinice robe stoji 5 NJ. Koliko se jedinica robe mora proizvesti da bi se ostvario profit ako se jedinica robe prodaje za 7.5 NJ?

   Uputa:

Ukupni troškovi=Varijabilni troškovi + Fiksni troškovi,

   gdje varijabilni troškovi predstavljaju troškove proizvodnje jedne jedinice robe. Ukupni troškovi su $5x + 1525$, gdje je x broj jedinica proizvedene robe.

Ukupni prihod=(Prodajna cijena jedne jedinice robe)(Broj jedinica prodane robe).

   Profit se javlja kada ukupni prihod premašuje ukupne troškove, tj. kada je $7.5x > 5x + 1525$, odakle dobivamo da mora biti $x > 610$.

4. Pokazati:

a) $\sup\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$	b) $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$
c) $\sup\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$	d) $\inf\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = -1$
e) $\sup\{\frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$	f) $\inf\{\frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\} = 0$
g) $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} = \sqrt{2}$	h) $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} = -\sqrt{2}$.

Da li je supremum[infimum] maksimalan[minimalan] element?

5. Pokazati:

a) $x \in [2,4] \Rightarrow 2x+3 \in [7,11]$ b) $x \in [2,4] \Rightarrow \dfrac{1}{2x+3} \in [1/11, 1/7]$
c) $x-5 \in [-2,2] \Rightarrow x \in [3,7]$ d) $x \in [x_0-a, x_0+a] \Leftrightarrow \mid x-x_0 \mid \leq a$.

6. Riješiti jednadžbe i nejednadžbe:

a) $\mid x+1 \mid = 3x-9$ b) $\mid x-1 \mid = 3x-9$
c) $\mid 3x-1 \mid < 2x+5$ d) $\mid 3x+1 \mid > 2x+5$.

7. Pokazati:

a) $\mid x-3 \mid < 1 \Rightarrow 6 < x+4 < 8$ b) $\mid x-3 \mid < 1 \Rightarrow 1/8 < 1/(x+4) < 1/6$
c) $\mid x-1 \mid < 2 \Rightarrow 0 < \mid 2x-3 \mid < 5$ d) $\mid x-1 \mid < 1 \Rightarrow x \in < -1, 3 >$.

8. Otkrijte gdje je greška:

$$
\begin{aligned}
x &= 2\\
3x &= 2x+2\\
x^2+3x &= x^2+2x+2\\
x^2+3x-10 &= x^2+2x-8\\
(x-2)(x+5) &= (x-2)(x+4)\\
x+5 &= x+4\\
5 &= 4.
\end{aligned}
$$

1.6 Kompleksni brojevi

Kvadrat bilo kojeg realnog broja je nenegativan, pa stoga jednadžbe kao npr. $x^2 = -1$ nemaju rješenje u skupu realnih brojeva. I mnogi drugi problemi vode na potrebu za proširenjem skupa realnih brojeva do novog skupa brojeva $\mathbb{C}$ koji će sadržavati skup $\mathbb{R}$ i u kojem će svaka jednadžba oblika

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdje su $a_n, \ldots, a_1, a_0$ bilo koji realni brojevi, imati rješenje.

G. Cardano[8], rješavajući jedan geometrijski problem, dobio je jednakost:

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right) = 40$$

iz koje se vidi da je produkt „nerealnih brojeva” realan broj.

Što više, polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ se može ”uroniti” u novo polje $(\mathbb{C}, +, \cdot)$-**polje kompleksnih brojeva** u kojem će svaka jednadžba oblika

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

[8] Talijanski matematičar, 1501–1576.

gdje su $a_n, \ldots, a_1, a_0$ bilo koji kompleksni brojevi, imati rješenje[9].

Razmotrimo intuitivan pristup izgradnji polja $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Kao prvo, skup $\mathbb{C}$ mora sadržavati skup $\mathbb{R}$. Nadalje, operacije zbrajanja i množenja moraju biti tako definirane da su to na skupu $\mathbb{R}$ upravo zbrajanje i množenje realnih brojeva. Zbog tog nastavljamo koristiti simbole $(+)$ i $(\cdot)$ za te operacije. Želimo da svaka jednadžba oblika $x^2 = -a$, gdje je a pozitivan realan broj, ima rješenje u skupu $\mathbb{C}$. Za $a = 1$ to znači da $\mathbb{C}$ mora sadržavati element i (**imaginarna jedinica**) takav da je $i^2 = -1$. Nadalje, za svaki $b \in \mathbf{R}$, zbog zatvorenosti skupa $\mathbb{C}$ s obzirom na operaciju množenja, je i $bi \in \mathbb{C}$. Slično, ako je $a \in \mathbb{R}$, zbog zatvorenosti s obzirom na operaciju zbrajanja, $\mathbb{C}$ mora sadržavati elemente oblika $a + bi$. Skup svih kompleksnih brojeva definiramo ovako:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Broj a zovemo **realni dio** i označavamo s $\operatorname{Re} z$, a broj b zovemo **imaginarni dio** kompleksnog broja $z = a + bi$ i označavamo s $\operatorname{Im} z$.

Primjer 1.24 $z = 2 - 4i$, $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = -4$.
$z = -\sqrt{2} + 4i$, $\operatorname{Re} z = -\sqrt{2}$, $\operatorname{Im} z = 4$.

Navedimo definiciju jednakosti kompleksnih brojeva:

$$\boxed{a + bi = c + di \qquad \text{onda i samo onda ako je } a = c \text{ i } b = d}$$

Uzmemo li u obzir da moraju vrijediti zakoni komutacije i asocijacije za zbrajanje te zakon distribucije množenja prema zbrajanju dobivamo[10]:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)(di) = ac + (bi)c + a(di) + (bi)(di) \\ &= ac + (bc)i + (ad)i + (bd)(i^2) = ac + (bd)(-1) + (ad)i + (bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Dakle, imamo sljedeća pravila za zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva:

Zbrajanje kompleksnih brojeva:

$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i}$$

Riječima: *Realan [imaginaran] dio zbroja jednak je zbroju realnih [imaginarnih] dijelova.*

[9]Za polje s tim svojstvom kažemo da je **zatvoreno polje**.

[10]U daljnjem tekstu, kao što je i uobičajeno, izostavljamo simbol za operaciju množenja.

Množenje kompleksnih brojeva:

$$\boxed{(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i}$$

Nemojte memorirati ovo pravilo. Zamijetite da se dva kompleksna broja množe kao dva binoma(„svaki sa svakim"), imajući na umu da je $i^2 = -1$.

Primjer 1.25 *Izvršiti naznačene operacije:* a*)* $(2+3i)+(4-5i)$, b*)* $(2+3i)(3-2i)$.

a) $(2+3i)+(4-5i) = (2+4)+(3-5)i = 6-2i$
b) $(2+3i)(3-2i) = (2\cdot 3 - 3\cdot(-2)) + (2\cdot(-2)+3\cdot(3))i = 12+5i$

Zamijetite:

$$\boxed{\text{Za svaki pozitivan } a \in \mathbb{R} \text{ imamo: } \sqrt{-a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = \pm i\sqrt{a}.}$$

Primjer 1.26 *U ovom primjeru želimo ukazati na čestu grešku.*

Pravilno: $\sqrt{-4}\sqrt{-4} = 2i2i = 4i^2 = 4(-1) = -4$
Nepravilno: $\sqrt{-4}\sqrt{-4} = \sqrt{(-4)(-4)} = \sqrt{16} = 4$

Pri tome kod računanja korijena uzimamo predznak $+$. Naime, formula $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ koja vrijedi za realne brojeve $a \geq 0$ i $b \geq 0$ nije točna kada su oba broja (a i b) negativna.

Za kompleksan broj $a-bi$ kažemo da je **kompleksno-konjugiran broj** broja $z = a+bi$ i označavamo ga sa $\bar{z}$ (čitaj: *ze potez* ili *ze nadvučeno*).

Primjer 1.27 $z = 2+\sqrt{5}i$, $\bar{z} = 2-\sqrt{5}i$; $\quad z = -2-\sqrt{5}i$, $\bar{z} = -2+\sqrt{5}i$.

Primjer 1.28 *Produkt kompleksnnog broja* $z = a+bi$ *s njemu kompleksno konjugiranim brojem* $\bar{z} = a-bi$ *je realan broj:*

$$z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2+b^2.$$

Realan broj $\mid z \mid = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$ nazivamo **modul, norma** ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja z.

Primjer 1.29 *Odredimo kompleksan broj* z *koji zadovoljava jednadžbu* $\mid z \mid + z = 2+i$.

Neka je $z = a+bi$. Tada jednadžba glasi $\sqrt{a^2+b^2}+a+bi = 2+i$, odakle prema definiciji jednakosti kompleksnih brojeva dobivamo: $\sqrt{a^2+b^2}+a = 2$ i $b = 1$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu $b = 1$ dobivamo $\sqrt{a^2+1}+a = 2$, odakle je $a = \frac{3}{4}$, tj. $z = \frac{3}{4}+i$.

Činjenicu da je produkt kompleksnog broja s njemu kompleksno konjugiranim brojem uvijek realan broj možemo iskoristiti za nalaženje inverznog elementa za množenje, odnosno za dijeljenje kompleksnih brojeva. Da bi se našao kvocijent $(a+bi)/(c+di)$, treba pomnožiti brojnik i nazivnik s $c-di$.

Primjer 1.30 *Zapisati u* **algebarskom obliku**$(a+bi;\ a,b \in \mathbb{R})$ *kompleksne brojeve* a) $\frac{1}{1+i}$ b) $\frac{3+2i}{5-i}$:

a) $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,$

b) $\frac{3+2i}{5-i} = \frac{3+2i}{5-i}\frac{5+i}{5+i} = \frac{15+3i+10i+2i^2}{25+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$

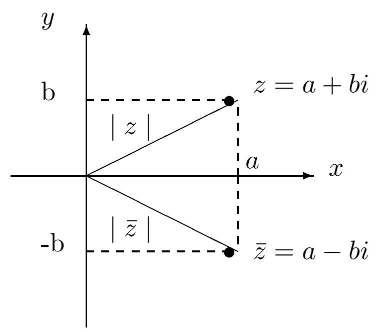
Provjerite da je skup svih kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ s navedenim operacijama zbrajanja i množenja jedno polje.

Skup svih kompleksnih brojeva oblika $a+0i$, tj. skup $\mathbb{R}' = \{a+0i \mid a \in \mathbb{R}\}$ zadovoljava sve aksiome 1A − 9A skupa realnih brojeva. Nadalje, uvede li se u skupu $\mathbb{R}'$ relacija uređaja s

$$[\,(a+0i) \leq (b+0i)\,] \Leftrightarrow (a \leq b)$$

tada navedeni skup zadovoljava sve aksiome 1A − 15A skupa realnih brojeva. Zbog toga realan broj a identificiramo s kompleksnim brojem $a+0i$ i na taj način je polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ „uronjeno" u polje $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Svakom kompleksnom broju $z = a+bi$ odgovara jedinstvena točka (a,b) i obrnuto svakoj točki (a,b) odgovara jedinstveni kompleksan broj $z = a+bi$. Ravninu u kojoj se svakom kompleksnom broju pridružuje točka nazivamo **Gaussova** ili **kompleksna ravnina** (*Slika 1.4*).



Slika 1.4.

Brojevi z i $\bar{z}$ simetrično su smješteni u odnosu na x − os.

Primjer 1.31 *Odrediti skup točaka* (x,y) *ravnine koje zadovoljavaju jednadžbu* $yi + (5i - x^2)i + 5 = 0$.

Jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentom obliku $(y - x^2)i = 0$, odakle je $y = x^2$. Dakle, traženi skup točaka je parabola s jednadžbom $y = x^2$.

Zadaci za vježbu 1.6

1. Odredite realan i imaginaran dio kompleksnog broja:

   a) $z = (3 + 2i) + (-5 + 4i)$ b) $z = (8 - 5i) + (2 - 3i)$
   c) $z = (-4 + 5i) - (2 - i)$ d) $z = -(5 - 3i) - (-3 - 4i)$
   e) $z = (4 + 3i)(-1 + 2i)$ f) $z = (5 - 3i)(3 + 4i)$
   g) $z = (-3i)(5i)$ h) $z = (1 - i)(1 + i)$
   i) $z = i^{42}$ j) $z = i^{23}$
   k) $z = i^{157}$ l) $z = (-i)^{50}$
   m) $z = \sqrt{12} + \sqrt{-50}$ n) $z = \sqrt{-3}\sqrt{-6}$.

2. Pokažite da za kompleksne brojeve z_1 i z_2 vrijedi:
   a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$, b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$, c) $\overline{(\bar{z})} = z$, d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$.

3. Nađite sve kompleksne brojeve konjugirane svojem kvadratu.

4. Riješite jednadžbe a) $\bar{z} = z$, b) $z^2 + z = 0$, c) $\bar{z} = 2 - z$.

5. Odredite sve kompleksne brojeve z za koje je $2 \mid z \mid + z = 2 - i$.

6. Zapisati kompleksne brojeve u algebarskom obliku:

   a) $\frac{1}{3+2i}$ b) $\frac{1}{5+8i}$ c) $\frac{7}{5-6i}$ d) $\frac{-3}{2-5i}$

   e) $\frac{6+4i}{1-5i}$ f) $\frac{7-6i}{-5-i}$ g) $2 - \frac{4-i}{1+2i}$ h) $\frac{1}{1-5i} + 5i$.

7. Pronađite kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednadžbu:

   a) $5z + 3i = 2iz + 4$ b) $2iz - 6 = 9i + z$
   c) $(z - 2i)^2 = (z + 3i)^2$ d) $z(z + 4i) = (z + i)(z - 3i)$.

8. Riješite jednadžbe:

   a) $x^2 - 3x + 10 = 0$ b) $x^2 - 5x + 20 = 0$ c) $4x^2 + x + 3 = 0$
   d) $-3x^2 + x - 5 = 0$ e) $4x^2 + 64 = 0$ f) $3x^4 = 81$.

9. Napisati kvadratnu jednadžbu kojoj su $z_1 = 1 + 3i$ i $z_2 = 1 - 3i$ korijeni.

10. Odredite skup točaka ravnine koje zadovoljavaju jednadžbu $2xi + (1 - yi) + 5i - 1 = 0$.

1.7 Binomna formula

Izrazi za kvadrat i kub binoma su nam dobro poznati. U ovoj točki želimo naći izraz za $(a+b)^n$, gdje su a i b bilo koji kompleksni brojevi i n bilo koji prirodan broj. Za $n = 1, 2, 3$ izraz $(a + b)^n$ je veoma jednostavan:

$(a+b)^1 = a+b$	2 člana: prvi a^1, zadnji b^1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	3 člana: prvi a^2, zadnji b^2
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	4 člana: prvi a^3, zadnji b^3.

Zamijetite da izraz $(a+b)^n$ započinje članom a^n i završava s b^n. Ukupan broj članova je $n+1$. Nadalje, zbroj eksponenata svakog člana je n. Nameće se pretpostavka da izraz $(a + b)^n$ ima oblik:

$$(a+b)^n = a^n + \underline{\quad} a^{n-1}b + \underline{\quad} a^{n-2}b^2 + \cdots + \underline{\quad} a^1 b^{n-1} + b^n \, ,$$

gdje praznine predstavljaju nepoznate brojeve. Kao što ćemo pokazati, ta pretpostavka je točna. Pođimo redom. Uvedimo prvo neke simbole.

Za cijeli broj $n \geq 0$ simbolom $n!$ označavamo broj (**en-faktorijela**) definiran sa:

$$\boxed{\begin{array}{c} 0! = 1 \qquad 1! = 1 \\ n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{za} \quad n \geq 2 \end{array}}$$

Primjer 1.32 *Provjerite:*

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$n!$	*1*	*1*	*2*	*6*	*24*	*120*	*720*

Zamijetite da je $n! = n(n-1)!$. Tako je npr. $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$.

Faktorijeli rastu veoma brzo. Tako je npr. $70!$ veće od $9 \cdot 10^{99}$, najvećeg prirodnog broja što ga kalkulator može prikazati.

Za cijele brojeve n i k, $0 \leq k \leq n$, definiramo **binomni koeficijent** $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ (čitaj: *n povrh k*):

$$\boxed{\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

Primjer 1.33 *Navedimo nekoliko primjera:*

a) $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3\cdot2\cdot1}{1(2\cdot1)} = \frac{6}{2} = 3$

b) $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3\cdot2\cdot1}{(2\cdot1)1} = \frac{6}{2} = 3$

c) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{(2\cdot1)(2\cdot1)} = \frac{24}{4} = 6$

Binomni koeficijenti imaju sljedeća dva svojstva:

1. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (*simetrija binomnih koeficijenata*)

Drugo svojstvo je očito. Dokažimo prvo svojstvo:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \; & \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] \\ & = \frac{n!(n+1)}{(k-1)!\cdot(n-k)!(n-k+1)k} = \frac{(n+1)!}{k!\cdot(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Binomni koeficijenti se mogu odrediti i pomoću tzv. **Pascalovog trokuta**:

Binom											
						Binomni koeficijenti					
$(a+b)^0$						1					
$(a+b)^1$					1		1				
$(a+b)^2$				1		2		1			
$(a+b)^3$			1		3		3		1		
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1
$\vdots$											

U n-tom redu nalaze se binomni koeficijenti za izraz $(a+b)^{n-1}$. Svaki red započinje i završava brojem 1. U bilo kojem redu, drugi broj jednak je zbroju prvog i drugog broja iz prethodnog reda, treći broj se dobiva zbrajanjem drugog i trećeg broja iz prethodnog reda itd.

Navedimo binomnu formulu:

Binomna formula: Za $a, b \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\boxed{\begin{gathered}(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.\end{gathered}}$$

Binomna formula za $n = 2$ bila je poznata već Euklidu (300 god.pr.n.e). Mnogi ljudi su radili na njenom dokazu, a prvi ga je napravio Niels Abel (1802-1829) oko 1825.

Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom. Sa M označimo skup svih prirodnih brojeva za koje vrijedi binomna formula. Budući da je $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b$, formula vrijedi za $n=1$, tj. $1 \in M$. Pretpostavimo da je $n \in M$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = \;& (a+b)\cdot(a+b)^n \\ & = (a+b)\cdot\left[\binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots\right. \\ & \left. + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n\right] = \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]a^nb^1 \\ & + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2 + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]a^1b^n + \binom{n}{n}a^0b^{n+1} \\ & = \binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1}a^nb^1 + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1}.\end{aligned}$$

U zadnjem koraku smo iskoristili prvo svojstvo binomnih koeficijenata. Budući $(n \in M) \Rightarrow (n+1 \in M)$, zaključujemo $M = \mathbb{N}$. Time je dokazana binomna formula.

Primjer 1.34

$$\begin{aligned}(x+2)^5 \;& = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 2 + \binom{5}{2}x^3 2^2 + \binom{5}{3}x^2 2^3 + \binom{5}{4}x 2^4 + \binom{5}{5}2^5 \\ & = 1\cdot x^5 + 5\cdot x^4\cdot 2 + 10\cdot x^3\cdot 410\cdot x^2\cdot 8 + 5\cdot x\cdot 16 + 1\cdot 32 \\ & = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.\end{aligned}$$

Primjer 1.35 *Odredimo koeficijent uz x^4 u izrazu $(\sqrt{x} + x^2)^n$.*

$(k+1)$-vi član $(k = 0, 1, \ldots, n)$ je $(\sqrt{x})^{n-k}\left(x^2\right)^k = x^{(n+3k)/2}$. Zahtijeva se da je $\frac{n+3k}{2} = 4$, odakle dobivamo $k = \frac{8-n}{3}$.

	$n > 8$ ili $n = 7, 6, 4, 3, 1$	$n = 8\,(k = 0)$	$n = 5\,(k = 1)$	$n = 2\,(k = 2)$
koef. uz x^4	0	1	5	1

Zadaci za vježbu 1.7

1. Pokažite da je $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

2. Dokažite matematičkom indukcijom po n da n-člani skup S ima $\binom{n}{k}$ k-članih podskupova, $k = 0, 1, \ldots, n$.

   Uputa: Tvrdnju je lako provjeriti za $n = 0$ i $n = 1$. Nadalje, pretpostavite da je tvrdnja istinita za svaki skup S koji nema više od n elemenata. Neka je sada $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ i $S' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = S \backslash \{x_{n+1}\}$. Sve k-člane podskupove skupa S podijelite u dvije grupe: one koji ne sadrže x_{n+1} (ima ih koliko i k-članih podskupova od S') i one koji sadrže x_{n+1} (ima ih koliko i $(k-1)$-članih podskupova od S'). Prema induktivnoj pretpostavci, prva grupa ima $\binom{n}{k}$, a druga $\binom{n}{k-1}$ podskupova.

3. Smrtni ishod kao binomna distribucija. Letalitet od neke bolesti je $p = 0.30$, a vjerojatnost preživljavanja $q = 0.70$. Postavimo li pitanje vjerojatnosti ishoda smrti i ozdravljenja za petoro bolesnika, onda bi to mogli prikazati kao binomnu distribuciju:

$$(p+q)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} p^{5-k} q^k = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5.$$

Protumačite tabelu:

broj umrlih	razvoj binoma	vjerojatnost
5	$p5$	0.00243
4	$5p^4q$	0.02835
3	$10p^3q^2$	0.13230
2	$10p^2q^3$	0.30870
1	$5pq^4$	0.36015
0	q^5	0.16807 .

4. Dokazati: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Koliko elemenata ima **partitivni skup**[11] $\mathcal{P}(S)$ n-članog skupa S?

5. Razvijte po binomnoj formuli:

   a) $(2x-1)^5$, b) $(2a+3)^4$, c) $(\sqrt{x}-2)^5$.

6. Odrediti koeficijent uz x^8 u izrazu $\left(2x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^5$.

7. Dokazati: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$. Uputa: $(1-1)^n = 0$.

8. Zaokružite broj $(1.01)^7$ na tri decimalna mjesta. Uputa: $(1.01)^7 = (1 + 10^{-2})^7$ i primjenite binomnu formulu.

[11] Skup svih podskupova skupa S.

2. FUNKCIJE

Pojam funkcije jedan je od najvažnijih matematičkih pojmova, koji se uvodi i izučava već krajem osnovne i tijekom cijele srednje škole. Većina materijala ovog poglavlja poznata je iz srednje škole. Mi ćemo posebnu pažnju posvetiti realnim funkcijama realne varijable, funkcijama s kojim se gotovo svakodnevno susreću matematičar, fizičar, inženjer, ekonomist, liječnik itd.

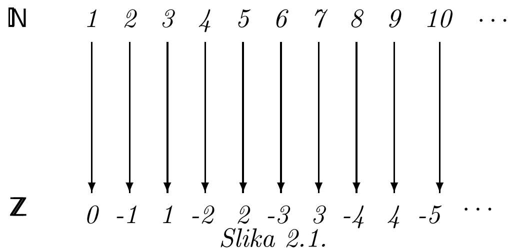
2.1 Definicija funkcije

Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu skupa D pridružen jedan element skupa K, onda kažemo da je skup D preslikan u skup K, a sam taj postupak pridruživanja nazivamo **funkcijom** ili **preslikavanjem** s D u K. Označimo li funkciju s D u K simbolom f, onda pišemo $f : D \to K$ i čitamo: *f je funkcija s D u K.* Za skup D kažemo da je **domena** ili **područje definicije** funkcije f i često ga označavamo s $\mathcal{D}(f)$, a skup K nazivamo **kodomena** od f. Jedinstveni element skupa K pridružen elementu $x \in D$ označavamo s $f(x)$ i zovemo **slika elementa** x u odnosu na funkciju f ili **vrijednost funkcije** f **u točki** x. Podskup $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in D\}$ skupa K nazivamo **slikom funkcije** f. Sliku $\operatorname{Im} f$ funkcije $f : D \to K$ označavamo još i s $f(D)$. Simbol x koji označava proizvoljni element iz D nazivamo **nezavisnom varijablom**, a $f(x)$ **zavisnom varijablom**.

Riječ *funkcija* prvi spominje Descartes 1637. godine i to za označavanje cjelobrojne potencije nezavisne varijable. Leibniz, koji je uvijek naglašavao geometriju, funkcijom naziva veličinu vezanu za krivulju kao npr. koordinate točke. Euler pod funkcijom podrazumijeva bilo koju formulu u kojoj se javljaju varijable i konstante. Današnji pojam funkcije potječe od Dirichleta.

Primjer 2.1 *Numeriramo li stranice knjige prirodnim brojevima dobivamo funkciju sa skupa svih stranica knjige u skup prirodnih brojeva.*

Primjer 2.2 *Definirajmo funkciju* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *na sljedeći način: neparnom broju* n *pridružimo broj* $\frac{n-1}{2}$, *a parnom* $-\frac{n}{2}$ *(vidi Sliku 2.1).*

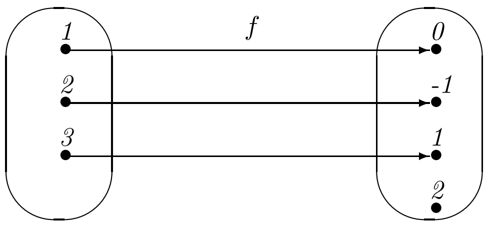


Slika 2.1.

Neka su A i B dva neprazna skupa i $a \in A$, $b \in B$. Kažemo da je (a, b) **uređen par**, ako je element a proglašen prvim, a b drugim u tom paru. Dva uređena para (a, b) i (a', b') smatramo **jednakim** ako je $a = a'$ i $b = b'$. Skup svih uređenih parova (a, b), pri čemu su $a \in A$ i $b \in B$ nazivamo **Kartezijev** ili **direktni produkt** skupova A i B i označavamo s $A \times B$.

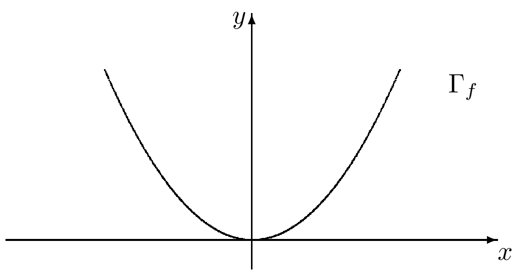
Grafom funkcije $f : D \to K$ nazivamo skup $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

Primjer 2.3 *Za funkcija* f *definiranu na Slici 2.2 je* $\Gamma_f = \{(1, 0), (2, -1), (3, 1)\}$.



Slika 2.2.

Primjer 2.4 *Graf* $\Gamma_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirane s* $f(x) = x^2$ *je parabola (Slika 2.3)*



Slika 2.3.

Za funkciju $f : D \to K$ kažemo da je **konstanta** ako prima istu vrijednost $c \in K$ u svakoj točki $x \in D$, tj. ako je $f(x) = c$, $\forall x \in D$.

Funkciju $f : D \to D$ koja svakom elementu $x \in D$ pridružuje taj isti element x nazivamo **identitetom** ili **identičnim preslikavanjem** skupa D i označavamo s 1_D.

Funkcija f je **funkcija realne varijable** ako joj je domena podskup skupa realnih brojeva. Ako je kodomena funkcije f podskup skupa realnih brojeva onda kažemo da je f **realna funkcija**.

Mi ćemo izučavati realne funkcije realne varijable.

Funkcija može biti zadana na različite načine, npr: a) u obliku tablice, b) grafički, tj. u obliku grafa ili dijagrama, c) analitičkim izrazom (formulom).

Primjer 2.5 *Navedimo dva primjera tabličnog zadavanja funkcije:*

a) U logaritamskim tablicama prikazane su vrijednosti logaritamske funkcije $f = \log$ za određeni niz vrijednosti nezavisne varijable x.

b) Prinos pšenice na određenoj oranici tijekom nekoliko godina:

x_i (god.)	y_i (mtc/ha)
1975	32.8
1983	46.1
1987	52.9
1989	50.3
1993	60.8

Grafičko i analitičko zadavanje funkcije već smo koristili u prethodnim primjerima.

Zadavanja funkcije formulom, npr.: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$, $g(x) = \log(x^2 - 3)$ uobičajeno je za realne funkcije realne varijable. Ako je funkcija f zadana formulom, bez isticanja njezine domene i kodomene, onda se smatra da se domena $\mathcal{D}(f)$ sastoji od svih realnih brojeva x za koje se napisanom formulom dobiva realan broj. Za kodomenu uobičajeno je uzeti skup $\mathbb{R}$.

Primjer 2.6 *Funkcija f zadana je formulom $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$. Njena domena je interval $< 3, \infty >$. Za kodomenu možemo uzeti bilo koji skup koji sadrži interval $< 0, \infty >$.*

Dvije funkcije f i g su jednake i pišemo $f = g$ onda i samo onda ako vrijedi:

a) f i g imaju iste domene,

b) f i g imaju iste kodomene,

c) za svaki x iz domene funkcija f i g vrijedi $f(x) = g(x)$, tj. ako su isti načini pridruživanja.

Primjer 2.7 *Funkcije* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definirane formulama*

$$f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n\,, \quad g(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

su jednake (Zašto?).

Primjer 2.8 *Funkcije* f *i* g *definirane su formulama* $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, $g(x) = x+4$. *Za svaki* $x \neq 4$ *je* $f(x) = g(x) = x + 4$. *Domena funkcije* f *je skup* $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, *dok je domena funkcije* g *cijeli skup realnih brojeva. Te funkcije nisu jednake.*

Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da **monotono raste** [**monotono pada**] na skupu D ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$ $[x_1 < x_2 \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))]$. Ukoliko vrijede stroge nejednakosti, onda kažemo da funkcija f **strogo raste**, odnosno **strogo pada** na skupu D.

Primjer 2.9 $f(x) = x^2$ *je strogo padajuća na* $< -\infty, 0]$, *a strogo rastuća na* $[0, \infty >$.

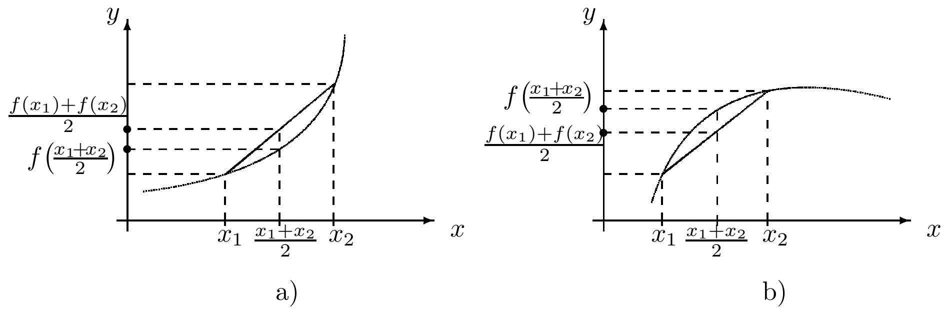
Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da u točki $x_0 \in D$ ima **lokalni maksimum** [**lokalni minimum**] ako postoji takva ε-okolina $< x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon >$ broja x_0 da je $f(x) \leq f(x_0)$ $[f(x) \geq f(x_0)]$ za svaki $x \in < x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon >$. Lokalne minimume i lokalne maksimume zajedničkim imenom nazivamo **lokalnim ekstremima**. Vrijede li stroge nejednakosti za $x \neq x_0$, govorimo o **strogom lokalnom ekstremu**. Za točku $x_0 \in D$ kažemo da je **točka globalnog maksimuma** [**minimuma**] ako je $f(x_0) \geq f(x)$ $[f(x_0) \leq f(x)]$ za svaki $x \in D$.

Primjer 2.10 *U točki* $x_0 = 2$ *funkcija* $f(x) = (x-2)^2$ *ima lokalni minimum, a funkcija* $g(x) = -(x-2)^2$ *lokalni maksimum. Nacrtajte grafove tih funkcija. Da li je* $x_0 = 2$ *ujedno točka globalnog minimuma (odnosno maksimuma) funkcije* f *(odnosno* g*)?*

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je **konveksna** [**konkavna**] na intervalu $I \subseteq D$ ako za sve $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ $\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]$.

Ukoliko vrijede stroge nejednakosti za $x_1 \neq x_2$, onda kažemo da je funkcija f **strogo konveksna**, odnosno **strogo konkavna** na intervalu I.

Može se pokazati da je funkcija f konveksna [konkavna] na intervalu I onda i samo onda ako je područje iznad [ispod] grafa funkcije, tj. skup točaka $S = \{(x,y) \mid x \in I, y \geq f(x)\}$ $[S = \{(x,y) \mid x \in I, y \leq f(x)\}]$ konveksan skup (vidi *Sliku 2.4*). Pri tome, za podskup S ravnine kažemo da je **konveksan** ako ima svojstvo: $(A, B \in S) \Rightarrow (\overline{AB} \in S)$, gdje su A, B bilo koje dvije točke iz S.



Slika 2.4.

Primjer 2.11 *Pokažimo da je funkcija* $f(x) = x^2$ *konveksna na* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} &\Leftrightarrow \left(\tfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \leq \tfrac{x_1^2+x_2^2}{2} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4} \leq \tfrac{x_1^2+x_2^2}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pokažite da je $f(x) = -x^2$ konkavna na $\mathbb{R}$.

Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ kažemo je **parna** [**neparna**] na skupu D ako je za svaki $x \in D$ i $-x \in D$ i $f(-x) = f(x)$ $[f(-x) = -f(x)]$.

Graf parne funkcije osno je simetričan s obzirom na y-os, a neparne centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Primjer 2.12 *Ispitajmo parnost funkcija: a)* $f(x) = x^2 - 5$, *b)* $f(x) = 5x^3 - x$, *c)* $f(x) = x^2 - x$.

a) $f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5 = f(x)$. Funkcija je parna.

b) $f(-x) = 5(-x)^3 - (-x) = -5x^3 + x = -(5x^3 - x) = -f(x)$. Funkcija je neparna.

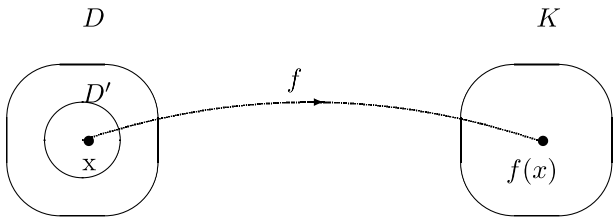
c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$. $f(x)$ je različito i od $f(x)$ i od $-f(x)$ pa funkcija nije parna niti je neparna.

2.1.1 Restrikcija funkcije

Pomoću funkcije $f : D \to K$ i bilo kojeg nepraznog podskupa D' skupa D ($D' \subset D$) možemo definirati novu funkciju $f_{|D'} : D' \to K$ na sljedeći način:

$$\boxed{f_{|D'}(x) = f(x) \quad (\forall x \in D'),}$$

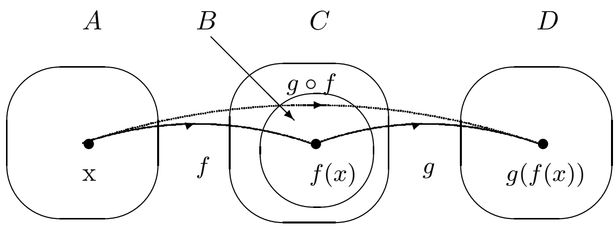
koju nazivamo **restrikcijom** funkcije f na skup $D' \subset D$. Slobodno govoreći, radi se o „istoj" funkciji s tim što se ona promatra na manjoj domeni (*Slika 2.5*). Kažemo još da je f **proširenje** od $f_{|_{D'}}$.



Slika 2.5. Restrikcija funkcije

2.1.2 Kompozicija funkcija. Bijekcije

Neka su dane dvije funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ i neka je $f(A) \subseteq C$. Za funkciju $g \circ f : A \to D$ definiranu sa $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$, kažemo da je **kompozicija** ili **produkt** funkcija f i g (*Slika 2.6*).



Slika 2.6.

Primjer 2.13 *Navedimo dva praktična primjera u kojima možemo prepoznati kompoziciju funkcija:*

a) Ukupni dnevni prihod ovisi o broju proizvedenih jedinica robe. Broj proizvedenih jedinica robe ovisi o vremenu proteklom od početka proizvodnje. Dakle, ukupni dnevni prihod je funkcija vremena proteklog od početka proizvodnje.

b) Prihod od prodaje ulaznica za nogometnu utakmicu ovisi o broju navijača. Broj navijača ovisi o broju pobjeda domaćina u prethodnim susretima. Dakle, prihod od prodaje ulaznica je funkcija broja pobjeda u prethodnim utakmicama.

Primjer 2.14 *Troškovi proizvodnje x lutaka na dan iznose $C(x) = 0.1x^2 - 0.2x + 600$ NJ. Broj lutaka proizvedenih nakon t sati je $x = 50t - 10$. Izrazimo troškove proizvodnje kao funkciju od t i izračunajmo troškove za 8-satni radni dan.*

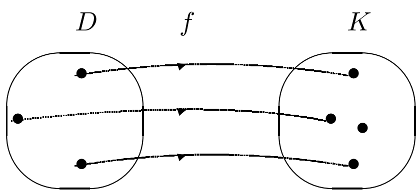
$C(t) = 0.1 \cdot (50t - 10)^2 - 0.2 \cdot (50t - 10) + 600 = 250t^2 - 110t + 612$, $C(8) = 15\ 732$ NJ.

Za funkciju $f : D \to K$ koja različite elemente domene D preslikava u različite elemente kodomene K kažemo da je **injekcija** skupa D u skup K.

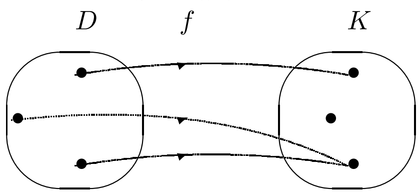
Uočite da je f injekcija onda i samo onda ako

$$\boxed{(f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y).}$$

Primjer 2.15 *Funkcija f prikazana na Slici 2.7 je injekcija, dok funkcija f prikazana na Slici 2.8 nije injekcija.*



Slika 2.7.



Slika 2.8.

Primjer 2.16 *Funkcija iz Primjera 2.2 je injekcija. Zašto funkcija iz Primjera 2.4 nije injekcija?*

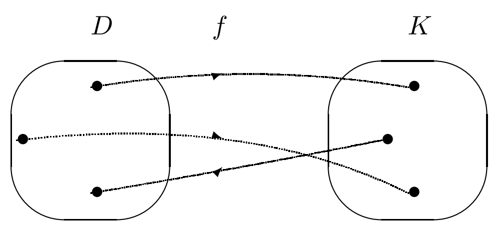
Primjer 2.17 *Realna funkcija realne varijable definirana s* $f(x) =| x |$ *nije injekcija. Zašto?*

Za funkciju $f : D \to K$ kažemo da je **surjekcija** ako je svaki element kodomene K slika barem jednog elementa iz domene D, tj. ako za svaki $y \in K$ postoji barem jedan $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

Primjer 2.18 *Na Slici 2.9 je prikazana surjekcija. Funkcije prikazane Slikama 2. 7 i 2. 8 nisu surjekcije.*

Za funkciju $f : D \to K$ koja je i surjekcija i injekcija kažemo da je **bijekcija**.

Primjer 2.19 *Funkcija iz primjera 2.2 je bijekcija. Funkcije prikazane slikama 2.7 i 2.8 nisu bijekcije. Na Slici 2.9 je prikazana jedna bijekcija.*



Slika 2.9.

Za dva neprazna skupa A, B kažemo da su **ekvipotentni** ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Kaže se još da **imaju jednako mnogo elemenata** ili da im je isti **kardinalni broj**.

Primjer 2.20 *Skupovi* $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Z}$ *su ekvipotentni (vidi Primjer 2.2).*

Primjer 2.21 *Skupovi* $[0, \infty >$ *i* $< 0, 1]$ *su ekvipotentni.*

Provjerite da je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ bijekcija s $[0, \infty >$ na $< 0, 1]$.

Nije teško pokazati da vrijedi sljedeći teorem:

> Neka je $f : D \to K$ bijekcija. Tada postoji jedna i samo jedna bijekcija $g : K \to D$ takva da je
>
> i) $(f \circ g)(y) = y \ \ \forall y \in K$,
>
> ii) $(g \circ f)(x) = x \ \ \forall x \in D$.
>
> Tu jedinstvenu bijekciju g označavamo s f^{-1} i nazivamo **inverznom funkcijom** funkcije f ili **inverzom** od f.

Neka je $f : D \to K$ realna funkcija realne varijable. Dakle, $D \subseteq \mathbb{R}$ i $K \subseteq \mathbb{R}$. Navedimo postupak pomoću koga u većini slučajeva možemo ispitati da li je funkcija f bijekcija:

> Iz jednadžbe $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in K$, računamo $f^{-1}(x)$.
>
> 1) Ako rješenje ne postoji, onda f nije surjekcija.
> 2) Ako rješenje nije jedinstveno, onda f nije injekcija.
> 3) Ako rješenje postoji i jedinstveno je, onda je f bijekcija i f^{-1} je inverz funkcije f.

Primjer 2.22 *Odredimo inverznu funkciju funkcije* $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$:

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ako postoji, inverzna funkcija je definirana na skupu $\operatorname{Im} f$.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{1+f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} = x, \ \ \forall x \in \operatorname{Im} f.$$

Dakle, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Primjer 2.23 *Navedimo primjer kada nam spomenuti postupak ne pomaže.*

Funkcija f *definirana je formulom* $f(x) = x^{13} - 2x^3 + x - 1$. *Jednadžbu*

$$(f^{-1}(x))^{13} - 2(f^{-1}(x))^3 + f^{-1}(x) - 1 = x$$

ne možemo jednostavno riješiti po $f^{-1}(x)$.

Nadalje ćemo koristiti sljedeću tvrdnju:

Neka su D i K podskupovi skupa realnih brojeva i $f : D \to K$ strogo monotona surjekcija. Tada vrijedi:

1) Funkcija f ima inverznu funkciju f^{-1},
2) Ako f strogo raste na D, onda i f^{-1} strogo raste na K,
3) Ako f strogo pada na D, onda i f^{-1} strogo pada na K.

Dokaz. Dokazažimo tvrdnju samo u slučaju kada f strogo raste na D. Za strogo padajuću funkciju f, dokaz se provodi slično. Budući da $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2)$, f je injekcija; dakle i bijekcija. Kada f^{-1} ne bi bila rastuća funkcija, onda bi postojali $y_1, y_2 \in D$ takvi da je $y_1 < y_2$ i $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Kako po pretpostavci f strogo raste, iz posljednje nejednakosti bismo dobili $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, tj. $y_1 \geq y_2$. To je u suprotnosti s pretpostavkom $y_1 < y_2$. Dakle, f^{-1} je strogo rastuća na K.

Za razumijevanje matematičke analize veoma su važne tzv. elementarne funkcije koje se dobivaju iz osnovnih elementarnih funkcija. **Osnovne elementarne funkcije** su:

a) opća potencija
b) polinomi,
c) eksponencijalne funkcije,
d) logaritamske funkcije
e) trigonometrijske funkcije,
f) ciklometrijske funkcije

Elementarnnim funkcijama nazivamo one funkcije koje se dobivaju iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija $(+ , - , \cdot , :)$ i konačnog broja kompozicija osnovnih elementarnih funkcija.

Primjer 2.24 $f(x) = \sin x + x^2$, $g(x) = \cos x^2 + \ln^2 x + 2^x$ *su elementarne funkcije.*

Zadaci za vježbu 2.1

1. Za svaku od funkcija izračunajte $f(-x)$,$f(2x)$, $f(x-3)$ i $f(1/x)$.

   a) $f(x) = 2x + 3$
   b) $f(x) = 4 - x$
   c) $f(x) = 2x^2 - 4$
   d) $f(x) = x^3 + 1$
   e) $f(x) = x^3 - 3x$
   f) $f(x) = x^2 + x$
   g) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
   h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
   i) $f(x) = \mid x \mid$

2. Ovisnost perioda T (u sekundama) matematičkog njihala duljine l (u metrima) dana je formulom $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, gdje je $g \approx 9.81$ ms^{-2} ubrzanje sile teže. Pomoću

kalkulatora odredite period njihala duljine $l = 0.5\,\mathrm{m}$. Za koliko se poveća period ako se duljina udvostruči?

3. Odredite domene funkcija:

   a) $f(x) = x/(x^2+1)$ b) $f(x) = x^2/(x^2-1)$ c) $f(x) = (x-2)/(x^3+x)$
   d) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ $e) f(x) = 1/(x^2-4)$ f) $f(x) = \sqrt{x^2-x-2}$
   g) $f(x) = \sqrt{x+2}$ $h) f(x) = 1/(x^2-3x-4)$ i) $f(x) = x/\mid x \mid$

4. Nacrtajte grafove funkcija:
   a) $f(x) = 3x - 4$ $b) f(x) = 4 - 2x$ c) $f(x) = x^2 - 4$
   d) $f(x) = x^2 + 4$ $e) f(x) = 2x^3$ f) $f(x) = \frac{2}{x}$
   g) $f(x) = \mid x - 2 \mid$ h) $f(x) = \sqrt{x} + 2$ i) f(x)=$\mid x + 2 \mid$
   j) $f(x) = \mid x^2 - 5x + 6 \mid$ k) $f(x) = \mid x^2 - 7x + 12 \mid$ l) $f(x) = \mid x^2 + x - 6 \mid$
   m) $f(x) = \begin{cases} 4-x, & x \leq 0 \\ x^2-2, & x > 0 \end{cases}$ n) $f(x) = \begin{cases} 4-x, & x \leq 0 \\ x^2+4, & x > 0 \end{cases}$

5. Za svaki realan broj x postoje uzastopni cijeli brojevi n i $n+1$ takvi da je $n \leq x < n+1$. Neka je $f(x) = n$. Nacrtajte graf funkcije f. Funkciju f nazivamo **najveće cijelo**. Uobičajeno je $f(x)$-**najveće cijelo od** x označiti s $[x]$.

6. Ispitajte parnost funkcija:

   a) $f(x) = x^2 + \mid x \mid$ b) $f(x) = 17x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$
   d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e) $f(x) = x^4 - x^2$ f) $f(x) = \frac{x}{|x|}$
   g) $f(x) = \sqrt{1-x^3}$ h) $f(x) = 1 + x + x^2$ i) $f(x) = 1 - x + x^3$

7. Neka je f bilo koja funkcija definirana na **simetričnom podskupu** D skupa $\mathbb{R}$ ($x \in D \Rightarrow -x \in D$). Funkcije $P(x)$ i $N(x)$ definirane su formulama:

$$P(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad N(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

   Dokažite: a) $P(x)$ je parna funkcija, b) $N(x)$ je neparna funkcija, c) $f(x) = P(x) + N(x)$.

8. Pronađite funkcije f i g takve da je $f \circ g = H$, gdje je $H(x) = (x^2+1)^{50}$. Da li postoji više rješenja?

9. Kažemo da funkcije f i g međusobno **komutiraju** ako je $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ za svaki x iz zajedničke domene tih funkcija. Za koje vrijednosti od a i b funkcija $g(x) = a + bx$ komutira s funkcijom $f(x) = 1 + 2x$?

10. Pronađite $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$ za:

    a) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^3 - 1$ b) $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = 2x - 1$
    c) $f(x) = 4x^2 - 5,\ g(x) = 3x$ d) $f(x) = x^2 + 9x,\ g(x) = \sqrt{x+9}$
    e) $f(x) = \mid x \mid,\ g(x) = -6$ f) $f(x) = x^3 - 1,\ g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

    Zamijetite da komponiranje funkcija nije komutativna operacija.

11. Dokažite da je komponiranje funkcija asocijativna operacija.

12. Odredite inverz (ako postoji) funkcija:

a) $f(x) = 3x - 4$	b) $f(x) = 1 - 2x$	c) $f(x) = x^3 - 8$
d) $f(x) = \frac{1}{x}$	e) $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$	f) $f(x) = \frac{1}{x}$
g) $f(x) = (x-2)^2$	h) $f(x) = (x-2)^2$, $x \geq 2$	i) $f(x) = x^4$
j) $f(x) = \sqrt{x-2}$	k) $f(x) = 3/x^{1/3}$	l) $f(x) = x^{1/3} + 1$

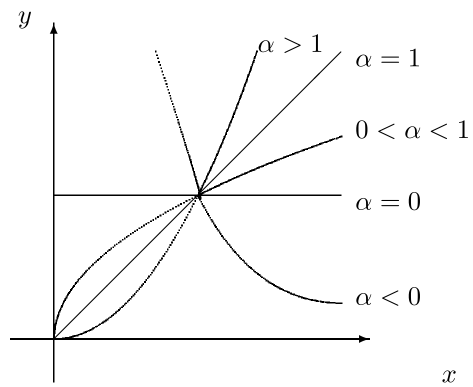
13. Stupnjevi temperature po Celsiusu (t_C) preračunavaju se u stupnjeve temperature po Fahrenheitu (t_F) pomoću formule $t_F = f(t_C) = \frac{9}{5}t_C + 32$. Za pretvaranje stupnjeva temperature po Farenheitu u stupnjeve temperature po Celsiusu koristimo formulu $t_C = g(t_F) = \frac{5}{9}(t_F - 32)$. Pokažite da su f i g međusobno inverzne funkcije.

2.2 Opća potencija

Funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, definirana je za svaki realan broj x. Ako je eksponent $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je funkcija $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ definirana samo za $x \geq 0$ ako je n paran broj, dok je za neparan n definirana za svaki realan broj x.

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Funkciju $x \mapsto x^\alpha$, $x > 0$, nazivamo **općom potencijom**.

Na *Slici 2.10* je prikazano nekoliko grafova općih potencija. Uočite razlike u ovisnosti o eksponentu α.



Slika 2.10.

Primjer 2.25 *Gradski knjižničar procjenjuje da će se iz knjižnice godišnje posuditi* $y = 2\ 500 \cdot x^{2/3}$ *knjiga, gdje* x *predstavlja populaciju grada (u tisućama). Koliko će se godišnje posuditi knjiga ako grad ima* 80 000 *ljudi?*

$y(80) = 2\ 500 \cdot 80^{2/3} \approx 46\ 416$ knjiga.

Primjer 2.26 *Adijabatskom kompresijom kisika tlak P (u* mm Hg*) i volumen V (u litrama) povezani su jednadžbom $P = 7.6V^{1.4}$.*

Primjer 2.27 *Epidemiolozi su ustanovili da neke tropske bolesti prenose komarci i postavili vezu između broja oboljelih ljudi N i broja komaraca x formulom $N = 0.0048 \cdot x^{2/3}$.*

Primjer 2.28 *Eksperimentalnim putem je ustanovljeno da su masa životinje m (u* kg*) i površina kože S (u* m^2*) povezani jednadžbom $S = k \cdot m^{2/3}$. Navedimo neke vrijednosti za k :*

ptica	*0.1*	*čovjek*	*0.11*	*mačka*	*0.1*	*majmun*	*0.118*
krava	*0.09*	*konj*	*0.1*	*svinja*	*0.09*	*zec*	*0.0975*

Izračunajte površinu kože ptice od 1.7 kg*, mačke od* 3 kg*, krave od* 450 kg*, svinje od* 120 kg*, čovjeka od* 75 kg*, majmuna od* 45 kg*, konja od 350* kg *i zeca od* 4.2 kg.

2.3 Polinomi

Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu sa:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2.1}$$

gdje su $a_n, \ldots, a_1, a_0$ realni brojevi nazivamo **polinomom nad $\mathbb{R}$** .
Brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ su **koeficijenti** polinoma f.

Ako je $a_n \neq 0$, onda za polinom (2.1) kažemo da je n-tog **stupnja**. U tom slučaju kažemo da je a_n **najstariji** ili **vodeći** koeficijent tog polinoma. Ako je $a_n = 1$, onda kažemo da je polinom f **normiran**. Stupanj polinoma f označavat ćemo sa $\operatorname{st} f$.

Primjer 2.29 *Ukupni troškovi proizvodnje q jedinica neke robe (u novčanim jedinicama (NJ)) zadani su funkcijom $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 500$. Odredimo troškove proizvodnje prvih* 20 *jedinica robe i troškove proizvodnje dvadesete jedinice robe.*

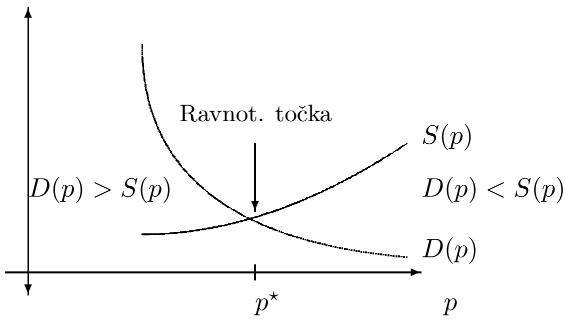
Troškovi proizvodnje prvih 20 jedinica robe iznose $C(20) = 20^3 - 30 \cdot 20^2 + 400 \cdot 20 + 500 = 4500$ NJ, dok je za proizvodnju dvadesete jedinice robe potrebno $C(20) - C(19) = 4500 - 4129 = 371$ NJ.

Primjer 2.30 *Proizvođač može napraviti radio aparat po cijeni od* 100 *NJ i procjenjuje da će mjesečno prodati približno $(800 - p)$ radio aparata, gdje je p prodajna cijena radio aparata. Procijenimo mjesečni profit P proizvođača kao funkciju cijene p i odredimo cijenu pri kojoj će profit biti maksimalan.*

Profit P je jednak umnošku broja prodanih radio aparata s profitom po radio aparatu, tj. $P(p) = (800-p)(p-100)$. Graf te kvadratne funkcije je parabola s tjemenom $(450, 122500)$, odakle zaključujemo da će profit biti maksimalan ako je prodajna cijena radio aparata $p = 450$ NJ. Sjecišta parabole s apscisom su točke $p = 100$ i $p = 800$. Koje je ekonomsko značenje tih sjecišta?

Primjer 2.31 Zakon ponude i potražnje. *Označimo s p prodajnu cijenu neke robe. U većini slučajeva, ponuda robe $S(p)$ raste dok potražnja za robom $D(p)$ opada ako cijena p raste. Ekonomisti crtaju grafove funkcija $S(p)$ i $D(p)$. Točku u kojoj se ti grafovi sijeku nazivaju* **tržišnom ravnotežom**, *a apscisu te točke-cijenu $p^\star$* **ravnotežnom cijenom** *(vidi Sliku 2.11). Kod ravnotežne cijene $p^\star$ ponuda je jednaka potražnji.*

Zakon ponude i potražnje tvrdi da u uvjetima potpune tržišne konkurencije roba ima tendenciju da se prodaje po ravnotežnoj cijeni $p^\star$. Ako se roba prodaje po cijeni većoj od ravnotežne, onda će se javiti suvišak robe na tržištu koji će djelovati na smanjenje cijene. S druge strane, prodaje li se roba po cijeni manjoj od ravnotežne cijene, na tržištu će se javiti manjak robe koji će dovesti do povećanja cijene.



Slika 2.11. Tržišna ravnoteža

Za primjer, odredimo ravnotežnu cijenu za funkciju ponude $S(p) = p^2+3p-70$ i funkciju potražnje $D(p) = 410 - p$.

Izjednačavanjem $S(p)$ i $D(p)$ dobivamo $p^2+3p-70 = 410-p$, odakle je $(p-20)(p+24) = 0$. Ta jednadžba ima dva rješenja: $p = 20$ i $p = -24$. Budući da je cijena pozitivna, za ravnotežnu cijenu dobivamo $p^\star = 20$ NJ. Osim toga, $D(20) = 410 - 20 = 390$, tj. 390 jedinica robe se nudi i potražuje kada je tržište u ravnoteži.

Primjer 2.32 *Predmet ispušten s visine* 1.6 m *nakon t sekundi nalazi se u vakuumu na visini $h(t) = 1.6 - \frac{9.81}{2}t^2$* m. a) *Nakon koliko sekundi će predmet pasti na tlo?* b) *Na kojoj visini se nalazi predmet nakon* 0.285 s?

a) Iz $1.6 - \frac{9.81}{2}t^2 = 0$ dobivamo $t \approx 0.57\,\mathrm{s}$. b) $h(0.285) = 1.6 - \frac{9.81}{2} \cdot 0.285^2 \approx 1.2\,\mathrm{m}$.

Primjer 2.33 *Prema Poiseuilleovom zakonu, brzina (u* cms^{-1}*) arterijske krvi na udaljenosti* r cm *od centralne osi arterije radijusa* R cm *zadana je funkcijom* $v(r) = c(R^2 - r^2)$*, gdje je* c *konstanta. Za* $c = 1.76 \cdot 10^{-5}\,\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}$ *i* $R = 1.2 \cdot 10^{-2}$ cm *izračunajmo brzinu krvi na centralnoj osi arterije i brzinu krvi točno na sredini između stijenke i centralne osi arterije.*

Na centralnoj osi je $r = 0$ pa dobivamo $v(0) = 25.344\,\text{cms}^{-1}$. Za $r = \frac{R}{2} = 0.006$ cm imamo $v(0.006) = 19.008\,\text{cms}^{-1}$.

Polinom f za koji je $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, nazivamo **nul – polinom**.

teorem o nulpolinomu:

Polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je nulpolinom onda i samo onda ako je $a_i = 0$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dokaz. Ako je $a_i = 0$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, n$, onda je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Da bismo dokazali obrat dovoljno je dokazati pomoćnu tvrdnju:

Ako je $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *nulpolinom, onda je* $b_m = 0$.

Naime, tada primjenom pomoćne tvrdnje na nulpolinom f dobivamo $a_n = 0$. Stoga je $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Ponovnom primjenom pomoćne tvrdnje dobivamo $a_{n-1} = 0$ i $f(x) = a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$. Nastavimo li postupak dobivamo $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$.

Dokažimo pomoćnu tvrdnju. Ako je $m = 0$, tj. $g(x) = b_0$, onda je očito $b_0 = 0$. Neka je stoga $m \in \mathbb{N}$. Da bismo dokazali da je $b_m = 0$ dovoljno je pokazati da je $|\, b_m \,|$ manje od svakog realnog broja $\varepsilon > 0$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ iz $g(x) = 0$ dobivamo

$$x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m} \right) = 0,$$

odakle za svaki $x \neq 0$ imamo

$$b_m = -\frac{b_{m-1}}{x} - \cdots - \frac{b_1}{x^{m-1}} - \frac{b_0}{x^m}.$$

Neka je $x > 1$. Iz gornje jednakosti dobivamo nejednakost

$$|\, b_m \,| \leq \frac{|\, b_{m-1} \,|}{x} + \cdots + \frac{|\, b_1 \,|}{x^{m-1}} + \frac{|\, b_0 \,|}{x^m} < \frac{|\, b_{m-1} \,| + \cdots + |\, b_1 \,| + |\, b_0 \,|}{x} = \frac{M}{x}, \tag{2.2}$$

gdje je $M = |\, b_{m-1} \,| + \cdots + |\, b_1 \,| + |\, b_0 \,|$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Prema Arhimedovom teoremu (vidi *Primjer 1.21*) postoji prirodan broj k takav da je $\frac{M}{\varepsilon} < k$. Sada za svaki $x > k$ imamo $\frac{M}{\varepsilon} < x$, tj. $\frac{M}{x} < \varepsilon$. Iz (2.2) dobivamo $|\, b_m \,| < \frac{M}{x} < \varepsilon$. Time je dokazana pomoćna tvrdnja.

Kako su polinomi funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, bilo koja dva polinoma imaju iste domene i kodomene. Prema tome, dva polinoma $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su jednaka onda i samo onda ako je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

teorem o jednakosti polinoma

> Polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $g(x) = b_m x^n + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$, su jednaki onda i samo onda ako vrijedi: $m = n$ i $a_i = b_i$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dokaz. Ako je $m = n$ i $a_i = b_i$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, n$, onda je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokažimo obrat. Neka je $f = g$. Treba pokazati da je $m = n$ i $a_i = b_i$ za svaki $i = 0, 1, \ldots, n$. Kad bi bilo $n > m$, onda bi za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedilo:

$$a_n x^n + \cdots + a_m x^m + \cdots a_1 x + a_0 = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, \quad \text{odnosno}$$

$$a_n x^n + \cdots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m - b_m)x^m + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Prema teoremu o nulpolinomu dobivamo:

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{m+1} = 0, \ a_m = b_m, a_{m-1} = b_{m-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom $a_n \neq 0$. Dakle, $n \leq m$. Slično se pokaže da je $m \leq n$ pa je je $m = n$. Sada $f = g$ povlači $(a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_0 - b_0) = 0$, odakle je $a_n = b_n, \ldots, a_0 = b_0$.

Zbroj $f + g$, razliku $f - g$ i umnožak $f \cdot g$ polinoma $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiramo kao zbroj, razliku i umnožak realnih funkcija. Neka je:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^n + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Prema definiciji za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots, \\
&(f-g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots, \\
&(f \cdot g)(x) = a_0 \cdot b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + a_n b_m x^{n+m}.
\end{aligned}$$

Zamijetite da se kod umnoška množi „svaki sa svakim."

Primjer 2.34 *Odredimo zbroj, razliku i umnožak polinoma $f(x) = x^3 + x^2$ i $g(x) = x^4 - 6x^2 + 7$.*

$$\begin{aligned}
&f(x) + g(x) = (x^3 + x^2) + (x^4 - 6x^2 + 7) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 7, \\
&f(x) - g(x) = (x^3 + x^2) - (x^4 - 6x^2 + 7) = -x^4 + x^3 + 7x^2 - 7, \\
&f(x) \cdot g(x) = (x^3 + x^2)(x^4 - 6x^2 + 7) = x^7 + x^6 - 6x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 7x^2.
\end{aligned}$$

Algoritam divizije:

Neka su $f(x)$ i $g(x)$ polinomi nad $\mathbb{R}$ i $g(x) \neq 0$. Tada postoje jedinstveni polinomi $q(x)$ i $r(x)$ takvi da vrijedi:

1) $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$,

2) $r(x) = 0$ ili je stupanj od $r(x)$ manji od stupnja od $g(x)$.

Polinom $q(x)$ nazivamo **kvocijentom**, a polinom $r(x)$ **ostatkom** u algoritmu divizije.

Dokaz. Ako je $f(x) = 0$ ili $\operatorname{st} f(x) < \operatorname{st} g(x)$, dovoljno je uzeti $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$. Pretpostavimo, stoga, da je $\operatorname{st} f(x) \geq \operatorname{st} g(x)$ i pokažimo da postoje polinomi $q(x)$ i $r(x)$ koji ispunjavaju oba uvjeta algoritma divizije.

Dokažimo prvo sljedeću pomoćnu tvrdnju koju ćemo koristiti u dokazu algoritma divizije:

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ *i* $\operatorname{st} f(x) \geq \operatorname{st} g(x)$. *Tada postoje polinomi* $q_1(x)$ *i* $r_1(x)$ *takvi da je* $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$ i $\operatorname{st} r_1(x) < \operatorname{st} f(x)$.

Dokaz te tvrdnje je sljedeći: Bez smanjenja općenitosti, neka je $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$. Stavimo $r_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$. Tada je $\operatorname{st} r_1(x) < \operatorname{st} f(x)$ i $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, gdje je $q_1(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$. Time je dokazana ova pomoćna tvrdnja.

Vratimo se dokazu algoritma divizije. Ako je $\operatorname{st} r_1(x) \geq \operatorname{st} g(x)$, onda prema gornjoj tvrdnji postoje polinomi $q_2(x)$ i $r_2(x)$ takvi da vrijedi $r_1(x) = g(x)q_2(x) + r_2(x)$ i $\operatorname{st} r_2(x) < \operatorname{st} r_1(x)$. Ako je $\operatorname{st} r_2(x) \geq \operatorname{st} g(x)$, primjenjujemo gornju tvrdnju sve dok ne dođemo do polinoma $q_k(x)$ i $r_k(x)$ takvih da vrijedi $r_{k-1}(x) = g(x)q_k(x) + r_k(x)$ i $\operatorname{st} r_k(x) < \operatorname{st} g(x)$. Tada je $f(x) = g(x)[q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_k(x)] + r_k(x)$ i $\operatorname{st} r_1(x) > \operatorname{st} r_2(x) > \ldots > \operatorname{st} r_k(x)$. Dovoljno je uzeti $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_k(x)$ i $r(x) = r_k(x)$. Preostaje pokazati da su polinomi $q(x)$ i $r(x)$ jedinstveni. Pretpostavimo li da su $q'(x)$ i $r'(x)$ dva polinoma sa svojstvima iz algoritma divizije, onda je $g(x)q(x) + r(x) = g(x)q'(x) + r'(x)$ ili $g(x)[q(x) - q'(x)] = r'(x) - r(x)$. Osim toga, polinom $r'(x) - r(x)$ je nul – polinom ili je $\operatorname{st}(r'(x) - r(x)) < \operatorname{st} g(x)$. Nadalje $q(x) - q'(x)$ je nul – polinom, jer, u suprotnom bi stupanj polinoma na lijevoj strani bio veći ili jednak od stupnja polinoma $g(x)$, tj. stupanj polinoma s lijeve strane bio bi veći od stupnja polinoma s desne strane. Dakle, $q'(x) = q(x)$, a tada je i $r'(x) = r(x)$.

Postupak za dijeljenje polinoma, sadržan u dokazu algoritma divizije, ilustriramo na sljedeća dva primjera.

Primjer 2.35 *Podijelimo polinom* $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 6$ *polinomom* $g(x) = x^2 + 3x - 2$.

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 4x^2 - 22x + 6) : (x^2 + 3x - 2) = 2x - 10 \\
\underline{\pm 2x^3 \pm 6x^2 \mp 4x} \\
\quad - 10x^2 - 18x + 6 \\
\quad \underline{\mp 10x^2 \mp 30x \pm 20} \\
\qquad\qquad 12x - 14
\end{array}$$

Kvocijent $q(x) = 2x - 10$, a ostatak $r(x) = 12x - 14$.

Primjer 2.36 *Podijelimo polinom* $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 6$ *polinomom* $g(x) = x - 2$.

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 4x^2 - 22x + 6) : (x - 2) = 2x^2 - 22 \\
\underline{\pm 2x^3 \mp 4x^2} \\
\qquad\quad - 22x + 6 \\
\qquad\quad \underline{\mp 22x \pm 44} \\
\qquad\qquad - 38
\end{array}$$

Kvocijent $q(x) = 2x^2 - 22$, a ostatak $r(x) = -38$. Zamijetite da je $r = f(2)$.

Bezoutov teorem:

$$\boxed{\text{Ostatak kod dijeljenja polinoma } f(x) \text{ polinomom } x - a \text{ je } f(a).}$$

Dokaz. Prema algoritmu divizije je $f(x) = (x - a)q(x) + r$, $r \in \mathbb{R}$, odakle za $x = a$ dobivamo $f(a) = (a - a) + r$ tj. $r = f(a)$.

Za polinom f kažemo da je **djeljiv** polinomom g ako postoji polinom q takav da je $f(x) = g(x)q(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, tj. ako je ostatak u algoritmu divizije jednak nuli. Ako je polinom f djeljiv polinomom g, onda polinom g nazivamo **mjerom** ili **divizorom** polinoma f.

Slijedeća tvrdnja je posljedica Bezoutova teorema:

$$\boxed{\text{Polinom } f(x) \text{ je djeljiv polinomom } x - a \text{ onda i samo onda ako je } f(a) = 0.}$$

Primjer 2.37 *Polinom* $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ *je djeljiv s* $g(x) = x + 1$.

Dovoljno je provjeriti da je $f(-1) = 0 : f(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 + 1 = 0$. Provjerite da je polinom $q(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ kvocijent. Polinomi g i q su mjere polinoma f.

Ako je $f(a) = 0$, onda kažemo da je a **nula** ili **korijen** polinoma $f(x)$. Nula a ima **kratnost** ili **višestrukost** k ako je $f(x)$ djeljiv s $(x - a)^k$, a nije djeljiv sa $(x - a)^{k+1}$.

Primjer 2.38 *Polinom* $f(x) = (x-2)^3(x+3)^2$ *ima dvije nule:* $x_1 = 2$ *i* $x_2 = -3$. *Prva nula je trostruka, a druga nula je dvostruka.*

Kvocijent $q(x)$ i ostatak $r(x)$ kada polinom $f(x)$ podijelimo polinomom $x-a$ možemo lako odrediti pomoću tzv. **Hornerova algoritma**. Opišimo taj algoritam:

Polinom $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$, dijelimo polinomom $x-a$. Kvocijent $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$ je polinom stupnja $n-1$. Iz $f(x) = (x-a)q(x) + r$, odnosno

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x-a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0) + r,$$

množenjem i uspoređivanjem koeficijenata uz jednake potencije od x dobivamo:

$$\begin{array}{lcl}
a_n = b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-1} = a_n \\
a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1} \\
\vdots & & \\
a_k = b_{k-1} - ab_k & \Rightarrow & b_{k-1} = a_k + ab_k \\
\vdots & & \vdots \\
a_0 = r - ab_0 & \Rightarrow & r = a_0 + ab_0.
\end{array}$$

Uočite da za koeficijente kvocijenta $q(x)$ vrijedi: $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = a_k + ab_k$, $k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$. To se može zapisati u obliku tzv. Hornerove sheme:

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$	$\cdots$	$b_0 = a_1 + ab_1$	$r = a_0 + ab_0$

Primjer 2.39 *Podijelimo Hornerovom shemom polinom* $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6$ *s* $x-2$ *:*

	1	-2	5	1	6
2	1	0	5	11	28

$q(x) = x^3 + 5x + 11$, $r = 28$.

Primjer 2.40 *Odredimo parametar* a *tako da polinom* $f(x) = x^3 + ax + 3$ *bude djeljiv s* $x+2$.

	1	0	a	3
-2	1	-2	$4+a$	$-5-2a$

$r = -5 - 2a = 0 \Rightarrow a = -5/2$.

Zajedničkom mjerom polinoma f i g, $f \neq 0$ i $g \neq 0$, nazivamo svaki polinom h kojim su djeljivi i polinom f i polinom g.

Bez smanjenja općenitosti neka je $\mathrm{st}\, f \geq \mathrm{st}\, g$. Prema algoritmu divizije jednoznačno su određeni polinomi q_1 i r_1 takvi da je

$$f = gq_1 + r_1, \quad 0 \leq \mathrm{st}\, r_1 < \mathrm{st}\, g.$$

Primijenimo li isti algoritam na polinom g i r_1, postoje polinomi q_2 i r_2 takvi da je

$$g = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 \le \operatorname{st} r_2 < \operatorname{st} r_1.$$

Ponavljanjem postupka za polinome r_1 i r_2 dolazimo do polinoma q_3 i r_3 takvih da je

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 \le \operatorname{st} r_3 < \operatorname{st} r_2.$$

Nastavimo li gornji postupak, dolazimo do niza ostataka $r_1, r_2, \ldots$ kojima stupnjevi strogo padaju. Stoga jednom dolazimo do ostatka $r_n \neq 0$ takvog da je

$$r_{n-1} = r_n q_{n-1}.$$

Dakle, imamo skup jednakosti

$$\begin{array}{ll} f = g q_1 + r_1, & 0 \le \operatorname{st} r_1 < \operatorname{st} g \\ g = r_1 q_2 + r_2, & 0 \le \operatorname{st} r_2 < \operatorname{st} r_1 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3, & 0 \le \operatorname{st} r_3 < \operatorname{st} r_2 \\ \vdots & \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, & 0 \le \operatorname{st} r_n < \operatorname{st} r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1}, & \end{array}$$

Ovaj postupak poznat je pod nazivom **Euklidov algoritam**. Iz posljednje jednakosti vidimo da r_n dijeli r_{n-1}, iz prethodne slijedi da r_n dijeli r_{n-2} itd... Iz druge jednakosti zaključujemo da r_n dijeli g, a iz prve da r_n dijeli i f. Dakle, r_n je zajednička mjera od f i g.
Ako je h zajednička mjera polinoma f i g, onda iz prve jednakosti nalazimo da h dijeli r_1. Sada iz druge jednakosti slijedi da h dijeli r_2. Nastavljajući postupak, zaključujemo da h dijeli i r_n. Tada h dijeli i normirani polinom $M(f,g) = \frac{1}{a} r_n$, gdje je $a \neq 0$ vodeći koeficijent od r_n. Dakle, postoji polinom $q' \neq 0$ takav da je $M(f,g) = hq'$. Zamijetite da je $\operatorname{st} h \le \operatorname{st} M(f,g)$.
Dokazali smo da normirani polinom $M(f,g)$ ima ova dva svojstva:

a) $M(f,g)$ zajednička mjera polinoma f i g,

b) ako je h zajednička mjera polinoma f i g, onda je h mjera i od $M(f,g)$.

Od svih normiranih polinoma jedino $M(f,g)$ ima navedena dva svojstva. Stoga on zaslužuje posebno ime. Nazivamo ga **najvećom zajedničkom mjerom** polinoma f i g. Postupak za nalaženje polinoma $M(f,g)$ dobiva se iz Euklidova algoritma.

Dokaz. Pretpostavimo da normirani polinom $M'(f,g)$ ima gore navedena dva svojstva. Kako je $M'(f,g)$ zajednička mjera, prema svojstvu b) polinom $M(f,g)$ je djeljiv s $M'(f,g)$. Analogno, kako $M'(f,g)$ ima svojstvo b) i $M(f,g)$ je zajednička mjera, $M'(f,g)$ je djeljiv s $M(f,g)$. Dakle, postoje polinomi q' i q takvi da je

$$M(f,g) = M'(f,g)q', \quad M'(f,g) = M(f,g)q.$$

Iz tih jednakosti slijedi: $\operatorname{st} M'(f,g) \leq \operatorname{st} M(f,g)$ i $\operatorname{st} M(f,g) \leq \operatorname{st} M'(f,g)$, odnosno $\operatorname{st} M(f,g) = \operatorname{st} M'(f,g)$. Budući da su $M(f,g)$ i $M'(f,g)$ normirani, to je $q' = q = 1$. Dakle, $M(f,g) = M'(f,g)$.

Primjer 2.41 *Odredimo Euklidovim algoritmom najveću zajedničku mjeru polinoma* $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ *i* $g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Prvo podijelimo f s g:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^3 - 2x^2 + x - 2) = x + 3. \\
\underline{\pm x^4 \mp 2x^3 \pm x^2 \mp 2x} \\
\qquad 3x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
\quad \underline{\pm 3x^3 \mp 6x^2 \pm 3x \mp 6} \\
\qquad\qquad\qquad 7x^2 + 7.
\end{array}$$

Dakle, $r_1(x) = 7x^2 + 7$. Sada podijelimo g s r_1:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (7x^2 + 7) = \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}. \\
\underline{\pm x^3 \qquad \pm x} \\
\quad - 2x^2 - 2 \\
\quad \underline{\mp 2x^2 \mp 2} \\
\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

Dakle, $r_2(x) = 0$, pa je $M(f,g) = \dfrac{7x^2 + 7}{7} = x^2 + 1$.

Za polinome f i g kažemo da su **relativno prosti**, ako je $M(f,g) = 1$.

Primjer 2.42 *Provjerite Euklidovim algoritmom da su polinomi* $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ *i* $g(x) = x^3 + 3x + 2$ *relativno prosti.*

Navedimo bez dokaza tzv. osnovni teorem algebre.

Osnovni teorem algebre:

> Svaki polinom n – tog stupnja, $n \geq 1$, nad poljem kompleksnih brojeva ima n nula, pri čemu se svaka nula broji onoliko puta kolika joj je kratnost.

Njemački matematičar K.F. Gauss (1777-1855) je bio prvi koji je dokazao taj teorem u svojoj disertaciji, i to kao mladić od 22 godine. Dao je ukupno četiri dokaza tog teorema.

Uzastopnom primjenom osnovnog teorema algebre, zaključujemo da za polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ postoje brojevi $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$f(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n), \; x \in \mathbb{R},$$

tj. polinom možemo **faktorizirati** nad $\mathbb{C}$. Ako je $z_i = a + bi$ α-kratni korijen polinoma, onda je i $\overline{z_i}$ α-kratni korijen. Naime, iz $a_n z_i^n + a_{n-1} z_i^{n-1} + \cdots + a_1 z_i + a_0 =$

0 konjugiranjem dobivamo $a_n\overline{z_i}^n + a_{n-1}\overline{z_i}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z_i} + a_0 = 0$. Množenjem dobivamo $(x - z_i)^\alpha(x - \overline{z_i})^\alpha = [x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)]^\alpha$. Zaključujemo da se svaki polinom $f(x)$ može zapisati u obliku:

$$f(x) = a_n(x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \cdots (x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_s},$$

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) + 2(\lambda_1 + \cdots + \lambda_s) = n.$$

To je **faktorizacija polinoma** $f(x)$ **nad R**. Svaki od faktora $x - a_1, \ldots x - a_k$, $x^2 + p_1x + q_1, \ldots, x^2 + p_nx + q_n$ je **ireducibilan nad** $\mathbb{R}$, tj. nijedan od njih se ne može prikazati u obliku umnoška dva polinoma nad $\mathbb{R}$ takvih da je stupanj svakog od njih barem 1.

2.4 Racionalne funkcije

Racionalna funkcija je kvocijent dvaju polinoma.

Neka je $f = \dfrac{P}{Q}$ racionalna funkcija, gdje su P i Q polinomi nad $\mathbb{R}$. Kazat ćemo da je f **cijela racionalna funkcija** ako je $\operatorname{st} Q = 0$, tj. ako je f polinom. Ako je $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, onda kažemo da je f **prava racionalna funkcija**. Za pravu racionalnu funkciju $f = \dfrac{P}{Q}$ kažemo da je **parcijalni razlomak** ako je $Q = p^k$ $(k \geq 1)$, pri čemu je p ireducibilan polinom nad $\mathbb{R}$. Dokazat ćemo tvrdnju:

Svaku pravu racionalnu funkciju moguće je na jedinstven način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka. Za taj prikaz kažemo da je **rastav prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke.**

Dokaz provodimo u dva koraka.

1. $Q(x)$ **sadrži samo linearne faktore**

Neka je $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ prava racionalna funkcija i a nula od $Q(x)$ kratnosti α, tj. $Q(x) = (x - a)^\alpha\phi(x)$, $\phi(a) \neq 0$. Tada su na jedinstven način određeni realan broj A i polinom $\psi(x)$ takvi da je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{\psi(x)}{(x - a)^{\alpha-1}\phi(x)} \tag{2.3}$$

i $\dfrac{\psi(x)}{(x - a)^{\alpha-1}\phi(x)}$ prava racionalna funkcija. Pri tome je $A = \dfrac{P(a)}{\phi(a)}$.

Dokaz. Neka su A i $\psi(x)$ takvi da vrijedi (2.3) i da je $\dfrac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\phi(x)}$ prava racionalna funkcija. Množenjem formule (2.3) s $Q(x)$ dobivamo $P(x) = A\phi(x) + (x-a)\psi(x)$ odakle za $x = a$ imamo $P(a) = A\phi(a)$, tj. $A = \dfrac{P(a)}{\phi(a)}$. Nadalje, prema (2.3) je

$$\psi(x) = \left[\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(a)}{\phi(a)(x-a)^{\alpha}}\right](x-a)^{\alpha-1}\phi(x) = \frac{P(x)}{x-a} - \frac{P(a)\phi(x)}{\phi(a)(x-a)} = \frac{\Phi(x)}{x-a},$$

gdje je $\Phi(x) = P(x) - \dfrac{P(a)}{\phi(a)}\phi(x)$, odakle zaključujemo da je polinom $\psi(x)$ kvocijent kod dijeljenja polinoma $\Phi(x)$ polinomom $x - a$. Time je pokazana jedinstvenost rastava (2.3) ukoliko on postoji.

Dokažimo egzistenciju rastava (2.3). Neka je $A = \dfrac{P(a)}{\phi(a)}$ i $\Phi(x) = P(x) - \dfrac{P(a)}{\phi(a)}\phi(x)$. Tada je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(a)}{\phi(a)(x-a)^{\alpha}} = \frac{\Phi(x)}{(x-a)^{\alpha}\phi(x)}.$$

Budući da je $\Phi(a) = 0$ to je a nula polinoma $\Phi(x)$. Neka je $\Phi(x) = (x-a)\psi(x)$. Dakle,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\phi(x)}.$$

Kako je je razlika pravih racionalnih funkcija opet racionalna funkcija iz posljednje formule zaključujemo da je $\dfrac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\phi(x)}$ prava racionalna funkcija.

Primjer 2.43 *Rastavimo na parcijalne razlomke izraz* $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$.

Nazivnik $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ sadrži dva linearna člana. Prema prethodnoj tvrdnji jednoznačno su određeni realni brojevi A, B takvi da je:

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3},$$

gdje su A i B konstante koje trebamo odrediti. Množeći gornju jednadžbu s $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ dobivamo $x = A(x-3) + B(x-2)$, odnosno $x = (A+B)x + (-3A-2B)$. Uspoređivanjem koeficijenata uz potencije od x dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 1 &= \quad A + \quad B \\ 0 &= -3A - \quad 2B \end{aligned}$$

Rješavajući taj sustav dobivamo $A = -2$, $B = 3$. Dakle,

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}.$$

2. $Q(x)$ sadrži ireducibilan kvadratni faktor

Neka je $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ prava racionalna funkcija i neka su $a, \overline{a} \in \mathbb{C}$ nule od $Q(x)$ kratnosti α, tj. $Q(x) = (x-a)^\alpha (x-\overline{a})^\alpha \phi(x)$, $\phi(a) \neq 0$, $\phi(\overline{a}) \neq 0$. Tada je $Q(x) = (x^2+px+q)^\alpha \phi(x)$, gdje je $p = -2\mathrm{Re}(a)$, $q = \mathrm{Re}^2(a) + \mathrm{Im}^2(a)$. Nadalje, jednoznačno su određeni realni brojevi M, N i polinom $\psi(x)$ takvi da je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha} + \frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}\phi(x)} \tag{2.4}$$

i $\dfrac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}\phi(x)}$ prava racionalna funkcija.

Dokaz. Zamijetite da je $(x-a)(x-\overline{a}) = x^2 - x(a+\overline{a}) + a\overline{a}$. Uz oznake: $p = -2\mathrm{Re}(a)$ i $q = \mathrm{Re}^2(a) + \mathrm{Im}^2(a)$ imamo $Q(x) = (x^2+px+q)^\alpha \phi(x)$.

Dokažimo prvo jedinstvenost rastava (2.4), ukoliko on postoji. Ako M, N i $\psi(x)$ imaju svojstva navedena u tvrdnji, onda množenjem (2.4) s $Q(x) = (x^2+px+q)^\alpha \phi(x)$ dobivamo

$$P(x) = (Mx+N)\phi(x) + (x^2+px+q)\psi(x) = (Mx+N)\phi(x) + (x-a)(x-\overline{a})\psi(x).$$

Stavljanjem $x = a$ dobivamo $P(a) = (Ma+N)\phi(a)$, odakle je $M = \dfrac{1}{\mathrm{Im}\, a}\mathrm{Im}\left(\dfrac{P(a)}{\phi(a)}\right)$, $N = \mathrm{Re}\left(\dfrac{P(a)}{\phi(a)}\right) - \dfrac{\mathrm{Re}\, a}{\mathrm{Im}\, a}\mathrm{Im}\left(\dfrac{P(a)}{\phi(a)}\right)$. Iz (2.4) dobivamo $\psi(x)(x^2+px+q) = P(x) - (Mx+N)\phi(x)$ odakle zaključujemo da je $\psi(x)$ kvocijent kod dijeljenja polinoma $\Phi(x) = P(x) - (Mx+N)$ polinomom x^2+px+q. Dakle i $\psi(x)$ je jednoznažno određen.

Dokaz egzistencije rastava (2.4): Neka je $M = \dfrac{1}{\mathrm{Im}\, a}\mathrm{Im}\left(\dfrac{P(a)}{\phi(a)}\right)$, $N = \mathrm{Re}\left(\dfrac{P(a)}{\phi(a)}\right) - \dfrac{\mathrm{Re}\, a}{\mathrm{Im}\, a}\mathrm{Im}\left(\dfrac{P(a)}{\phi(a)}\right)$. Nije teško pokazati da je $P(a) - (Ma+N)\,\phi(a) = 0$. Osim toga je $M\mathrm{Re}\, a + N = \mathrm{Re}\left(\dfrac{P(a)}{\phi(a)}\right)$ i $M\mathrm{Im}\, a = \mathrm{Im}\left(\dfrac{P(a)}{\phi(a)}\right)$. Uočite da je $\dfrac{P(x)}{Q(x)} - \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha} = \dfrac{\Phi(x)}{(x^2+px+q)^\alpha \phi(x)}$, gdje je $\Phi(x) = P(x) - (Mx+N)\phi(x)$. Iz $\Phi(a) = P(a) - (Ma+N)\psi(a) = 0$ zaključujemo da su $a, \overline{a}$ nule od $\Phi(x)$. Neka je $\Phi(x) = (x^2+px+q)\psi(x)$, $\psi(a) \neq 0$, $\psi(\overline{a}) \neq 0$. Tada je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\alpha} + \frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}\phi(x)}.$$

Iz posljednje formule vidimo da je funkcija $\dfrac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}\phi(x)}$ razlika pravih racionalnih funkcija pa je i sama prava racionalna funkcija.

Primjer 2.44 *Rastavimo na parcijalne razlomke izraz* $\dfrac{x^3+x^2}{(x^2+4)^3}$:

Prema prethodnoj tvrdnji postoje realni brojevi M_1, N_1 takvi da je

$$\frac{x^3+x^2}{(x^2+4)^3}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+4)^3}+\frac{\psi(x)}{(x^2+4)^2}.$$

Ponovnom primjenom iste tvrdnje posljednji član se može zapisati u obliku

$$\frac{\psi(x)}{(x^2+4)^2}=\frac{M_2x+N_2}{(x^2+4)^2}+\frac{M_3x+N_3}{x^2+4}.$$

Dakle, postoje realni brojevi $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$ takvi da je

$$\frac{x^3+x^2}{(x^2+4)^3}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+4)^3}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+4)^2}+\frac{M_3x+N_3}{x^2+4}.$$

Množenjem posljednjeg izraza s $(x^2+4)^3$ dobivamo

$$x^3+x^2=M_3x^5+N_3x^4+(M_2+8M_3)x^3+(N_2+8N_3)x^2+(M_1+4M_2+16M_3)x+(N_1+4N_2+16N_3).$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz iste potencije dobivamo:

$$\begin{aligned}
0 &= M_3\\
0 &= N_3\\
1 &= M_2+8M_3\\
1 &= N_2+8N_3\\
0 &= M_1+4M_2+16M_3\\
0 &= N_1+4N_2+16N_3,
\end{aligned}$$

odakle je: $M_3=0$, $N_3=0$, $M_2=1$, $N_2=1$, $M_1=-4$ i $N_1=-4$. Dakle, rastav na parcijalne razlomke glasi

$$\frac{x^3+x^2}{(x^2+4)^3}=\frac{-4x-4}{(x^2+4)^3}+\frac{x+1}{(x^2+4)^2}.$$

Uzastopnom primjenom prethodne dvije tvrdnje nije teško dokazati tvrdnju o rastavu prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke:

Neka je $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ prava racionalna funkcija i

$$Q(x) = c(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\cdots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}$$

faktorizacija polinoma $Q(x)$ nad $\mathbb{R}$. Tada su jednoznačno određeni realni brojevi $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{\alpha_k}^{(k)}$, $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, \ldots, M_{\lambda_n}^{(n)}$, $N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, \ldots, N_{\lambda_n}^{(n)}$ takvi da je

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-a_1)} + \cdots \\ &+ \frac{A_1^{(k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{(x-a_k)} \\ &+ \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1}} + \cdots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \cdots \\ &+ \frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}} + \frac{M_2^{(n)}x+N_2^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1}} + \cdots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x+N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)}.\end{aligned}$$

Prethodni izraz je **rastav prave racionalne funkcije** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **na parcijalne razlomke**.

Primjer 2.45 *Rastavimo izraz* $\dfrac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ *na parcijalne razlomke.*

Parcijalne razlomke tražimo u obliku

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Množenjem gornje jednadžbe s $(x-1)^2(x^2+x+1)$ dobivamo

$$2x^3+4x^2+x+2 = A(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz jednake potencije od x dobivamo sustav od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice:

$$\begin{aligned}2 &= B + C\\ 4 &= A - 2C + D\\ 1 &= A + C - 2D\\ 2 &= A - B + D\end{aligned}$$

čije je rješenje: $A = 3,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 1$. Dakle,

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2+x+1}.$$

2.5 Eksponencijalna funkcija

Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju f definiranu formulom

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

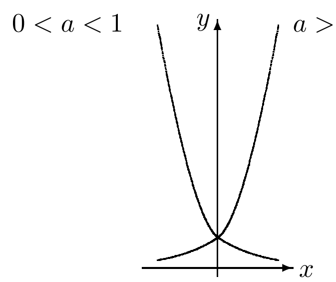
nazivamo **eksponencijalnom funkcijom s bazom** a.

Domena eksponencijalne funkcije je skup svih realnih brojeva. Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija je rastuća, dok je za $0 < a < 1$ ona padajuća (*Slika 2.12*). Svaka eksponencijalna funkcija je bijekcija sa skupa $\mathbb{R}$ na skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$ i ima sljedeća svojstva:

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ .... $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$,

2) $f(x_1 - x_2) = \dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$ .... $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$,

3) $f(0) = 1$ .... $a^0 = 1$.



Slika 2.12. Eksponencijalna funkcija

Primjer 2.46 *Tijekom vremena cijena nekog stroja opada tako da je t godina od početka upotrebe dana funkcijom* $Q(t) = Q_0 2^{-0.2t}$. *Odredimo početnu cijenu stroja koji nakon 10 godina upotrebe vrijedi 8 500 NJ.*

Treba pronaći Q_0. Kako je $Q(10) = 8\ 500$ imamo $8\ 500 = Q_0 2^{-2}$, odakle je $Q_0 = 34\ 000$.

Opis mnogih prirodnih problema zahtijeva upotrebu eksponencijalne funkcije kojoj je baza jedan iracionalan broj koji se označava slovom e. Broj e ćemo definirati u sljedećem poglavlju, a sada recimo da je $e \approx 2.718281828459$.

Za veličinu $Q(t)$ koja raste prema zakonu $Q(t) = Q_0 e^{kt}$, gdje su Q_0 i k pozitivne konstante, kažemo da **eksponencijalno raste**.

Za veličinu $Q(t)$ koja opada prema zakonu $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$, gdje su Q_0 i k pozitivne konstante, kažemo da **eksponencijalno opada**.

Primjer 2.47 *Biolozi su ustanovili da pod idealnim uvjetima broj bakterija u kulturi raste eksponencijalno.*

Ako je u trenutku $t = 0$ *u kulturi prisutno* 2 000 *bakterija, a* 20 *minuta kasnije* 6 000 *bakterija, koliko će biti bakterija nakon prvog sata?*

Neka je $Q(t)$ broj bakterija nakon t minuta. Prema pretpostavci je $Q(t) = Q_0 e^{kt}$, gdje su $Q(0) = Q_0$ broj bakterija u početnom trenutku $t = 0$ i k pozitivna konstanta. Trebamo izračunati $Q(60)$. Prema uvjetu zadatka je $6\,000 = 2\,000 e^{20k}$, odnosno $e^{20k} = 3$.

$$Q(60) = 2\,000 e^{60k} = 2\,000 \left(e^{20k}\right)^3 = 2\,000 \cdot 3^3 = 54\,000.$$

Primjer 2.48 *Pretpostavimo da će neka država za* t *godina imati približno* $P(t) = 4\,500\,000 e^{0.02t}$ *stanovnika. Procjenimo broj stanovnika za* 30 *godina.*

Za 30 godina ta država će imati $P(30) = 4\,500\,000\, e^{0.02 \cdot 30} \approx 8\,199\,535$ stanovnika.

Primjer 2.49 *Broj još neraspadnutih radioaktivnih atoma* N *nekog radioaktivnog elementa nakon vremenskog intervala* t *dan je s* $N = N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, *gdje su* N_0 *početni broj atoma i* $\lambda > 0$ *konstanta raspada. Vrijeme poluraspada* T *jest vrijeme za koje se od ukupnog broja na početku prisutnih atoma* N_0 *raspadne polovica* $(N = N_0/2)$. *Određuje se eksperimentalnim putem. Uočite da je* $0.5 = (e^{-\lambda})^T$, *odakle imamo* $N(t) = N_0 (0.5)^{t/T}$.

Kostur živog bića sadrži ugljik 12 (^{12}C), koji nije radioaktivan i radioaktivni ugljik 14 (^{14}C) čije je vrijeme poluraspada T *približno* 5 730 *godina. U trenutku smrti* $(t = 0)$ *ugljik 14 se počinje raspadati. Odredimo starost kostura koji sadrži* 12.5% *početne vrijednosti ugljika 14* $(\frac{1}{8} N_0)$.

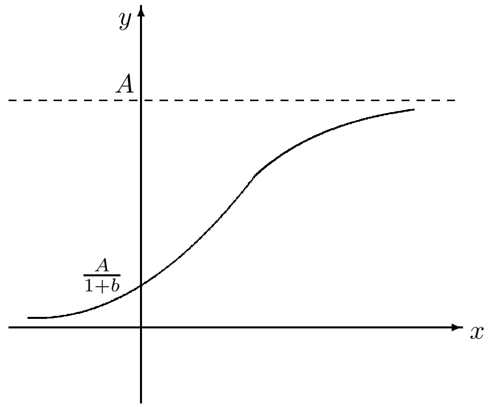
Neka je t vremenski interval nakon koga je $N(t) = \frac{1}{8} N_0$. Iz $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}$ dobivamo $2^3 = 2^{t/5730}$, odakle je $t = 17\,190$. Kostur je star 17 190 godina.

Primjer 2.50 *Prema Newtonovom zakonu hlađenja, tijekom vremena temperatura toplog tijela* $T = T(t)$ *eksponencijalno opada do temperature okoline. Ako je* u *temperatura okoline (u* $^\circ C$*) i* T_0 *početna temperatura tijela (u* $^\circ C$*), onda je* $T(t) = u + (T_0 - u)e^{-kt}$, *gdje je* k *pozitivna konstanta.*

Tijelo temperature $100^\circ C$ *stavljeno na sobnu temperaturu od* $30^\circ C$ *za* 5 min *ohladi se na* $80^\circ C$. *Odredimo temperaturu tijela nakon* 20 min.

$T_0 = 100$, $u = 30$. $T(5) = 80 = 30 + (100 - 30)e^{-k5}$, odakle je $e^{-k5} = \frac{5}{7}$. $T(20) = 30 + (100 - 30)(e^{-k5})^4 = 30 + 70 \left(\frac{5}{7}\right)^5 = 43^\circ\mathrm{C}$.

Primjer 2.51 *Graf funkcije oblika* $f(x) = \dfrac{A}{1 + b \cdot e^{-cx}}$, *gdje su* A, b *i* c *pozitivne konstante, poznat je pod nazivom* **logistička krivulja** *(Slika 2.13). Pravci* $y = A$ *i* $y = 0$ *su horizontalne asimptote. Graf siječe* y *os na visini* $\frac{A}{1+b}$.

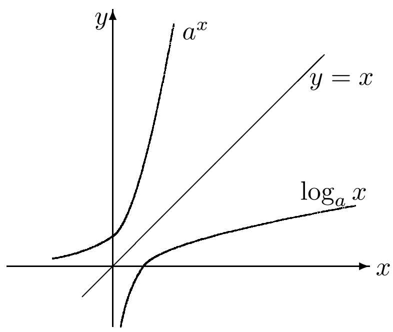


Slika 2.13. Logistička krivulja

Logistička krivulja se često uzima za opisivanje pojava koje teže zasićenju kao npr. rast populacije u životnom prostoru s ograničenim životnim resursima.

2.6 Logaritamska funkcija

Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0$ i $a \neq 1$, je bijekcija sa skupa $\mathbb{R}$ na skup svih pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$ pa prema tome ima inverznu funkciju koju nazivamo **logaritamskom funkcijom** i označavamo sa $\log_a x$. Domena logaritamske funkcije $\log_a x$ je interval $< 0, \infty >$, a njena slika je $\mathbb{R}$. Ona je strogo rastuća za $a > 1$ i strogo padajuća za $0 < a < 1$. Grafovi jedne eksponencijalne i njoj inverzne funkcije za $a > 1$ prikazani su na *Slici 2.14*.



Slika 2.14.

Logaritme su otkrili oko 1590. godine škotski lord J. Napier (1550-1617) i J. Bürgi (1552-1632), neovisno jedan od drugog. Njihov pristup logaritmima se ne zasniva na vezi s eksponencijalnom funkcijom. Za Napierove tablice iz 1614. godine, koje su sadržavale logaritme sinusa, zainteresirao se londonski profesor H. Briggs. Zajedničkim radom razvijaju ideju dekadskih logaritama za koje 1617. godine izdaju tablice koje su u matematici bile nezaobilazne sve do pojave kalkulatora.

Neka je $f(x) = a^x$ eksponencijalna funkcija i $f^{-1}(x) = \log_a x$ njoj inverzna logaritamska funkcija. Za $x > 0$ iz $f(f^{-1}(x)) = x$ dobivamo:

$$\boxed{a^{\log_a x} = x, \ x > 0}$$

tj. logaritam od x s obzirom na bazu a jednak je eksponentu, kojim treba bazu a potencirati, da se dobije x.

Iz $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$, dobivamo:

$$\boxed{\log_a a^x = x \text{ za svaki } x.}$$

Primjer 2.52 *Pokažimo da za računanje s logaritmima vrijede ova pravila:*

1) Logaritam umnoška jednak je zbroju logaritama pojedinih faktora:

$$\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$$

2) Logaritam kvocijenta jednak je logaritmu brojnika minus logaritam nazivnika:

$$\boxed{\log_a \tfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

3) Logaritam potencije jednak je umnošku eksponenta s logaritmom baze:

$$\boxed{\log_a x^y = y \log_a x}$$

4) Za logaritme istog broja s obzirom na različite baze vrijedi:

$$\boxed{\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a}$$

Za broj $\log_b a$ *kažemo da je* **modul** *za prijelaz iz sustava s bazom a u sustav s bazom* *b. Specijalno, za* $x = b$ *dobivamo* $1 = \log_a b \log_b a$.

1) Budući da je $x = a^{\log_a x}$ i $y = a^{\log_a y}$, onda je $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. S druge strane je $xy = a^{\log_a (xy)}$; dakle je $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.
2) Iz $x = a^{\log_a x}$ i $y = a^{\log_a y}$ izlazi $\frac{x}{y} = a^{\log_a x - \log_a y}$, tj. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
3) Tvrdnja slijedi iz $x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x}$.
4) Treba logaritmirati $x = a^{\log_a x}$ s obzirom na bazu b i primjeniti prethodno pravilo.

Logaritme s obzirom na bazu $a = 10$ nazivamo **dekadskim** ili **Briggsovim logaritmima** i umjesto $\log_{10} x$ pišemo $\log x$. Ako je $a = e$, odgovarajuće logaritme nazivamo **prirodnim** ili **Napierovim logaritmima** i umjesto $\log_e x$ pišemo $\ln x$.

Primjer 2.53 *Najmanja jakost zvuka što ga može detektirati ljudsko uho iznosi oko* $I_0 = 10^{-12}$ Wm^{-2}. *Buka* $L(I)$, *mjerena u decibelima, zvuka jakosti* I Wm^{-2} *definira se kao* $L(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$. *Tako npr. gradski promet stvara buku od otprilike 90 decibela, a rok muzika od oko 110 decibela, dok običnom razgovoru odgovara oko 60 decibela.*

Primjer 2.54 *Kiselost otopine ovisi o koncentraciji vodikovih iona. Budući su te koncentracije male, u kemiji se definira nova veličina* **pH** *kao negativni logaritam molarne koncentracije vodikovih iona. Matematički iskazano,* $pH = -\log([H_3O^+])$, *gdje je* $[H_3O^+]$ *koncentracija vodikovih iona izražena u* mol dm^{-3}. *Za čistu vodu je* $pH = 7.0$ *Otopine s pH većim od 7 nazivamo lužnatim, a one s pH manjim od 7 kiselim. Ilustracije radi, navedimo pH vrijednosti za neke otopine: juice od naranče–*$pH \approx 3.50$, *krv–*$pH = 7.41$, *mlijeko–*$pH \approx 6.4$, *normalna kiša ima pH oko* 3.6, *dok u zadnje vrijeme pH iznosi oko* 3.1 *(tzv. kisele kiše).*

Primjer 2.55 *Pod određenim uvjetima brzina vjetra* v *(u* ms^{-1}*) na visini* h *metara od površine tla dana je s* $v = K \cdot \ln(h/h_0)$, *gdje su* K *pozitivna konstanta (ovisna o gustoći zraka itd.) i* h_0 *parametar ovisan o vegetaciji terena. Za* $h_0 = 0.007$ m *(vrijednost za travnjak s 3* cm *visokom travom) i* $K = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$ *odredimo* a) *visinu na kojoj je brzina vjetra* $12\,\mathrm{ms}^{-1}$ b) *visinu na kojoj nema vjetra.*

a) Iz $12 = 3\ln(h/0.007)$, dobivamo $h = 0.007 \cdot e^4 \approx 0.38\,\mathrm{m}$. b) Na visini $h = h_0 = 0.007\,m$.

Za jednadžbu u kojoj dolaze logaritmi izraza koji sadrže nepoznanicu kažemo da je **logaritamska jednadžba**. Ako se jednadžba da svesti na oblik $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, onda se zbog svojstva bijektivnosti logaritamske funkcije može rješavati ekvivalentna jednadžba $f(x) = g(x)$.

Za jednadžbu u kojoj nepoznanica dolazi u eksponentu kažemo da je **eksponencijalna jednadžba**. Ona se može rješavati pomoću logaritama, ako se da svesti na oblik $a^{f(x)} = b$, odakle je $f(x) \log a = \log b$. Eksponencijalna jednadžba se može rješavati i bez logaritama, ukoliko se da svesti na oblik $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, odakle zbog svojstva bijektivnosti eksponencijalne funkcije izlazi $f(x) = g(x)$.

Primjer 2.56 *Riješimo jednadžbe*

a) $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{5}{2}$ *b)* $\log_5 \log_6 \log_7 x = 0$

c) $\left(3^{x+2}\right)^2 \cdot \left(9^{x+2}\right)^{x+2} = \left(27^{2x+1}\right)^{x-3}$ *d)* $4^x - 3^x = 3^x - 2^{2x-1}$

a) $\log_x 5 = \dfrac{1}{\log_5 x}$. Ako stavimo $u = \log_5 x$, imamo $u + \frac{1}{u} = 5/2$, $u_1 = 1/2$, $u_2 = 2$. Iz $\log_5 x = 1/2$ izlazi $x_1 = 5^{1/2} = \sqrt{5}$, a iz $\log_5 x = 2$ izlazi $x_2 = 5^2 = 25$.

b) $\log_5 \log_6 \log_7 x = \log_5 1$, $\log_6 \log_7 x = 1 = \log_6 6$, $\log_7 x = 6$, $x = 7^6$.

c) $3^{2x+4} \cdot 3^{2x^2+8x+8} = 3^{6x^2-15x-9}$, $3^{2x^2+10x+12} = 3^{6x^2-15x-9}$, $2x^2 + 10x + 12 = 6x^2 - 15x - 9$, $4x^2 - 25x - 21 = 0$, $x_1 = -3/4$, $x_2 = 7$.

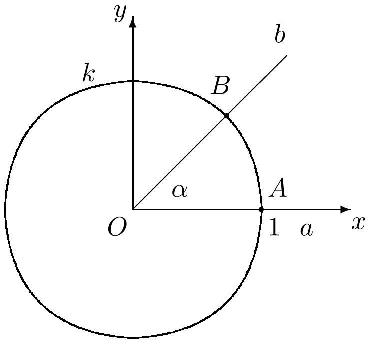
d) $4^x - 3^x = 3^x - 2^{2x-1}$, $2^{2x} - 3^x = 3^x - 2^{2x-1}$, $2^{2x-1}(2+1) = 2 \cdot 3^x$, $2^{2x-2} = 3^{x-1}$, $4^{x-1} = 3^{x-1}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} = 1$, $x - 1 = 0$, $x = 1$.

2.7 Trigonometrijske funkcije

U ovoj točki definirat ćemo trigonometrijske funkcije realnog broja i trigonometrijske funkcije kuta. Najprije ponovimo osnovno o kutu.

2.7.1 Kut i mjera kuta

Neka su O središte jedinične kružnice k (radijus $r = 1$) i $\overset{\frown}{AB}$ bilo koji luk. Uvedimo Kartezijev koordinatni sustav u ravnini s ishodištem u točki O tako da točka A leži na x-osi (*Slika 2.15*).



Slika 2.15.

Uniju svih polupravaca kojima je O početna točka i s lukom $\overset{\frown}{AB}$ imaju zajedničku točku nazivamo **kutom** i označavamo sa $\sphericalangle AOB$. Točka O je **vrh**, a polupravci a i b su **kraci** tog kuta. Uobičajeno je kutove označavati malim grčkim slovima, npr. α, β.

Za kut kažemo da je **orijentiran** ako je određeno koji mu je krak prvi, a koji drugi. Orijentirani kut kojem je a prvi krak, a b drugi, označavamo s $\sphericalangle(a, b)$ ili s $\sphericalangle(AOB)$.

U daljnjem pod kutom podrazumijevamo orijentirani kut. Koordinatni sustav se uvodi tako da x-os sadrži prvi krak a kuta. Korisno je smatrati da orijentirani kut $\alpha = \sphericalangle(a, b)$ nastaje rotacijom x-osi do pozicije određene drugim krakom b. Ako se ta rotacija odvija u smjeru suprotnom onom kazaljke na satu (**pozitivan smjer**), onda kažemo da je kut **pozitivan**. Ukoliko se rotacija odvija u smjeru kazaljke na satu (**negativan smjer**), onda kažemo da je kut **negativan**.

Ako su A i B dijametralno suprotne točke, onda kut $\sphericalangle(AB)$ nazivamo **ispruženim kutom**.

Uniju svih polupravaca kojima je O početna točka i sijeku kružnicu nazivamo **punim kutom**.

Da bismo s kutovima mogli računati (zbrajati i oduzimati ih) pridružujemo im mjerni broj.

Kutna ili **geometrijska** jedinica za mjeru kuta je jedan **stupanj**. Simbol za stupanj je $^\circ$.

> Za kut koji nastaje rotacijom x-osi u pozitivnom smjeru za $\frac{1}{360}$ dio potpunog okreta kažemo da ima mjeru od jednog **stupnja**.

Tako npr. ispruženi kut ima 180°, dok puni kut ima 360°.

Stari Babilonci su uočili da se otprilike svakih 360 dana ponavljaju godišnja doba. Vjerovali su da se Zemlja nalazi u središtu svemira koji se za 360 dana okrene oko Zemlje. Vjerojatno od tuda dolazi stupanj za jedinicu mjere kuta.

Stupanj se dijeli na **minute** (simbol je $'$), a one na **sekunde** (simbol je $''$)

$$\boxed{1^\circ = 60' \,, \qquad 1' = 60''}$$

Druga, **analitička** ili **lučna** jedinica za mjeru kuta je jedan **radijan**.

> Neka je $l(\alpha)$ duljina luka što ga kut $\alpha = \sphericalangle(a, b)$ odsijeca od jedinične kružnice sa središtem u vrhu kuta α. Kažemo da kut α ima $l(\alpha)$ **radijana**.

Primjer 2.57 *Opseg jedinične kružnice ($r = 1$) iznosi 2π, stoga puni kut ima 2π radijana, a ispruženi kut π radijana.*

Budući da puni kut ima $360°$ ili 2π radijana, to je $360° = 2\pi$ radijana, odnosno $180° = \pi$ radijana. Iz posljednje relacije dobivamo formule za pretvaranje stupnjeva u radijane i obratno:

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180}\ \text{radijana} \qquad 1\ \text{radijan}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}}$$

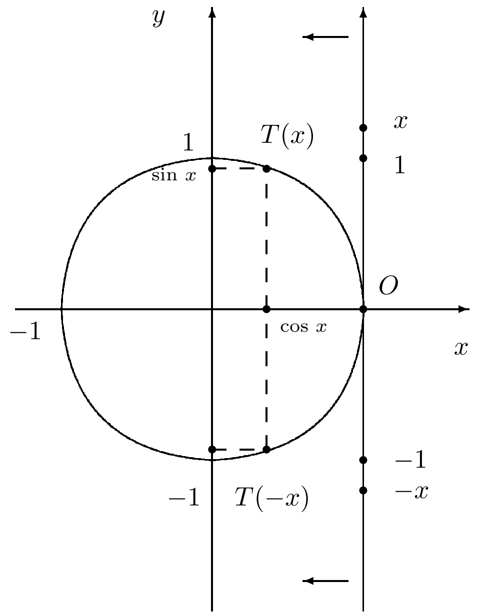
Primjer 2.58 *Provjerite:*

$0° = 0$ radijana	$30° = \frac{\pi}{6}$ radijana	$45° = \frac{\pi}{4}$ radijana
$60° = \frac{\pi}{3}$ radijana	$90° = \frac{\pi}{2}$ radijana	$180° = \pi$ radijana

2.7.2 Definicija trigonometrijskih funkcija

Uzmimo jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava u ravnini. Sada pravac naslonimo na kružnicu tako da ishodište koordinatnog sustava na pravcu padne u točku $O(1, 0)$. Pravac namatamo na kružnicu kao na *Slici 2.16.* Na svaku točku kružnice padne beskonačno mnogo točaka brojevnog pravca. Jediničnu kružnicu na koju su na navedeni način smješteni realni brojevi nazivamo **brojevnom kružnicom**. Realnom broju x prilikom namatanja pravca na kružnicu pripada točka $T(x)$. Apscisu točke $T(x)$ označimo sa $\cos x$, a ordinatu sa $\sin x$. Apscisa točke $T(x)$ je funkcija koja ovisi od x. Tu funkciju nazivamo **kosinusom**. I ordinata točke $T(x)$ je funkcija koja ovisi od x. Tu funkciju nazivamo **sinusom**. Točka $T(x)$ pripada brojevnoj kružnici pa je

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$



Slika 2.16. Brojevna kružnica

Iz $\sin(-x) = -\sin x$ i $\cos(-x) = \cos x$ (vidi *Sliku 2.16*) slijedi da je sinus neparna funkcija, a kosinus parna funkcija.

Točke $T(x+\pi)$ i $T(x)$ simetrično su smještene s obzirom na ishodište koordinatnog sustava u ravnini, odakle zaključujemo da je

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(x+\pi) = -\sin x \\ \cos(x+\pi) = -\cos x.\end{gathered}}$$

Budući da je opseg kružnice 2π, točki $T(x)$ pridruženi su svi realni brojevi oblika $x + 2k\pi$, gdje je k bilo koji cijeli broj, tj. $T(x+2k\pi) = T(x)$. Prema tome je

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(x+2k\pi) = \sin x \\ \cos(x+2k\pi) = \cos x.\end{gathered}}$$

Kažemo da su sinus i kosinus **periodičke funkcije s periodom** 2π.

Općenito, za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je **periodička funkcija s periodom** $\tau \neq 0$ ako vrijede ova dva uvjeta:

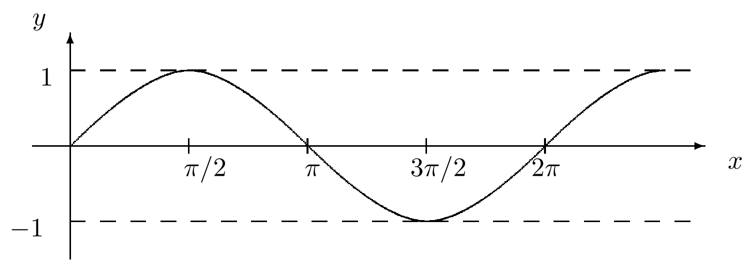
1) $(x \in D) \Rightarrow (x + \tau \in D)$,

2) $f(x + \tau) = f(x)$.

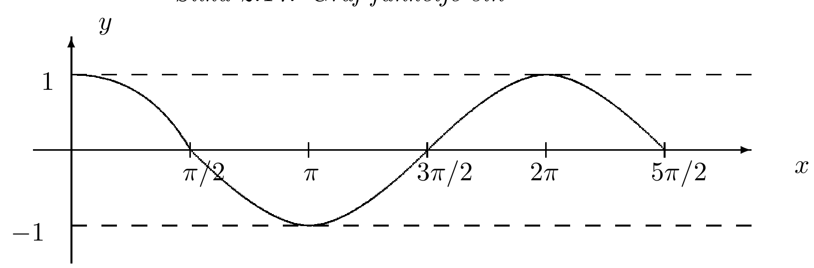
Od svih brojeva τ s navedena dva svojstva, za najmanji pozitivni τ_0 kažemo da je **temeljni period** funkcije f.

Primjedba 2.1 *Može se pokazati da je realan broj τ period periodičke funkcije f onda i samo onda ako je $\tau = k \cdot \tau_0$ za neki $k \in \mathbf{Z}$, gdje je τ_0 temeljni period.*

Zbog periodičnosti dovoljno je nacrtati grafove tih funkcija u segmentu $[0, 2\pi]$ (*Slika 2.17* i *Slika 2.18*).



Slika 2.17. Graf funkcije sin



Slika 2.18. Graf funkcije cos

Primjer 2.59 *Odredimo skup svih rješenja jednadžbe* a) $\sin x = 1$, b) $\cos x = -1$.

a) Treba pronaći sve x koji namatanjem pravca na brojevnu kružnicu padnu u točku $(0, 1)$. To su $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

b) Treba pronaći sve x koji namatanjem pravca na brojevnu kružnicu padnu u točku $(-1, 0)$. To su $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Primjer 2.60 *Ako je na određenom mjestu duljina dana D (u minutama) t dana* *poslije Nove godine približno zadana formulom:*

$$D = 720 + 200 \sin\left[\frac{(t-79.5)\pi}{183}\right], \qquad 0 \le t \le 365,$$

odredimo a) *najdulji i* b) *najkraći dan.*

a) $(t-79.5)\pi/183 = \pi/2+2k\pi \Rightarrow t = 171+k366,\ k \in \mathbf{Z}$. Budući da mora biti $0 \le t \le 365$, to je $t = 171$. Dakle, 171 dan poslije Nove godine (20. lipnja) je najdulji dan.

b) $(t-79.5)\pi/183 = 3\pi/2+2k\pi \Rightarrow t = 354+k366,\ k \in \mathbf{Z}$. Najkraći dan nastupa 351-vog dana poslije Nove godine, tj. 20. prosinca.

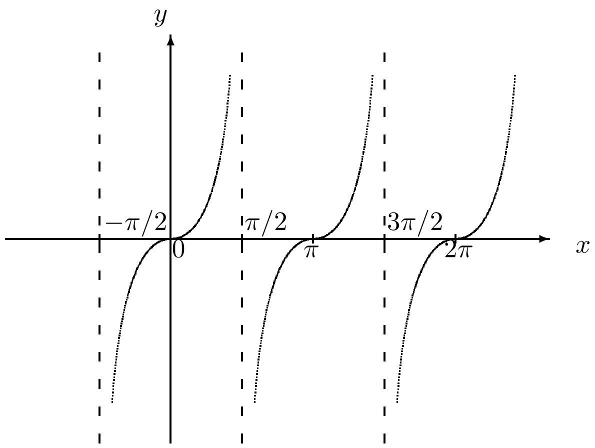
Pomoću funkcija sin i cos definiraju se funkcije **tangens** i **kotangens** formulama:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{(tangens od } x\text{)} \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{(kotangens od } x\text{)} \end{aligned}}$$

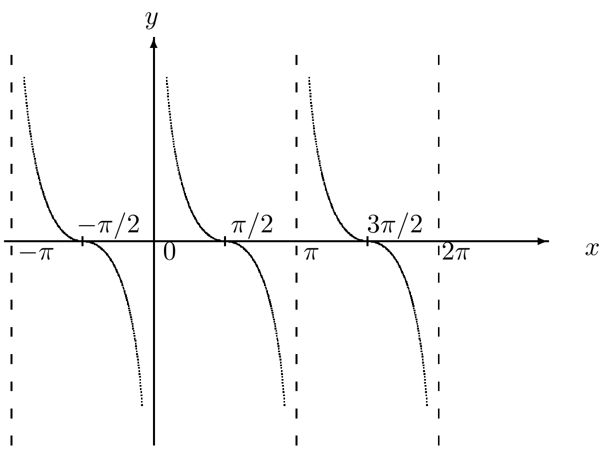
Zamijetite da funkcija tangens nije definirana za one realne brojeve za koje je $\cos x = 0$, tj. za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Funkcija kotangens je definirana za svaki x za koji je $\sin x \neq 0$, tj. nije definirana za $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Iz $\operatorname{tg}(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$ zaključujemo da je tangens neparna funkcija. Slično se pokaže da je i kotangens neparna funkcija.

Budući da je $\operatorname{tg}(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$ za svaki x, tangens je periodička funkcija s periodom π. Može se pokazati da je π temeljni period funkcije tangens. Slično, i kotangens je periodička funkcija s temeljnim periodom π, tj. $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$ za svaki x. (vidi *Sliku 2.19* i *Sliku 2.20*)



Slika 2.19. Graf funkcije tg



Slika 2.20. Graf funkcije ctg

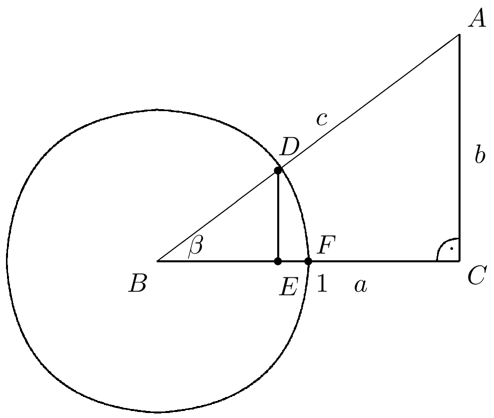
Funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens zajedničkim imenom nazivamo **trigonometrijskim funkcijama**.

2.7.3 Trigonometrijske funkcije kuta

U nekim primjenama je korisno "zamijeniti" domenu trigonometrijskih funkcija, skup $\mathbb{R}$ sa skupom svih kutova. To je lako učiniti ako kutu pridružimo mjeru u radijanima.

> Pod sinusom, kosinusom, tangensom i kotangensom kuta α podrazumijevamo, redom, sinus, kosinus, tangens, kotangens njegove mjere u radijanima.

Primjer 2.61 *Neka je $\Delta(ABC)$ pravokutan trokut s pravim kutom uz vrh C (vidi Sliku 2.21) i neka je u vrhu B središte jedinične kružnice.*



Slika 2.21.

Duljine stranica su: $d(BC) = a$, $d(CA) = b$, $d(AB) = c$. Kut $\beta = \sphericalangle CBA$ ima $l(\overset{\frown}{FD})$ radijana. Trokuti $\Delta(ABC)$ i $\Delta(DBE)$ su slični pa je

$$\frac{d(AC)}{d(AB)} = \frac{d(ED)}{d(BD)} = d(E,D) = \sin\left(l(\overset{\frown}{FD})\right),$$

$$\frac{d(BC)}{d(AB)} = \frac{d(BE)}{d(BD)} = d(B,E) = \cos\left(l(\overset{\frown}{FD})\right).$$

Prema navedenoj definiciji je:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\textit{dulj. suprotne katete}}{\textit{dulj. hipotenuze}},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{\textit{dulj. susjedne katete}}{\textit{dulj. hipotenuze}},$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{\textit{dulj. suprotne katete}}{\textit{dulj. susjedne katete}},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \frac{\textit{dulj. susjedne katete}}{\textit{dulj. suprotne katete}}.$$

Primjer 2.62 *Sa Slike 2.22 lako se možemo uvjeriti u valjanost vrijednosti trigonometrijskih funkcija navedenih u tablici.*

Slika 2.22.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

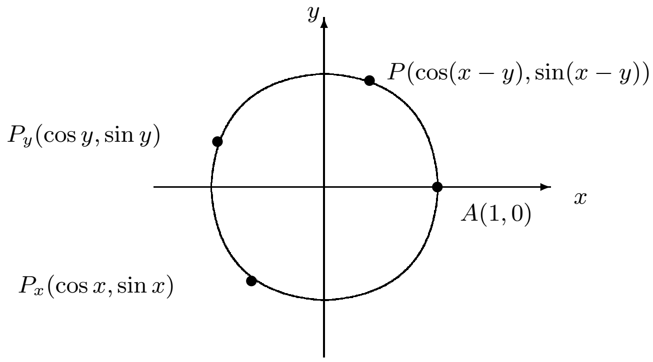
2.7.4 Adicione formule

Osnovna svojstva funkcija sinus i kosinus izražena su tzv. **adicionim formulama**:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Skica dokaza. Bez smanjenja općenitosti, neka su $x, y \in [0, 2\pi]$ i neka je $y \leq x$.

Na brojevnoj kružnici odaberimo točke P_x, P_y i P takve da je x duljina luka $\overset{\frown}{AP_x}$, y duljina luka $\overset{\frown}{AP_y}$ i $x - y$ duljina luka $\overset{\frown}{AP}$.



Slika 2.23.

Lukovi $\overset{\frown}{AP}$ i $\overset{\frown}{P_yP_x}$ imaju istu duljinu pa je $d(A, P) = d(P_x, P_y)$, odakle se pomoću formule za udaljenost dviju točaka dobiva (provjerite!):

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Stavi li se u gornju formulu $-y$ umjesto y i iskoriti činjenica da je kosinus parna, a sinus neparna funkcija dobivamo i drugu adicionu formulu za kosinus (provjerite!).

Da bismo dokazali adicione formule za sinus, dokažimo prvo da je:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u. \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u. \end{array}}$$

Prvu formulu dobivamo primjenom adicione formule za kosinus, a druga slijedi iz prve zamjenjujući u s $\pi/2 - u$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \cos\left[\pi/2 - (x + y)\right] = \cos[(\pi/2 - x) - y] \\ &= \cos(\pi/2 - x) \cos y + \sin\left(\pi/2 - x\right) \sin y \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

Zamjenom y s $-y$ dobivamo drugu adicionu formulu za sinus.

Primjer 2.63 *Zapišemo li* $15° = 60° - 45°$ *i primjenimo li adiconu formulu za kosinus dobivamo:*

$$\begin{aligned} \cos 15° = \ & \cos\left(60° - 45°\right) = \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45° \\ & = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

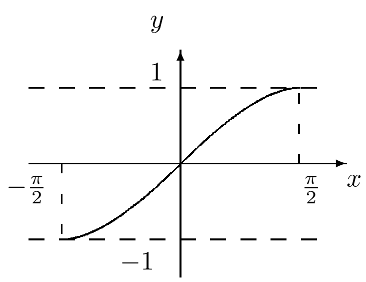
Iz adicionih formula za sinus i kosinus dobivamo adicione formule za tangens i kotangens (provjerite!):

$$\boxed{\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \qquad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}}$$

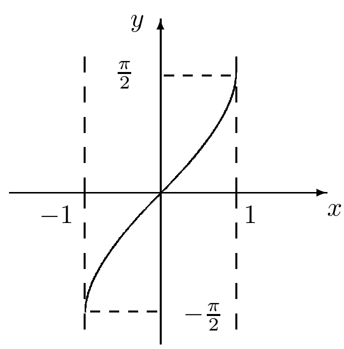
2.8 Ciklometrijske funkcije

U točki 2.1 dokazali smo da je svaka strogo monotona surjekcija definirana na podskupu skupa $\mathbb{R}$ ujedno i bijekcija. Ovu činjenicu ćemo iskoristiti kod definicije ciklometrijskih funkcija.

Restrikcija Sin funkcije sin na segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je strogo rastuća i preslikava ga na segment $[-1, 1]$. Prema tome, ta restrikcija je bijekcija sa segmenta $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na segment $[-1, 1]$. Njen inverz nazivamo **arkussinus** i označavamo s arc sin.



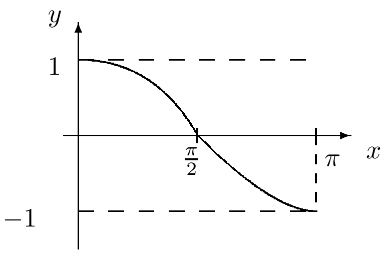
Slika 2.24. Sin



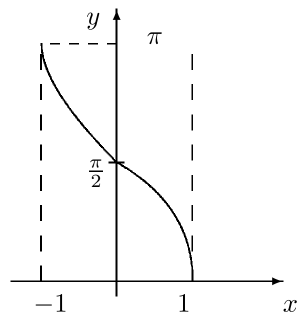
Slika 2.25. arc sin

Arkussinus je strogo rastuća i neparna funkcija na $[-1, 1]$.

Restrikcija Cos funkcije cos na segment $[0, \pi]$ je strogo padajuća i preslikava ga na segment $[-1, 1]$. Dakle, ta restrikcija je bijekcija sa segmenta $[0, \pi]$ na segment $[-1, 1]$. Njen inverz nazivamo **arkuskosinus** i označavamo s arc cos.



Slika 2.26. Cos



Slika 2.27. arc cos

Arkuskosinus je strogo padajuća funkcija na $[-1, 1]$.

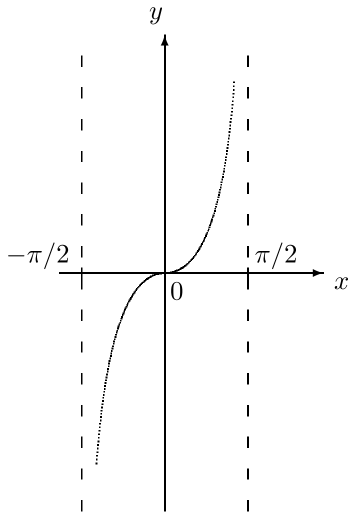
Primjer 2.64 *Pokažimo da za svaki realan broj x vrijedi:* $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Neka je $\alpha = \arcsin x$ i $\beta = \arccos x$. Tada je $x = \sin \alpha$, $x = \cos \beta$. Nadalje je $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - x^2}$ i $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - x^2}$.

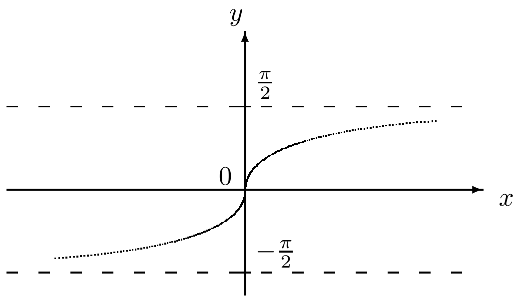
$$\begin{aligned} \arcsin x + \arccos x &= \alpha + \beta = \arcsin[\sin(\alpha + \beta)] = \arcsin[\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta] \\ &= \arcsin\left(x \cdot x + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Restrikcija Tg funkcije tg na interval $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ strogo raste i preslikava ga na skup $\mathbb{R}$. Prema tome, ta restrikcija je bijekcija s intervla $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ na $\mathbb{R}$. Njen inverz nazivamo **arkustangens** i označavamo s arc tg (*Slika 2.29*).

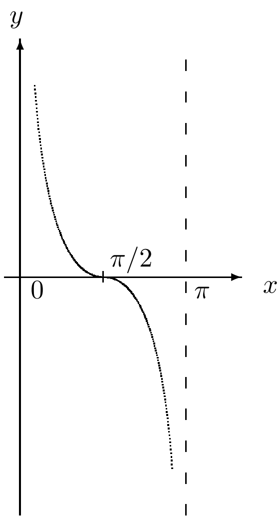
Restrikcija Ctg funkcije ctg na interval $< 0, \pi >$ strogo raste i preslikava ga na skup $\mathbb{R}$. Dakle, ta restrikcija je bijekcija s intervla $< 0, \pi >$ na $\mathbb{R}$. Njen inverz nazivamo **arkuskotangens** i označavamo s arc ctg (*Slika 2.31*).



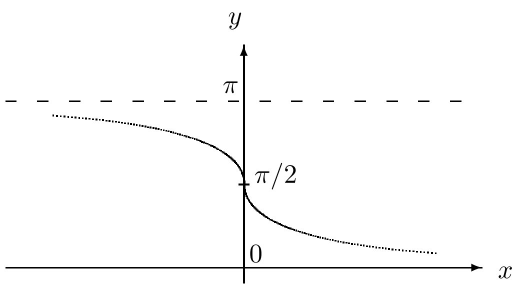
Slika 2.28. Tg



Slika 2.29. arc tg



Slika 2.30. Ctg



Slika 2.31. arc ctg

Funkcije arc sin, arc cos, arc tg i arc ctg nazivamo zajedničkim imenom **ciklometrijske funkcije**.

2.9 Parametarsko zadavanje funkcija

Za funkciju f kažemo da je **parametarski zadana** ako su i nezavisna varijabla x i zavisna varijabla $y = f(x)$ prikazane kao funkcije treće varijable t, koju nazivamo **parametar**. Formula za $f(x)$ nije zadana. Dakle, parametarski zadana funkcija predstavljena je sustavom funkcija:

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t), \quad t \in D,\ D \subseteq \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Ako postoji inverzna funkcija od $\phi(t)$, onda je lako prikazati f kao funkciju od x. Naime, iz $t = \phi^{-1}(x)$ dobivamo $y = \psi(t) = \psi(\phi^{-1}(x))$, odakle je $f(x) = \psi(\phi^{-1}(x))$.

Primjer 2.65 *Kod kosog hica u vakumu položaj težišta tijela zadan je jednakostima:*

$$x = (v_0 \cos\alpha)t,\ \ y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

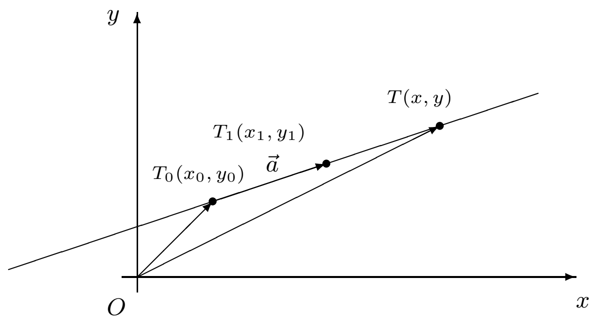
gdje su v_0 početna brzina tijela, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ izlazni kut, g ubrzanje sile teže i t vrijeme. Izlučimo li iz prve jednakosti t i uvrstimo u drugu jednakost dobivamo:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2$$

odakle vidimo ovisnost visine težišta tijela y o njegovoj udaljenosti od ishodišta koordinatnog sustava x.

Primjer 2.66 *Odredimo jednadžbu pravca kroz točke $T_0(x_0, y_0)$ i $T_1(x_1, y_1)$.*

Neka je $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, gdje su $a_x = x_1 - x_0$ i $a_y = y_1 - y_0$, vektor smjera pravca i $T(x, y)$ bilo koja točka pravca (*Slika 2.32*)



Slika 2.32.

Vektori $\vec{a}$ i $\overrightarrow{T_0T}= (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$ su kolinearni pa postoji realan broj t takav da je $\overrightarrow{T_0T}= t\vec{a}$, odakle raspisivanjem po koordinatama dobivamo parametarske jednadžbe pravca:

$$x = x_0 + ta_x, \qquad y = y_0 + ta_y, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Eliminacijom iz prve jednakosti parametra t i uvrštavanjem u drugu jednakost dobivamo $y = y_0 + \frac{a_y}{a_x}(x - x_0)$, odnosno

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1).$$

To je dobro nam znana jednadžba pravca koji prolazi točkama $T_0(x_0, y_0), T_1(x_1, y_1)$.

Zadaci za vježbu 2.2 - 2.9

1. Zadan je polinom $f(x)=x^3+5x^2-1$. Izračunajte: a) $f(2)$, b) $f(-2)$, c) $f(x+2)$, d) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, e) $f(a)+f(-h)$.

2. Odredite polinom $f(x)$ trećeg stupnja takav da je $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$, $f(2) = 6$, $f(3) = 21$.

3. Pomnožite polinome:

   a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$, $g(x) = x - 2$ b) $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x + 1$
   c) $f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 8x + 1$, $g(x) = x - 5$ d) $f(x) = x^5 - 1$, $g(x) = x - 1$
   e) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 6x - 3$, $g(x) = x-1/2$ f) $f(x) = x + 8$, $g(x) = x + 2$
   g) $f(x) = 2x^3 - 7x^2$, $g(x) = x^2 - 1$ h) $f(x) = x^{47} - 1$, $g(x) = x^3 - 1$.

4. Za polinome iz prethodnog zadatka nađite kvocijent $q(x)$ i ostatak $r(x)$ kod dijeljenja polinoma $f(x)$ polinomom $g(x)$.

5. Odredite sve $n \in \mathbb{Z}$ za koje je $\dfrac{n^2+2n+1}{n+3} \in \mathbb{Z}$.

6. Za $f(x) = x^3$ i $g(x) = 5x^2 + 2x + 1$ pronađite $(g \circ f)(x)$ i $(f \circ g)(x)$.

7. Ako je $z \in \mathbb{C}$ nula polinoma nad $\mathbb{R}$ (koeficijenti su realni brojevi), onda je i $\overline{z}$ nula tog polinoma. Ta tvrdnja nije točna za polinome nad $\mathbb{C}$ (koeficijenti su kompleksni brojevi). Uvjerite se na primjeru: $1+i$ je nula polinoma $x^3 - x^2 - ix^2 - 9x + 9 + 9i$, dok $1 - i$ nije nula tog polinoma.

8. Odredite polinom $f(x)$ petog stupnja takav da je 1 nula kratnosti 2, 2 nula kratnosti 3 i $f(-1) = 54$.

9. **Teorem o racionalnim nulama.** Neka je $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Ako je p/q ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ i $M(p, q) = 1$) racionalna nula polinoma $f(x)$, onda je p djelitelj slobodnog člana a_0 i q je djelitelj vodećeg koeficijenta a_n.

   Uputa. Iz $a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$ množenjem s q^n dobivamo $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$. Odatle je $a_0q^n = -p(a_np^{n-1} +$

$a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1})$. Budući da p ne dijeli q^n (jer ne dijeli q), zaključujemo da p dijeli a_0. Slično se pokaže da q dijeli a_n.

Ilustrirajmo teorem primjerom. Neka je $f(x) = 2x^3 + x^2 - 18x - 9$. Budući da je -9 djeljiv brojevima: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$, a 2 s brojevima $\pm 1, \pm 2$, ako polinom f ima racionalnu nulu p/q onda je $p/q \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 9/2\}$. Da li polinom f ima racionalnih nula?

10. Upotrijebite teorem o racionalnim nulama i pokažite da je nula polinoma s cjelobrojnim koeficijentima i vodećim koeficijentom 1 ili cijeli broj ili iracionalan broj.

11. Neka je $f(x) = x^2 - n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Brojevi $\pm\sqrt{n}$ su nule tog polinoma. Budući da je vodeći koeficijent 1, to je $\sqrt{n}$ ili cijeli broj ili iracionalan broj. Dakle, ako n nije kvadrat nekog prirodnog broja, onda je $\sqrt{n}$ iracionalan broj.

12. Riješite jednadžbe:

    a) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$ b) $9x^4 + 3x^3 - 65x^2 + 72x - 16 = 0$
    c) $4x^3 - 3x - 1 = 0$ d) $27x^4 - 72x^2 + 64x - 16 = 0$

    Uputa: Primjenite teorem o racionalnim nulama.

13. **Descartesovo pravilo.** Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom nad $\mathbb{R}$ (koeficijenti su realni brojevi) zapisan u opadajućem poretku potencija od x. Prema ovom pravilu, broj promjena predznaka koeficijenata polinoma $f(x)$ [polinoma $f(-x)$] iz pozitivne u negativnu vrijednost ili obratno povezan je s brojem pozitivnih [negativnih] nula. Članovi s koeficijentom 0 se ignoriraju. Tako npr. polinom $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ ima jednu promjenu predznaka koeficijenata, dok polinom $f(-x) = x^4 - x^3 + x - 1$ ima tri promjene predznaka koeficijenata.

    Broj strogo pozitivnih [strogo negativnih] realnih nula polinoma $f(x)$ je ili jednak broju promjena predznaka koeficijenata polinoma $f(x)$ [polinoma $f(-x)$] ili je od njega manji za paran broj. Pri tome se svaka nula broji onoliko puta kolika joj je kratnost.

    Tako npr. za polinom $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ prema Decartesovom pravilu zaključujemo da ima jednu pozitivnu realnu nulu i tri ili jednu negativnu realnu nulu. Provjerite da su 1 i -1 jedine realne nule tog polinoma.

14. Rastavite na parcijalne razlomke:

    a) $\dfrac{2x-1}{x^3-x}$ b) $\dfrac{x+2}{x^3-2x^2+x}$ c) $\dfrac{x^3-8}{x^2(x-1)^3}$ d) $\dfrac{3x-5}{x^3-1}$
    e) $\dfrac{x^3+x^2}{(x^2+4)^2}$ f) $\dfrac{x^2}{(x^2+4)^3}$ g) $\dfrac{x^3+1}{x^3(x^2+1)^2}$ h) $\dfrac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$.

15. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Za realan broj $a > 0$ izračunajte:

a) $f(1/a)$	b) $1/f(a)$	c) $f(a^2)$	d) $(f(a))^2$
e) $f(\sqrt{a})$	f) $\sqrt{f(a)}$	g) $f(2a^2)$	h) $(f(a-1))^2$

16. Za funkciju $f(x) = \frac{x}{1+x}$ pronađite $f^n(x) = (\overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{n \text{ puta}})(x)$.

17. Kojom točkom ravnine prolazi graf svake eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$?

18. Riješite jednadžbe: a) $3^{2x+7} = 27$, b) $5^{x-4} = 625$, c) $2^x = 1/8$.

19. Fermat je postavio hipotezu da je $f(n) = 2^{2^n} + 1$ prost broj za svaki prirodni broj n. Euler je pokazao da već $f(5)$ nije prost broj. Izračunajte $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ i $f(4)$, a zatim provjerite da je $f(5) = 641 \cdot 6700417$.

20. **Hiperbolne funkcije** su:

    a) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (**sinus hip.**) b) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (**kosinus hip.**)

    c) $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (**tangens hip.**) d) $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (**kotangens hip.**)

    Dokažite da vrijedi:

    a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

    b) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$

    c) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

    d) $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$

    e) $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}$

    f) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

21. Pokažite da su funkcije sh, th, cth neparne, a funkcija ch parna.

22. Pokažite da:

    a) sh strogo raste na $\mathbb{R}$,

    b) ch strog pada na $< -\infty, 0 >$ i strogo raste na $[0, \infty >$,

    c) th strogo raste na $\mathbb{R}$.

    d) cth strogo pada na $\mathbb{R}$.

    Uputa:

    a) sh je zbroj rastućih funkcija $\frac{e^x}{2}$ i $-\frac{e^{-x}}{2}$.

    b) Iz $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$ slijedi $\operatorname{ch} x \geq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako su $x, y > 0$ onda je $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y > \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y > \operatorname{ch} x$ što pokazuje da ch strogo raste na $[0, \infty >$. Zbog parnosti ch strogo pada na $< -\infty, 0 >$.

    c) pokažite da za sve $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$ vrijedi $\operatorname{th}(x+y) - \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}(x+y) \operatorname{ch} x} > 0$.

    d) $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$.

23. Prema prethodnom zadatku slijedi da funkcije sh i th strogo rastu na $\mathbb{R}$ pa prema tome imaju inverzne funkcije ar sh, ar th. Funkcija ar sh je definirana na $\mathbb{R}$ jer je $\mathrm{Im}\,\mathrm{sh} = \mathbb{R}$, a funkcija ar th je definirana na $< -1, 1 >$ jer je $\mathrm{Im}\,\mathrm{th} =< -1, 1 >$. Pokažite da je

$$\boxed{\mathrm{ar\,sh}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in \mathbb{R}\ ; \quad \mathrm{ar\,th}\,x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ x \in < -1, 1 > .}$$

Funkcija ch zbog parnosti nije bijekcija, ali njena restrikcija Ch na $[0, \infty >$ je strogo rastuća (prethodni zadatak) i prema tome ima inverznu funkciju ar ch definiranu na skupu $[1, \infty >$ jer je $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ch} = [1, \infty >$.
Ni funkcija cth nije bijekcija, ali je njena restrikcija Cth na $< 0, \infty >$ strogo padajuća (prethodni zadatak) i prema tome ima inverznu funkciju ar cth definiranu na skupu $< 1, \infty >$ jer je $\mathrm{Im}\,\mathrm{Cth} =< 1, \infty >$.

Pokažite da je

$$\boxed{\mathrm{ar\,ch}\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x \geq 1; \quad \mathrm{ar\,cth}\,x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},\ x > 1.}$$

Funkcije ar sh, ar ch, ar th, ar cth nazivamo zajedničkim imenom **area funkcije**.

24. Riješite eksponencijalne jednadžbe:

a) $3^5\left(3^{2-3x}\right)^{1-2x}\left(9^{3x-1}\right)^x = \left(27^{7+x}\right)^{7-x} 81^{4x}$ b) $4^{x+1} + 16^{x-1} = 1536$
c) $6 \cdot 3^x + 8 \cdot 3^{x+1} + 10 \cdot 3^{x+2} = 405 \cdot 2^x$ d) $27^{5x-6} 81^{2x+3} = 9^{4x-2} 3^{7x-1}$

25. Kojom točkom ravnine prolazi graf svake logaritamske funkcije $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$?

26. Odredite domene sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{2\log x}$ b) $f(x) = \sqrt{\log x^2}$ c) $f(x) = 1 - \ln\sqrt{1-x^2}$
d) $f(x) =\mid \ln(-\ln x) \mid$ e) $f(x) = \log(x^2 - 9)$ f) $f(x) = \ln \mid x \mid$.

27. Koji od brojeva je veći: 500^{501} ili 506^{500}? Uputa: Neka je $x = 500^{501}$ i $y = 506^{500}$. Usporedite $\log x$ i $\log y$ i upotrijebite svojstvo monotonosti logaritamske funkcije.

28. Logaritamska funkcija i funkcija najveće cijelo $[\cdot]$ mogu poslužiti za određivanje broja znamenki $N(x)$ cjelobrojnog dijela broja a^x. Pokažite da je $N(x) = [x \cdot \log a] + 1$. Pronađite broj znamenki broja $2^{132049} - 1$, najvećeg prostog broja poznatog do 1983. godine.

29. Neka je $p = p(h)$ atmosferski tlak (u mm Hg) na visini h (u metrima) od morske vode. Nadmorsku visinu h možemo odrediti po formuli:

$$h = (30 \cdot T + 8000) \log \left(\frac{p_0}{p} \right),$$

gdje su p_0 atmosferski tlak na površini morske vode i T temperatura (u $^\circ C$) na visini h.

Odredite nadmorsku visinu aviona ako instrumenti bilježe tlak od 360 mm Hg i temperaturu 0° C. Uzmite da je $p_0 = 760$ mm Hg.

30. Otkrijte gdje je greška:

a)	$4 = \log_2 16$	b)	$3 > 2$
	$4 = \log_2 (8+8)$		$3 \log 0.5 > 2 \log 0.5$
	$4 = \log_2 8 + \log_2 8$		$\log 0.5^3 > \log 0.5^2$
	$4 = 3+3$		$0.5^3 > 0.5^2$
	$4 = 6$		$0.125 > 0.25$

31. Studenti čine čestu grešku zamjenjujući $\log(x+y)$ s $\log x + \log y$. Za koje vrijednosti od x i y je $\log(x+y) = \log x + \log y$? Uputa: izrazite y pomoću x.

32. Odredite konstantu k tako da funkcije $f(x) = e^{-kx}$ i $g(x) = (2.2)^x$ budu jednake.

33. Riješite logaritamske jednadžbe:

a) $\log_5 25 = x$	b) $\ln e^3 = x$	c) $\log_3 81 = x$
d) $\ln 3x - \ln(x-1) = 4$	e) $\ln 3x + \ln 2 = 1$	f) $\log(\log x) = 3$
g) $\ln(\ln x) - \ln 2 = 0$	h) $\log_4(\log_3 x) = 1$	i) $\log_7(\log_5 x^2) = 0$
j) $\log_5 x^3 = \log_5(16x)$	k) $25 = 16^{\log_4 x}$	l) $\frac{1}{3}\ln 125 + 1/2 \ln x = \ln x$
m) $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$	n) $\log_x 8 = 2$	o) $4 \log_x 2 = 2 - 1/3 \log_x 8$.

34. Odredite $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ ako je $\sin x = \frac{5}{13}$ i $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

35. Odredite $\sin x$, $\cos x$ i $\operatorname{ctg} x$ ako je $\operatorname{tg} x = \frac{15}{8}$ i $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

36. Koristeći se adicionim formulama prvo dokažite:

a) $\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2\cos u \cos v$ b) $\cos(u+v) - \cos(u-v) = -2\sin u \sin v$
c) $\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2\sin u \cos v$ d) $\sin(u+v) - \sin(u-v) = 2\cos u \cos v$

a zatim stavljajući $u+v = x$ i $u-v = y$ pokažite da je:

e) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ f) $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
g) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ h) $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

37. Provjerite pomoću adicionih formula:

a) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ b) $\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
c) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ d) $\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$
e) $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ f) $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
g) $\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$ h) $\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)}$

38. Podijelimo li jednadžbu $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ s $\cos^2 u$ dobivamo $\mathrm{tg}^2\, u + 1 = 1/\cos^2 u$, odakle je $\cos^2 u = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, u}$. Neka je $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Dokažite:

$$\text{a)}\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{b)}\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Uputa: a) $\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$,
b) $\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

39. Riješite trigonometrijske jednadžbe:

a) $2\sin^2 x\cos x - \cos x = 0$
b) $2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$
c) $\sin^4 x - \sin^2 x = 0$
d) $2\sin^2 x = 1 - \cos x$
e) $2\sin x\cos x - \cos x = 0$
f) $\sin(2x) - \sin x = 0$
g) $\cos(2x)\cos x + \sin(2x)\sin x = -1$
h) $\sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x = 0$.

40. Pokažite da je s

$$x = r\cos\phi,\quad y = r\sin\psi,\quad \psi \in [0, 2\pi]$$

parametarski zadana jednadžba kružnice radijusa r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

41. Napišite u parametarskom obliku jednadžbu:

a) kružnice: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$,

b) elipse: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

3. NIZOVI REALNIH BROJEVA

3.1 Pojam niza

Funkciju $a : \{1, 2, \ldots, s\} \to \mathbb{R}$ nazivamo **konačnim nizom realnih brojeva** i bilježimo uređenom listom brojeva:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_s,$$

gdje je $a_n = a(n),\ n = 1, 2, \ldots, s$. Za a_n kažemo da je *n-ti* ili **opći član** niza.

Primjer 3.1 *Za niz zadan općim članom* $a_n = (-3)^n$ *i* $s = 5$, *imamo konačan niz:* $-3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243$.

Funkciju $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kojoj je domena čitav skup $\mathbb{N}$, a kodomena skup $\mathbb{R}$ nazivamo **beskonačni niz realnih brojeva** (ili kraće **niz realnih brojeva**) i označavamo s:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad \text{ili jednostavno s } (a_n).$$

U daljnjem tekstu pod pojmom niz podrazumijevat ćemo beskonačni niz realnih brojeva, osim ako se drugačije ne kaže.

Primjer 3.2 *Opći član niza je:* a) $a_n = n$, b) $a_n = 1/n$, c) $a_n = 3 + 4(n-1)$, d) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. *Ispišimo prvih pet članova tih nizova:*

a) $1, 2, 3, 4, 5$ b) $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ c) $3, 7, 11, 15, 19$ d) $2, 6, 18, 54, 162$

Niz realnih brojeva može se definirati, osim općim članom, i rekurzivnom formulom, kao npr.:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right), \ \ a_1 = 3.$$

Primjer 3.3 *Ispišimo prvih nekoliko članova prethodnog niza:*

3, 2, 1.75, 1.732142857, 1.73205081, 1.732050808. Poslije ćemo pokazati da je a_n sve bliže broju $\sqrt{3}$ što je veći n.

Primjer 3.4 Fibonaccijev niz. *Leonardo od Pise, poznat još kao Fibonacci, postavio je 1202. g. u svom radu „Liber abaci" tzv. „problem zečeva". Shema razmnožavanja zečeva je slijedeća: par zec-zečica (starih barem 2 mjeseca) tijekom svakog sljedećeg mjeseca dobiju par mladih (zeca i zečicu). Ako smo počeli s jednim novorođenim parom, koliko će biti ukupno parova zečeva nakon n mjeseci?*

Nakon prvog mjeseca će biti još uvijek jedan par zečeva, jer oni još nisu zreli za oplodnju. Nakon dva mjeseca imamo dva para. Nakon tri mjeseca imamo tri para (originalni par i njihovi potomci nakon drugog i trećeg mjeseca).

Neka je F_n broj parova zec-zečica nakon n mjeseci, tj. tijekom $(n+1)$-og mjeseca. Prema pretpostavci je $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$. Da bismo dobili F_n treba broju parova F_{n-1} koji su živjeli prethodni mjesec dodati novorođene parove koji mogu doći samo od F_{n-2} parova živih prije dva mjeseca. Stoga za svaki $n \geq 2$ vrijedi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Fibonaccijeve brojeveF_n prvi su izračunali De Moivré i, neovisno, D. Bernoulli i J.P.M. Binet početkom 18. st. Mi navodimo samo rezultat:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \quad n \geq 0.$$

Za dokaz gornje jednakosti potrebno je poznavati teoriju rješavanja tzv. linearnih rekurzivnih relacija s konstantnim koeficijentima, što prelazi okvire ove knjige.

3.2 Aritmetički i geometrijski niz

Svaki niz realnih brojeva kod kojeg je razlika između člana i člana koji mu direktno prethodi jednaka za svaki par susjednih članova, tj.

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d, \quad \text{odnosno} \quad a_{n+1} = a_n + d \ (\forall n \in \mathbb{N}\,)}$$

nazivamo **aritmetičkim nizom**. Broj d pri tome zovemo **diferencija** aritmetičkog niza.

Prema definiciji je $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \ \ (= d)$, odakle dobivamo:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Dakle, svaki član niza (osim prvog) je aritmetička sredina[1] njemu susjednih članova. Od tuda i dolazi ime tog niza.

[1]Broj $A(a,b) = (a+b)/2$ nazivamo *aritmetičkom sredinom* brojeva a i b.

Neka je a_1 prvi član aritmetičkog niza s diferencijom d. Potražimo formulu za opći član a_n. Ispisivanjem prvih nekoliko članova dobivamo:

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_1 + 0 \cdot d,\\
&a_2 = a_1 + d,\\
&a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
&a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Naslućujemo da će općenito biti:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

Dokaz. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije. Vidjeli smo da je formula valjana za $n = 1, 2, 3, 4$. Pokažimo da iz pretpostavke $a_n = a_1 + (n-1)d$ slijedi da je $a_{n+1} = a_1 + [(n+1)-1]d$. Naime, $a_{n+1} = a_n + d = \overbrace{a_1 + (n-1)d}^{\text{po pretpostavci}} + d = a_1 + [(n+1)-1]d$.

Primjer 3.5 *Zadan je aritmetički niz* $2, 7, 12, 17, \ldots$ *Odredimo* a_{2000}.

$a_1 = 2,\ d = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$. Opći član je $a_n = 2 + (n-1)5$, a $a_{2000} = 2 + (2\,000 - 1)5 = 9\,997$.

Primjer 3.6 *Interpolirati između dva zadana broja a i b aritmetički niz od r članova znači odrediti r brojeva, koji zajedno s a i b čine konačan aritmetički niz od* $(r+2)$ *člana, kome je a prvi i b posljednji član. Za primjer interpolirajmo između* 10 *i* 34 *aritmetički niz od* 5 *članova.*

$a_1 = 10, a_7 = 34$. Budući da je $a_7 = a_1 + 6d$ dobivamo $d = 4$. Traženi niz glasi: $10, 14, 18, 22, 26, 30, 34$.

Za zbroj s_n prvih n članova aritmetičkog niza vrijedi:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \quad \text{odnosno} \quad s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].}$$

Dokaz. Zaista, iskoristimo li formulu za zbroj prvih $(n-1)$ prirodnih brojeva: $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ (vidi *Primjer 1.1*) dobivamo:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}[a_1 + (k-1)d] = \sum_{k=1}^{n} a_1 + \sum_{k=1}^{n}(k-1)d\\
&= na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + d\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]\\
&= \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).
\end{aligned}$$

Primjer 3.7 *Odredimo zbroj prvih 30 članova arit. niza* $24, 20, 16, \ldots$.

$a_1 = 24$, $d = -4$, $a_{30} = a_1 + (30-1)d = 24 + 29(-4) = -92$. $s_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15(24-92) = -1\ 020$.

Primjer 3.8 *Odredimo aritmetički niz* (a_n) *za koji je* $s_n = 14n - 2n^2$.

Iz $14n - 2n^2 = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = n^2\frac{d}{2} + n(a_1 - \frac{d}{2})$ uspoređivanjem koeficijenata uz iste potencije od n dobivamo: $14 = a_1 - \frac{d}{2}$, $-2 = \frac{d}{2}$, odakle je $d = -4$, $a_1 = 12$. Dakle, opći član traženog niza je $a_n = 12 - (n-1)4 = 16 - 4n$.

Svaki niz kod kojeg je kvocijent između člana i člana koji mu direktno prethodi jednak za svaki par susjednih članova, tj. za koji je:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \quad \text{odnosno} \qquad a_{n+1} = a_n \cdot q \ (\forall n \in \mathbb{N}\ ),}$$

nazivamo **geometrijski niz**. Broj q pri tome zovemo **kvocijent geometrijskog niza**.

Iz definicione formule dobivamo:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}},\ n \in \mathbb{N}\ ,$$

odakle se vidi da je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina[2] njemu susjednih članova.

Iz definicione formule slijedi:

$$\begin{aligned} &a_1 = a_1 \cdot q^0, \\ &a_2 = a_1 \cdot q^1, \\ &a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^2, \\ &a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot q^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom lako možemo dokazati formulu za opći član geometrijskog niza:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.}$$

Dakle, geometrijski niz na jedinstven način određen je svojim prvim članom a_1 i kvocijentom q.

[2] Broj $G(a,b) = \sqrt{ab}$ nazivamo *geometrijskom sredinom* brojeva a i b.

Primjer 3.9 *Odredimo opći član geometrijskog niza* $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$.

Prvi član zadanog geometrijskog niza je $a_1 = 2$, a kvocijent je $q = \frac{1}{3}$ $(q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}/2 = \frac{1}{3})$. Prema prethodnoj formuli je $a_n = 2(\frac{1}{3})^{n-1}$.

Za zbroj s_n prvih n članova geometrijskog niza imamo:

$$\boxed{s_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n\, a_1, & q = 1. \end{cases}}$$

Dokaz. Za svaki realan broj q vrijedi: $(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})(1 - q) = 1 - q^n$. U to se lako uvjeriti; izmnožimo li lijevu stranu dobit ćemo desnu stranu jednakosti. Ako je $q \neq 1$, onda je $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$. Sada za zbroj s_n prvih n članova imamo:

$$s_n = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ a_1\, n, & q = 1. \end{cases}$$

Primjer 3.10 *Tri broja čine konačan geometrijski niz, komu je zbroj* 65. *Ako se srednjem članu doda* 10, *dobivamo konačan aritmetički niz. Kako glasi taj niz?*

Neka je $a_1, a_1 q, a_1 q^2$ traženi niz. Niz $a_1, a_1 q + 10, a_1 q^2$ je aritmetički niz. Budući da je $a_1 q + 10 - a_1 = a_1 q^2 - a_1 q - 10$ $(= d)$ i $65 = a_1 \frac{1-q^3}{1-q} = a_1(1 + q + q^2)$, dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} a_1(q^2 - 2q + 1) &= 20 \\ a_1(1 + q + q^2) &= 65. \end{aligned}$$

Izlučimo li iz druge jednadžbe a_1 i uvrstimo u prvu, nakon sređivanja dobivamo jednadžbu $3q^2 - 10q + 3 = 0$, čija rješenje su $q_1 = 3$ i $q_2 = \frac{1}{3}$. Iz druge jednadžbe za a_1 imamo dva rješenja: $a_1 = \dfrac{65}{1 + q_1 + q_1^2} = 5$, $a_1 = \dfrac{65}{1 + q_2 + q_2^2} = 45$. Za traženi geometrijski niz dobivamo dva rješenja: a) $5, 15, 45$, b) $45, 15, 5$.

Primjer 3.11 *Zadan je početni kapital* C_0 *i godišnja kamatna stopa* p. *Uz primjenu složenog ukamaćivanja izračunajmo vrijednost tog kapitala na kraju bilo koje godine.*

Vrijednost početnog kapitala na kraju n-te godine (C_n) sastoji se od vrijednosti kapitala s početka n-te godine C_{n-1} i kamata obračunatih na C_{n-1}. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \frac{p}{100} = C_{n-1} \cdot r,$$

gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$ godišnji kamatni faktor. Kako se radi o geometrijskom nizu s kvocijentom r i prvim članom C_0 za $(n+1)$-vi član C_n tog niza imamao:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot r^n.}$$

To je dobro znana osnovna formula financijske matematike za vrijednost početnog kapitala C_0 na kraju n-te godine uz primjenu složenog godišnjeg ukamaćivanja.

Zadaci za vježbu 3.2

1. Odredite opći član nizova:

   a) $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ b) $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$
   c) $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ d) $-1, 2, 7, 14, 23, 34, 47, \ldots$
   e) $2, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \frac{81}{128}, \ldots$ f) $\frac{2}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{10}, \frac{5}{17}, \ldots$

2. Pet brojeva čini konačni aritmetički niz; njihov je zbroj 10, a njihov umnožak 320. Odredite taj niz.

3. Umnožak prva 4 člana aritmetičkog niza je 360, a zbroj kvadrata drugog i trećeg člana je 41. Odredite opći član niza.

4. Koliki je zbroj brojeva djeljivih s 19, a manjih od 5 000?

   Uputa: Prirodnih brojeva manjih od prirodnog broja m koji su djeljivi s n ($n \in \mathbb{N}$) ima $\left[\frac{m-1}{n}\right]$.

5. Umnožak prvog i petog člana geometrijskog niza je 144, a zbroj drugog, trećeg i četvrtog člana je 18. Odredite opći član.

   Uputa: Označite treći član s x. Tada je $\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2, xq^3, \ldots$ traženi niz. Nadalje je $x^2 = 144$, odakle je $x = \pm 12$. Iz jednadžbe $\frac{x}{q} + x + xq = 18$ odredite q.

6. Početni kapital $C_0 = 20\,000$ NJ primjenom složenog ukamaćivanja naraste za 4 godine na 30 000 NJ. Odredite godišnju kamatnu stopu.

7. Nakon koliko godina će se neki početni kapital udvostručiti primjenom složenog ukamaćivanja uz godišnju kamatnu stopu $p = 5\%$?

8. Koliko treba uložiti sada da bismo za 12 godina imali 40 000 NJ ako se obračunava 5% složenih kamata godišnje?

3.3 Klasifikacija nizova

Za niz realnih brojeva (a_n) reći ćemo da je **pozitivan** [**negativan**] ako postoje realan broj $a \geq 0$ [$a < 0$] i prirodan broj n_0 takvi da je $a_n \geq a$ [$a_n \leq a$] za svaki $n \geq n_0$.

Primjer 3.12 *Niz kome je opći član* $a_n = \frac{1}{n}$ *je pozitivan niz, dok je niz zadan općim članom* $b_n = \frac{3-n}{n}$ *negativan niz.*

Niz realnih brojeva (a_n) je **stacionaran niz** ako postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n = a_{n_0}$ za svaki $n \geq n_0$.

Primjer 3.13 *Niz kome je opći član* $a_n = 1 + \left[\frac{5}{n}\right]$ *je stacionaran. Naime, budući da je* $\left[\frac{5}{n}\right] = 0$ *za* $n > 6$ *imamo niz:* $6, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$.

Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je **monotono rastući** niz ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$a_n \leq a_{n+1} \ \ (\forall n \geq n_0).$$

Niz realnih brojeva (a_n) je **monotono padajući** niz ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$a_n \geq a_{n+1} \ \ (\forall n \geq n_0).$$

Zamijetite da je niz (a_n) monotono padajući onda i samo onda ako je niz $(-a_n)$ monotono rastući. Ukoliko u prethodnim definicijama vrijede stroge nejednakosti, onda kažemo da je niz **strogo rastući** odnosno **strogo padajući**.

Primjer 3.14 *Ako je* $q > 0$, *onda je niz* $a_n = q^{n-1}$ *strogo rastući za* $q > 1$ *i strogo padajući za* $0 < q < 1$. *Zaista, ako je* $q > 1$ *množenjem te nejednakosti s* q^{n-1} *dobivamo* $q^n > q^{n-1}$, *tj.* $a_{n+1} > a_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Na sličan način se provodi dokaz za* $0 < q < 1$.

Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je **omeđen odozgo** [**omeđen odozdo**] ako je skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen odozgo [omeđen odozdo] (vidi t.1.5.2). Za niz koji je omeđen i odozgo i odozdo kažemo da je **omeđen**.

Primjer 3.15 *Pokažimo da je niz:*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \ \ a_1 = x > 0,$$

omeđen i monotono padajući:

Općenito se može pokazati da je aritmetička sredina dvaju brojeva veća ili jednaka od njihove geometrijske sredine. Za brojeve a_n i $\frac{x}{a_n}$ to znači da je:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{x}{a_n}} = \sqrt{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Iz gornje nejednakosti imamo:

$$a_n \geq \sqrt{x} \ (\forall n \geq 2),$$

odakle slijedi da za donju među niza (a_n) možemo uzeti broj $m = \min\{x, \sqrt{x}\}$. Nadalje, za $n \geq 2$, iz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{a_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1, \text{ tj.}$$

$$a_{n+1} \leq a_n \ \ (\forall n \geq 2),$$

zaključujemo da je niz monotono padajući. Primijetimo još da je jedna gornja međa ovog niza broj $M = \max\{a_1, a_2\} = \max\{x, (x+1)/2\}$.

3.4 Limes niza realnih brojeva

Za realan broj a kažemo da je **gomilište** ili **točka gomilanja** niza realnih brojeva (a_n) ako svaka ε-okolina broja a (interval $< a-\varepsilon, a+\varepsilon >$) sadrži beskonačno mnogo članova niza (a_n).

Primjer 3.16 *Pokažimo da je* 0 *gomilište niza* $(\frac{1}{n})$.

Što je n veći to je $\frac{1}{n}$ bliže nuli (*Slika 3.1*). Drugim riječima, kad u nizu idemo dovoljno daleko onda apsolutna vrijednost $\mid a_n - 0 \mid$ postane i ostane manja od svakog pozitivnog realnog broja ε. Napravimo strogi dokaz navedene tvrdnje:

Neka je $< -\varepsilon, \varepsilon >$ ε-okolina nule. Prema Arhimedovu teoremu postoji prirodan broj n_0 takav da je $n_0 \cdot \varepsilon > 1$, tj. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Sada za svaki $n > n_0$ vrijedi $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Budući da je $\mid a_n - 0 \mid = \frac{1}{n}$ to je $\mid a_n - 0 \mid < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$, tj. svi članovi niza, osim eventualno prvih konačno mnogo članova $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$, nalaze se u danoj ε-okolini nule.

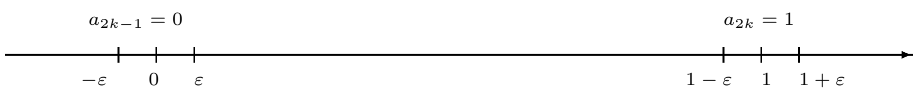
Slika 3.1. $n > n_0 \Rightarrow \left(\left|\frac{1}{n} - 0\right|\right) < \varepsilon$

Zamijetite da je 0 jedino gomilište danog niza.

Primjer 3.17 *Gomilište stacionarnog niza:* $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a, a, a, \ldots$ *je realan broj* a.

Primjer 3.18 *Niz kome je opći član* $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ *ima dva gomilišta:* 0 *i* 1.

Zamijetite da se radi o nizu $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$. Članovi niza s parnim indeksom su 1 ($a_{2k} = 1$, $k \in \mathbb{N}$), a članovi s neparnim indeksom su 0 ($a_{2k-1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$). U svakoj ε-okolini nule se nalaze svi članovi niza s neparnim indeksom, a u svakoj ε-okolini broja 1 nalaze se svi članovi niza s parnim indeksom.



Slika 3.2.

Primjer 3.19 *Niz kome je opći član* $a_n = n^2$ *nema gomilište.*

$a_n = n^2$ je sve veće što je n veći pa se u svakoj ε-okolini proizvoljnog realnog broja a može naći najviše konačno mnogo članova niza.

Navedimo bez dokaza:

Bolzano – Weierstrassov teorem

Svaki omeđen niz realnih brojeva ima barem jedno gomilište.

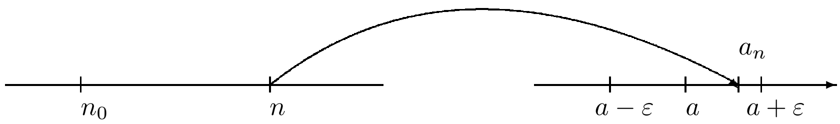
Realan broj a je **limes** ili **granična vrijednost** niza realnih brojeva (a_n) ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da (vidi *Sliku 3.3*):

$$(n > n_0) \Rightarrow (| a_n - a |< \varepsilon). \tag{3.1}$$

Da je a limes niza realnih brojeva (a_n) pišemo na jedan od slijedeća dva načina:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n; \qquad \text{ili} \qquad a_n \to a \ \text{ kada } \ n \to \infty.$$

Kažemo da je niz **konvergentan** ako ima graničnu vrijednost. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je **divergentan**.



Slika 3.3.

Primjedba 3.1 *Uočite da je tvrdnja:*

Za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da

$$(n > n_0) \Rightarrow (| a_n - a |< \varepsilon)$$

ekvivalentna tvrdnji:

U svakoj ε-okolini broja a nalaze se svi članovi niza (a_n), osim eventualno konačno mnogo njih.

Broj n_0 iz (3.1) zavisi od ε (vidi prethodne primjere). Iz (3.1) slijedi da simetrična ε-okolina $< a - \varepsilon, a + \varepsilon >$ limesa a sadrži sve članove niza (a_n), osim eventualno prvih n_0 članova toga niza.

Dokažimo slijedeće dvije tvrdnje:

a) Svaki konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedan limes.

b) Konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedno gomilište. To je ujedno i njegov limes.

Dokaz. Neka je (a_n) konvergentan niz realnih brojeva, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $b\,(b \neq a)$ proizvoljan realan broj. Tada možemo odabrati disjunktne ε-okoline brojeva a i b, npr. $< a-\varepsilon, a+\varepsilon >$ i $< b-\varepsilon, b+\varepsilon >$, gdje je $\varepsilon = \dfrac{|\, a-b\,|}{4}$. Prema (3.1) u ε-okolini broja a nalaze se svi članovi niza (a_n) osim možda konačno mnogo njih pa ti članovi ne mogu biti u ε-okolini $< b-\varepsilon, b+\varepsilon >$ broja b. Prema tome, b ne može biti niti granična vrijednost niti gomilište toga niza.

Primjer 3.20 *Niz kome je opći član $a_n = c$, je konvergentan za svaki $c \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.*

Primjer 3.21 *U Primjeru 3.16 pokazali smo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da*

$$(n > n_0) \Rightarrow \left(\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \right),$$

odakle prema definiciji slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Primjer 3.22 *Ispitajmo konvergenciju niza zadanog općim članom $a_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2-1}$.*

Što je n veći to su i brojnik n^2+1 i nazivnik $3n^2-1$ sve veći. Tu se javlja tzv. neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ (vidi *Primjedbu* 3.2). Podijelimo li i brojnik i nazivnik s najvećom potencijom od n (n^2) dobivamo:

$$a_n = \frac{n^2+1 \ / : n^2}{3n^2-1 \ / : n^2} = \frac{1+1/n^2}{3-1/n^2}$$

možemo uočiti da je brojnik $1+1/n^2$ sve bliži broju 1, a nazivnik $3-1/n^2$ broju 3, ako n rate. Naslućujemo da će biti:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-1} = \frac{1}{3}.$$

Dokažimo tu pretpostavku. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj i odredimo prirodan broj n_0 takav da je $|\, a_n - \frac{1}{3}\, | < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$. Provjerite da je:

$$\left| a_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{n^2+1}{3n^2-1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{3(3n^2-1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3\varepsilon} + 1 \right)}$$

Traženi broj je $n_0 = \left[\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3\varepsilon}+1\right)}\right]$.

Primjer 3.23 *Ispitajmo konvergenciju niza* $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$*:*

Što je n veći to su i $\sqrt{n+1}$ i $\sqrt{n}$ sve veći pa ne možemo ništa zaključiti o ponašanju njihove razlike (općeg člana a_n) kad n teži u beskonačno. Javlja se tzv. neodređeni oblik $\infty - \infty$ (vidi *Primjedbu 3.2*). Zamijetite da je:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

odakle naslućujemo da je a_n sve bliži nuli što je n veći. Pokažimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Za zadani realan broj $\varepsilon > 0$ treba pronaći prirodan broj n_0 takav da za svaki $n > n_0$ vrijedi $| a_n - 0 |= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$, tj. $\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Iz posljednje nejednakosti vidimo da je za n_0 dovoljno uzeti bilo koji prirodan broj takav da je $\sqrt{n_0} > \frac{1}{2\varepsilon}$. Naime, tada za $n > n_0$ imamo:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n_0+1} + \sqrt{n_0} > 2\sqrt{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tako smo dokazali da je $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Primjer 3.24 *Dokažimo:* a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *za svaki* $a > 0$.

a) Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ treba pronaći prirodan broj n_0 takav da je $| \sqrt[n]{n} - 1 |= \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$. Primjenom binomne formule dobivamo:

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k > \binom{n}{2}\varepsilon^2 = \frac{n(n-1)\varepsilon^2}{2}, \; n > 2.$$

Odaberemo li prirodan broj n_0 tako da je $\frac{n_0 - 1}{2} \cdot \varepsilon^2 > 1$ i $n_0 > 2$, onda za svaki $n > n_0$ vrijedi $\frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon^2 > \frac{n_0-1}{2} \cdot \varepsilon^2 > 1$, odakle je

$$(1+\varepsilon)^n > n\frac{(n-1)\varepsilon^2}{2} > n.$$

Vađenjem n-tog korijena imamo $1 + \varepsilon > \sqrt[n]{n}$, tj. $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$.

b) Neka su $a > 1$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Budući da je

$$| \sqrt[n]{a} - 1 |< \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}\log a < \log(1+\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{\log a}{\log(1+\varepsilon)} < n,$$

neka je $n_0 = \left[\frac{\log a}{\log(1+\varepsilon)}\right]$. Tada, za svaki $n > n_0$ imamo $n > \frac{\log a}{\log(1+\varepsilon)}$, odakle dobivamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Slično se dokaže tvrdnja za $0 < a \leq 1$.

Niz realnih brojeva (a_n) **divergira** k $+\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako za svaki broj $M > 0$ postoji prirodan broj n_0, takav da $(n > n_0) \Rightarrow (a_n > M)$. Niz realnih brojeva (a_n) **divergira** k $-\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki broj $m < 0$ postoji prirodan broj n_0, takav da $(n > n_0) \Rightarrow (a_n < m)$.

Primjer 3.25 *Niz (n^2) divergira k $+\infty$.*

Primjer 3.26 *Pokažimo da je:*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 \leq |\, q \,| < 1 \\ 1, & \text{za } q = 1 \\ +\infty, & \text{za } q > 1. \end{cases}$$

U prvom slučaju tvrdnju je dovoljno dokazati za $0 < |\, q \,| < 1$. Naime, ako je $q = 0$, onda je $q^n = 0$ za svaki n. Za proizvoljan realan broj $\varepsilon > 0$ treba pronaći prirodan broj n_0 takav da:

$$(n > n_0) \Rightarrow (|q^n - 0| = |\, q \,|^n < \varepsilon).$$

Budući da je:

$$|\, q \,|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \log |\, q \,| < \log \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log |\, q \,|},$$

treba pronaći takav prirodan broj n_0 da $(n > n_0) \Rightarrow \left(n > \dfrac{\log \varepsilon}{\log |\, q \,|}\right)$. Dovoljno je uzeti $n_0 = \left[\dfrac{\log \varepsilon}{\log |\, q \,|}\right]$.

Za $q = 1$ je $q^n = 1$ pa je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Za $q > 1$ prema Bernoullijevoj nejednakosti (vidi *Primjer 1.2*) imamo:

$$q^n = [1 + (q-1)]^n \geq 1 + n(q-1).$$

Za proizvoljan realan broj $M > 0$ možemo odabrati takav $n_0 \in \mathbb{N}$ da je $1 + n_0(q-1) > M$ (Arhimedov teorem), odakle za $n \geq n_0$ dobivamo:

$$q^n \geq 1 + n(q-1) \geq 1 + n_0(q-1) > M.$$

Prema definiciji je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Primjer 3.27 *Za $q \leq -1$ niz (q^n) je divergentan.*

Za $q = -1$ dobivamo niz $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$. On ima dva gomilišta $1, -1$ pa je stoga divergentan. Neka je stoga $q < -1$. Članovi niza (q^n) s parnim indeksom postaju sve veći što je n veći, a članovi s neparnim indeksom sve manji. To znači da se u svakoj ε-okolini realnog broja a može naći najviše konačno mnogo članova niza pa taj niz nema limes.

Primjedba 3.2 *Neka su (a_n) i (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i diskutirajmo konvergenciju pomoću njih oformljenih nizova a) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, b) $(a_n - b_n)$:*

a) U ovom slučaju kažemo da se radi o tzv. **neodređenom obliku** $\frac{\infty}{\infty}$. Naime, i brojnik i nazivnik divergiraju prema ∞ kada n teži u ∞. Pokažimo jednostavnim primjerom da neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$ u limesu (ukoliko on postoji) može dati bilo koji pozitivan realan broj: Neka je $a_n = c \cdot n$, $c > 0$ i $b_n = n$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Budući da je $\frac{a_n}{b_n} = c$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

b) Ovdje se radi o tzv. **neodređenom obliku** $\infty - \infty$. Ovaj neodređeni oblik u limesu može dati bilo koji realan broj, kao što se vidi na primjeru: $a_n = c + n$, $b_n = n$, $a_n - b_n = c$.

Osim ova dva neodređena oblika postoje i neodređeni oblici $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Svaki konvergentan niz realnih brojeva je omeđen

Dokaz. Neka je (a_n) niz realnih brojeva koji konvergira broju a. Treba pokazati da je skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen. Prema (3.1) za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da svi članovi niza (a_n), osim možda članova $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$, leže u intervalu $< a-1, a+1 >$. Pri tome je $\mid a_n \mid = \mid a_n - a + a \mid \leq \mid a_n - a \mid + \mid a \mid < 1 + \mid a \mid$. Neka je $M = \mid a_1 \mid + \cdots + \mid a_{n_0} \mid + (1 + \mid a \mid)$. Tada je $\mid a_n \mid \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, odakle slijedi da je skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen.

Obrat prethodne tvrdnje nije istinit, tj. postoji niz koji je omeđen ali nije konvergentan. Takav je npr. niz $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

Svaki omeđen i monoton niz realnih brojeva je konvergentan.

Dokaz. Neka je (a_n) rastući niz realnih brojeva. Prema pretpostavci skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je odozgo omeđen i prema aksiomu 15A polja realnih brojeva ima supremum $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pokažimo da je niz (a_n) konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Za svaki $\varepsilon > 0$ iz definicije supremuma slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Niz (a_n) je rastući pa za $n > n_0$ dobivamo $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$, odakle dobivamo $\mid a_n - a \mid < \varepsilon$ za svaki prirodan broj $n > n_0$. Time je pokazano da je niz (a_n) konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ako je niz (a_n) padajući, tada je niz $(-a_n)$ rastući, i prema tome konvergira.

Primjer 3.28 Broj e. *Pokažimo da je niz* (e_n) *realnih brojeva, kojemu je opći član*

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

strogo rastući i omeđen niz $(2 \leq e_n < 3)$ *pa prema prethodnoj tvrdnji ima limes.*

$e_1 = 2,\ e_2 = 2.25$. Za $n \geq 2$ primjenom binomne formule dobivamo

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k! \cdot n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Slično se dobiva:

$$e_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Članovi kod e_n su manji od odgovarajućih članova kod e_{n+1}, a osim toga e_{n+1} ima dodatni pozitivan član. Stoga je

$$e_n < e_{n+1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

tj. niz (e_n) je strogo rastući. Nadalje, za donju među možemo uzeti $e_1 = 2$.

Iz nejednakosti $k! \geq 2^{k-1}$ (vidi *Zadatke za vježbu 1.1*) i formule za zbroj prvih n članova geometrijskog niza dobivamo:

$$e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) <$$

$$< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3,$$

pa za gornju među možemo uzeti broj 3.

Limes niza (e_n) iz prethodnog primjera zovemo **broj** e, tj.

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.}$$

Broj e ima važnu ulogu u matematičkoj analizi, naziva se još **Eulerov broj** po matematičaru L. Euleru(1707-1783). Često i prirodno uzima se za bazu logaritma. To je iracionalan broj, a njegova približna vrijednost na 15 decimalnih mjesta je $e = 2.718281828459045\ldots$.

3.5 Algebarske operacije s nizovima

Primjeri iz prethodne točke pokazuju da je nalaženje limesa niza realnih brojeva po definiciji težak posao. Stoga ćemo u ovoj točki dokazati i ilustrirati neka pravila za računanje limesa.

Neka su (a_n), (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva. Pod **zbrojem**, **razlikom**, **produktom** i **kvocijentom** tih nizova podrazumijevamo redom nizove: (a_n+b_n), (a_n-b_n), $(a_n\cdot b_n)$, $\frac{a_n}{b_n}$. Kod kvocijenta treba biti $b_n\neq 0$ za svaki $n\in\mathbb{N}$.

Pravila za računanje s limesima:

Neka su nizovi realnih brojeva (a_n) i (b_n) konvergentni i neka je $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Tada:

1. niz $(a_n\pm b_n)$ je konvergentan i vrijedi:
   $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a\pm b$ (tj. limes zbroja(razlike) jednak je zbroju(razlici) limesa).
2. niz $(a_n\cdot b_n)$ je konvergentan i vrijedi:
   $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a\cdot b$ (tj. limes produkta jednak je produktu limesa).
3. niz $(|a_n|)$ je konvergentan i vrijedi:
   $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|\lim\limits_{n\to\infty} a_n|=|a|$ (tj. limes niza apsolutnih vrijednosti jednak je apsolutnoj vrijednosti limesa).
4. ako je $b_n\neq 0$ za svaki $n\in\mathbb{N}$ i $b\neq 0$, onda je niz $(1/b_n)$ konvergentan i vrijedi:
   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\frac{1}{b}$ (tj. limes niza recipročnih vrijednosti jednak je recipročnoj vrijednosti limesa).
5. ako je $b_n\neq 0$ za svaki $n\in\mathbb{N}$ i $b\neq 0$, niz (a_n/b_n) je konvergentan i vrijedi:
   $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\frac{a}{b}$ (tj. limes kvocijenta jednak je kvocijentu limesa).
6. Ako je $a_n>0$ za svaki $n\in\mathbb{N}$ i $\alpha>0$ bilo koji realan broj, onda je niz (a_n^α) konvergentan i vrijedi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^\alpha=\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^\alpha=a^\alpha$.

Dokaz.

1. Neka $a_n\to a$ i $b_n\to b$. Za svaki $\varepsilon>0$ postoje prirodni brojevi $n_0(a)$ i $n_0(b)$ takvi da $(n>n_0(a))\Rightarrow(|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2})$ i $(n>n_0(b))\Rightarrow(|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2})$. Tada za $n_0=\max\{n_0(a),n_0(b)\}$
   $$(n>n_0)\Rightarrow(|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{i}\quad|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}).$$
   Nadalje, za $n>n_0$ vrijedi $|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

2. Za dokaz ove tvrdnje iskoristit ćemo slijedeću nejednakost:

$$| a_n \cdot b_n - a \cdot b |=| a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b |\leq| a_n \cdot b_n - a \cdot b_n | + | a \cdot b_n - a \cdot b |\leq$$

$$| b_n | \cdot | a_n - a | + | a | \cdot | b_n - b | \tag{3.2}$$

Niz (b_n) je konvergentan pa i omeđen, tj. postoji pozitivan realan broj M takav da je $| b_n |< M \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$. Odaberimo takav M da je

$$| b_n |< M \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ \text{i} \ \ | a |< M. \tag{3.3}$$

Nizovi (a_n) i (b_n) su konvergentni pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$(n > n_0) \Rightarrow (| a_n - a |< \frac{\varepsilon}{2M} \ \ \text{i} \ \ | b_n - b |< \frac{\varepsilon}{2M}). \tag{3.4}$$

Iz (3.2) – (3.4) za $n > n_0$ slijedi

$$| a_n \cdot b_n - a \cdot b |\leq| b_n | \cdot | a_n - a | + | a | \cdot | b_n - b |\leq \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Time je dokazana tvrdnja.

3. Tvrdnja slijedi iz $|| b_n | - | b || \leq| b_n - b |$.

4. Uočite da je

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{| b - b_n |}{| b || b_n |} \tag{3.5}$$

Prema prethodnoj tvrdnji niz $(| b_n |)$ je konvergentan i stoga omeđen odozdo, tj. postoji pozitivan realan broj m takav da je

$$| b_n |> m \ \ \text{za svaki} \ \ n \in \mathbb{N} . \tag{3.6}$$

Da postoji pozitivan m s navedenim svojstvom garantiraju nam pretpostavke $b_n \neq 0$, tj. $| b_n |> 0$ i $b \neq 0$, tj. $| b |> 0$. Prema prethodnoj tvrdnji niz $(| b_n |)$ konvergira broju $| b |> 0$ u čijoj okolini $<| b | /2, 3 | b | /2 >$ se nalaze svi članovi niza $(| b_n |)$, osim eventualno njih konačno mnogo: $| b_1 |, | b_2 |, \ldots, | b_{n_0} |$. Za m je dovoljno uzeti $m = \min \{| b | /2, | b_1 |, | b_2 |, \ldots, | b_{n_0} |\}$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Niz (b_n) je konvergentan pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$(n > n_0) \Rightarrow| b_n - b |< \varepsilon | b | m \tag{3.7}$$

Prema (3.5) – (3.7) dobivamo

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{| b - b_n |}{| b || b_n |} < \frac{| b - b_n |}{| b || m |} < \frac{\varepsilon | b | m}{| b | m} = \varepsilon.$$

Time je dokazana i ova tvrdnja

5. Ova tvrdnja slijedi iz druge i četvrte tvrdnje.

6. Treba pokazati da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takav da $(n > n_0) \Rightarrow (\mid a_n^\alpha - a^\alpha \mid < \varepsilon)$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $a > 0$ i $\varepsilon < a^\alpha$ (za $a = 0$ dokaz se provodi slično). Budući da je opća potencija $x \mapsto x^{1/\alpha}$ strogo rastuća dobivamo:
$$(a^\alpha - \varepsilon)^{1/\alpha} < a < (a^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha}.$$
Odaberimo realan broj $\varepsilon' > 0$ tako da je
$$(a^\alpha - \varepsilon)^{1/\alpha} < a - \varepsilon' < a < a + \varepsilon' < (a^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha}. \tag{3.8}$$
Niz (a_n) je konvergentan pa za ε' postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a - \varepsilon' < a_n < a + \varepsilon'$. Potenciranjem i primjenom nejednakosti (3.8) za svaki $n > n_0$ dobivamo
$$a^\alpha - \varepsilon < \left(a - \varepsilon'\right)^\alpha < a_n^\alpha < \left(a + \varepsilon'\right)^\alpha < a^\alpha + \varepsilon,$$
odnosno $\mid a_n^\alpha - a^\alpha \mid < \varepsilon$.

Primjedba 3.3 *Niz kome je opći član $b_n = c$, gdje je c bilo koji realan broj, konvergira broju c. Primjenimo li pravilo za limes produkta dobivamo da za svaki konvergentan niz realnih brojeva (a_n) vrijedi:*
$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Primjer 3.29 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n - 10}{n}\right) = 2 \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{5}{n}\right) = 2\left(3 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n}\right) = 2(3 - 0) =$ 6.

Primjer 3.30 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{4 + \frac{3}{n}} = \sqrt[4]{\lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{3}{n}\right)} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}.$

Primjer 3.31 *Odredimo* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 7n - 4}$.

Ne smijemo primjeniti pravilo 5. jer nizovi u brojniku i nazivniku nisu konvergentni. Izlučivanjem najveće potencijom od n u brojniku i nazivniku dobivamo:
$$\frac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 7n - 4} = \frac{n^2\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2}}.$$

Prema navedenim pravilima je:
$$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 3,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = 1.$$
Sada možemo iskoristiti pravilo 5. Dobivamo:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{n^2 + 7n - 4} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{7}{n} - \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Primjedba 3.4 *Općenito, limes niza $(R(n))$ kome je opći član racionalna funkcija R u n možemo lako odrediti izlučimo li u brojniku i nazivniku najveću potenciju od n.*

Neka je $R = \frac{P}{Q}$ racionalna funkcija, $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Da ne bi došlo da nesporazuma, napominjemo da su $a_m, \ldots, a_1, a_0$ koeficijenti polinoma P, a $b_k, \ldots, b_1, b_0$ koeficijenti polinoma Q. Budući da je

$$R(n) = \frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \frac{a_m n^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m n} + \cdots + \frac{a_0}{a_m n^m}\right)}{b_k n^k \left(1 + \frac{b_{k-1}}{b_k n} + \cdots + \frac{b_0}{b_k n^k}\right)}$$

i da svaki od članova:

$$\frac{a_{m-1}}{a_m n}, \frac{a_{m-2}}{a_m n^2}, \ldots, \frac{a_0}{a_m n^m}, \frac{b_{k-1}}{b_k n}, \frac{b_{k-2}}{b_k n^2}, \ldots, \frac{b_0}{b_k n^k}$$

konvergira nuli, dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m}{b_k n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_m}{b_k} n^{m-k}.$$

Primjer 3.32 *Ilustrirajmo primjerima rečeno u prethodnoj Primjedbi:*

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + n - 2}{3n^2 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3} = \infty \\
&\text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{-4n^3 + n - 2}{3n^2 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n^3}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n}{3} = -\infty \\
&\text{c)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + n - 2}{3n^3 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3n} = 0.
\end{aligned}$$

Primjer 3.33 *Ispitajmo konvergenciju niza $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$, $a_1 = x > 0$.*

Niz $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$, $a_1 = x > 0$, je omeđen i monotono padajući (*Primjer 3.15*) i prema tome konvergentan i ima limes $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Prijelazom na limes dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right),$$

odakle je $a^2 = x$. Budući da je $a_n \geq \sqrt{x}$ za svaki $n \geq 2$, to je $a > 0$ pa je $a = \sqrt{x}$.

Primjedba 3.5 *Ukoliko treba ispitati konvergenciju niza realnih brojeva definiranog rekurzivnom formulom, prije prijelaza na limes prethodno treba utvrditi da je taj niz konvergentan. Ilustrirajmo primjerom:*

Niz (a_n) definiran je rekurzivnom formulom: $a_1 = 2$, $a_n = \dfrac{2}{a_{n-1}}$. Raspisivanjem članova niza zaključujemo da se radi o divergentnom nizu (ima dva gomilišta): $2, 1, 2, 1, 2, \ldots$. Brzopletim prijelazom na limes bez prethodne provjere konvergencije dobivamo: $a = \dfrac{2}{a}$, gdje je $a = \dfrac{2}{a}$, odakle bi pogrešno slijedilo da je $a = \lim\limits_{n\to\infty} = \sqrt{2}$.

Primjer 3.34 *Neka je s_n zbroj prvih n-članova geometrijskog niza $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Odredimo (ukoliko postoji) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$:*

Za $q = 1$ je $s_n = a_1 \cdot n$, odakle je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty, & a_1 > 0 \\ -\infty, & a_1 < 0 \\ 0, & a_1 = 0. \end{cases}$

Neka je $q \neq 1$. Tada je $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = a_1 \left(\dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^n}{1-q} \right)$. Za $|\, q \,| < 1$ dobivamo (vidi *Primjer 3.26*):

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a_1 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \right) = \frac{a_1}{1-q} - a_1 \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Za $q > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{1-q} = -\infty$ (*Primjer 3.26*), pa je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty, & a_1 > 0 \\ -\infty, & a_1 < 0 \\ 0, & a_1 = 0 \end{cases}$, dok je za $q \leq -1$ niz (s_n) divergentan (vidi *Primjer 3.27*)

> Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} |\, a_n \,| = 0$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Prema definiciji konvergencije niza za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $|\,|\, a_n \,| - 0| < \varepsilon$, tj.$|\, a_n - 0 \,| < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$, što govori da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Primjer 3.35 *Odredimo limes niza $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.*

$|\, a_n \,| = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\, a_n \,| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Prema prethodnoj tvrdnji je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

> Neka su (a_n), (b_n), (c_n) nizovi realnih brojeva i neka postoji prirodan broj n_1 takav da je
> $$a_n \leq b_n \leq c_n \quad (n \geq n_1).$$
> Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, onda i niz (b_n) konvergira k a, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Dokaz. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi $n_0(a)$, $n_0(c)$ takvi da je $a - a_n \leq | a - a_n | < \varepsilon$ za $n > n_0(a)$ i $c_n - a \leq | a - c_n | < \varepsilon$ za $n > n_0(c)$. Neka je $n_0 = \max\{n_0(a), n_0(c), n_1\}$. Za $n > n_0$ imamo $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, tj. $| b_n - a | < \varepsilon$, odakle je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Primjer 3.36 *Pokažimo da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Budući da je $2^{n-1} \leq n!$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, za $n \geq 1$ imamo $2^{n-2} \leq (n-1)!$. Nadalje je

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{4}{n}\frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \leq \frac{4}{n}, \quad \text{tj}$$

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, primjenom prethodne tvrdnje dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Primjer 3.37 *Pokažimo da za svaki niz realnih* (a_n) *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} | a_n | = \infty$ *vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Dokaz provodimo u četiri koraka:

1. Svi članovi niza (a_n) su prirodni brojevi,
2. Svi članovi niza (a_n), počevši od nekog pa nadalje, su pozitivni realni brojevi,
3. Svi članovi niza (a_n), počevši od nekog pa nadalje, su negativni realni brojevi,
4. Niz (a_n) ima beskonačno mnogo pozitivnih članova i beskonačno mnogo negativnih članova.

1. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, postoji prirodan broj n_1 takav da je $\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$ za svaki $n > n_1$. S druge strane, kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n > n_1$ za svaki $n > n_0$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\left|\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} - e\right| < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$, odakle dobivamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

2. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ s ξ_n označimo najveće cijelo od a_n, tj. $\xi_n = [a_n]$. Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $a_n \geq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je
$$\xi_n \leq a_n < \xi_n + 1 \tag{3.9}$$
Osim toga, svi članovi nizova (ξ_n) i $(\xi + 1)$ su prirodni brojevi. Iz (3.9) dobivamo
$$\frac{1}{\xi_n + 1} < \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\xi_n},$$

odnosno
$$1+\frac{1}{\xi_n+1}<1+\frac{1}{a_n}\le 1+\frac{1}{\xi_n},$$
odakle ponovnom primjenom nejednakosti (3.9) slijedi
$$b_n=\left(1+\frac{1}{\xi_n+1}\right)^{\xi_n}<\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\le\left(1+\frac{1}{\xi_n}\right)^{\xi_n+1}=c_n.$$
Pomoću prethodnog koraka i iz
$$b_n=\left(1+\frac{1}{\xi_n+1}\right)^{\xi_n+1}\left(1+\frac{1}{\xi_n+1}\right)^{-1},\quad c_n=\left(1+\frac{1}{\xi_n}\right)^{\xi_n}\left(1+\frac{1}{\xi_n}\right)$$
dobivamo da nizovi (b_n) i (c_n) konvergiraju broju e. Zbog toga iz (3.9) slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

3. Ako su počevši od nekog člana pa nadalje svi članovi niza (a_n) negativni brojevi, onda su $b_n=-1-a_n$ pozitivni realni brojevi. Slično kao u prethodnom koraku, možemo pretpostaviti da je $a_n\le -1$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$. Niz (b_n) ispunjava sve uvjete iz drugog koraka i stoga je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}=e$. Zamijetite da je $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n+1}$, odakle prijelazom na limes dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$.

4. Neka niz (a_n) ima beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo negativnih članova. Zamijetite da je
$$a_n=\begin{cases}\mid a_n\mid, & \text{ako je } a_n \text{ pozitivan}\\ -\mid a_n\mid, & \text{ako je } a_n \text{ negativan.}\end{cases}$$
U drugom koraku pokazano je da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mid a_n\mid}\right)^{|a_n|}=e$, a u trećem koraku pokazano je da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\mid a_n\mid}\right)^{-|a_n|}=e$. Dakle, za svaki realan broj $\varepsilon>0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da
$$(n>n_1)\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{\mid a_n\mid}\right)^{|a_n|}-e\right|<\varepsilon \ \text{ i }\ (n>n_2)\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{-\mid a_n\mid}\right)^{-|a_n|}-e\right|<\varepsilon.$$
Neka je $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Tada je $\left|\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}-e\right|<\varepsilon$ za svaki $n>n_0$.

Pokažimo da za sve realne brojeve α,β i za svaki niz (a_n) realnih brojeva takav da je je $\lim\limits_{n\to\infty}\mid a_n\mid=\infty$ vrijedi:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{a_n}\right)^{\beta a_n}=e^{\alpha\beta}}$$

Dokaz. Za $\alpha=0$ tvrdnja je očigledna. Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^\beta=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^\beta$ za svaki konvergentan niz (a_n), dovoljno je tvrdnju dokazati za $\beta=1$. Neka su stoga $\beta=1$ i $\alpha\neq 0$. Prema prethodnom primjeru je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{a_n/\alpha}\right)^{a_n/\alpha}\right]^\alpha=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n/\alpha}\right)^{a_n/\alpha}\right]^\alpha=e^\alpha.$$

Primjer 3.38 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{2n}=e^{3\cdot 2}=e^6.$

Primjer 3.39 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n^7}\right)^{2n^7}=e^{3\cdot 2}=e^6.$

Slično dokazu prethodne tvrdnje, lako se dokaže:

> Neka su (a_n), (b_n) dva niza realnih broja i neka postoji prirodan broj n_1 takav da je
> $$a_n\leq b_n\quad(n\geq n_1).$$
> Ako je (b_n) konvergentan niz i $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, onda:
>
> a) Niz (a_n) je omeđen odozgo,
>
> b) Ako je (a_n) konvergentan niz, onda je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\leq b$.

Na kraju ove točke navedimo definiciju Cauchyjeva ili fundamentalnog niza:

Niz (a_n) realnih brojeva je **Cauchyjev** ili **fundamentalni niz** ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $n_0\in\mathbb{N}$, takav da je $\mid a_n-a_m\mid<\varepsilon$ za sve $m,n>n_0$.

Moglo bi se pokazati da je niz realnih brojeva konvergentan onda i samo onda ako je on Cauchyjev niz.

Zadaci za vježbu 3.3–3.5

1. Odredite gomilišta nizova:

   a) $a_n = n^{(-1)^n}$ b) $a_n = \cos(n\pi)$
   c) $a_n = ((-1)^n + 1) \cdot 2^n$ d) $a_n = 1 - \cos\frac{n\pi}{3}$.

2. Pokazati iz definicije (ne pomoću pravila!) da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ za:

   a) $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}$, $a = \frac{3}{2}$ b) $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}$, $a = 2$
   c) $a_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$, $a = -2$ d) $a_n = \dfrac{4n-1}{2n-1}$, $a = 2$
   e) $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}$, $a = 2$ f) $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $a = -\frac{3}{5}$.

3. Odredite limese:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3-2n}{(n+n)^4-(n-1)^4}$
   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$.

   Uputa: Prvo potencirajte.

4. Odredite limese:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^5+2}+\sqrt{n-2}}$.

   Uputa: Pod a) i b) podijelite brojnik i nazivnik s n^3, a pod c) i d) s n.

5. Odredite limese:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$.

   Uputa: a) Pomnožite i podijelite izraz s $\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)$. Slično postupite pod b) i d). c) Uočite da je $\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right) = \left(n-\sqrt[3]{n^3-4}\right)$ i primjenite formulu $a-b = \dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ za $a = n$, $b = \sqrt[3]{n^3-4}$.

6. Odredite limese:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n-n^2+3}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+5+9+13+\cdots+(4n-3)}{n+1}-\frac{4n+1}{2}\right)$
   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}\right)$.

Uputa: Pogledajte *Zadatke za vježbu 1.1.*

7. Odredite limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

Uputa: $(n+k)! = (n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)\cdot n!$

8. Odredite limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$.

Uputa: a) Podijelite i brojnik i nazivnik s 7^n. Slično postupite pod b) i c). d) Primjenite formulu za zbroj prvih n članova geometrijskog niza.

9. Odredite limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{3n^2}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

Riješimo zadatak pod a). Preostali zadaci se slično rješavaju.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1/:n}{n-1/:n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2.$$

10. Ispitajte konvergenciju nizova zadanih rekurzivnom formulom: a) $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, $a_1=\sqrt{2}$, b) $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, $a_1 = 1$.

Uputa: a) Iz rekurzivne formule se vidi da je niz strogo rastući. Matematičkom indukcijom se može pokazati da je $a_n < 2$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Budući da je niz strogo rastući i omeđen on je konvergentan. Neka je $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Prijelazom na limes dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+a_{n-1}}$, tj. $a=\sqrt{2+a}$, odakle je $a=2$. b) Pokažite matematičkom indukcijom da je $a_n < 2$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Sada iz $a_{n+1}-a_n = 1-a_n/2>0$ slijedi da je niz strogo rastući. Prijelazom na limes se dobiva da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

11. Dokažite da je niz $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ divergentan.

Uputa: Dani niz raste pa je dovoljno pokazati da je odozgo neomeđen. Iskoristite nejednakost

$$a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}} > \frac{2^{n+1}-2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

i pokažite matematičkom indukcijom da je $a_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$, odakle slijedi da je niz neomeđen.

12. Dokažite da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

    Uputa: Prvo dokažite matematičkom indukcijom da je $\frac{n^2}{2} < 2^n$ za svaki prirodan broj n. Dakle, $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}$.

13. Neka je (a_n), $a_n > 0$, neki niz realnih brojeva. Dokažite tvrdnju: Ako postoji limes $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, onda postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

    Uputa: Iz $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ slijedi da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $n \geq n_0$. Za $a > 0$, neka je, bez smanjenja općenitosti, $\varepsilon < a$. Množenjem ovih nejednakosti (nejednakosti $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ako je $a = 0$) za $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, n - 1$, dobiva se $(a - \frac{\varepsilon}{2})^{n-n_0} < \frac{a_n}{a_{n_0}} < (1 + \frac{\varepsilon}{2})^{n-n_0}$ $(0 < \frac{a_n}{a_{n_0}} < (1 + \frac{\varepsilon}{2})^{n-n_0}$, ako je $a = 0)$, odnosno $(a - \frac{\varepsilon}{2}) \sqrt[n]{\alpha_1} < \sqrt[n]{a_n} < (a + \frac{\varepsilon}{2}) \sqrt[n]{\alpha_2}$ $(0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{\varepsilon}{2} \sqrt[n]{\alpha_2}$, ako je $a = 0)$, gdje su $\alpha_1 = \frac{a_{n_0}}{(a - \frac{\varepsilon}{2})^{n_0}} > 0$ i $\alpha_2 = \frac{a_{n_0}}{(a + \frac{\varepsilon}{2})^{n_0}} > 0$. Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_i} = 1$, $i = 1, 2$, postoji $n_1 > n_0$ takav da za svaki $n > n_1$ vrijedi $1 - \frac{\varepsilon}{2a - \varepsilon} < \sqrt[n]{\alpha_1}$ i $\sqrt[n]{\alpha_2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2a + \varepsilon}$ ($\sqrt[n]{\alpha_2} < 2$, ako je $a = 0$). Sada za $n > n_1$ imamo $a - \varepsilon < (a - \frac{\varepsilon}{2}) \sqrt[n]{\alpha_1}$ i $(a + \frac{\varepsilon}{2}) \sqrt[n]{\alpha_2} < a + \varepsilon$ $(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt[n]{\alpha_2} < \varepsilon$, ako je $a = 0)$. Dakle, za svaki $n > n_1$ je $a - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < a + \varepsilon$, odakle je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

4. REDOVI REALNIH BROJEVA

4.1 Pojam reda

Kao motivaciju za uvođenje pojma reda i pravilnog shvaćanja novih pojmova, razmotrimo na početku ovog poglavlja dva problema: problem sume beskonačno realnih brojeva i problem zapisa periodičnog decimalnog broja u obliku razlomka.

Primjer 4.1 *Kako zbrojiti beskonačnu sumu:*

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \ ?$$

Ako to napravimo na slijedeći način:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

mogli bi zaključiti da je suma jednaka nuli. Ako to napravimo drugačije:

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots$$

mogli bi zaključiti da je suma iznosi 1.

Na ovom primjeru vidimo da zbrojiti konačno ili beskonačno realnih brojeva nije isto. Zbog toga treba dobro definirati sumu beskonačno realnih brojeva.

Primjer 4.2 *Neka je* $r = 0.b_1b_2\ldots b_kb_1b_2\ldots b_k\ldots$ *zapis periodičnog decimalnog broja* r *u sustavu s bazom* 10*. Tada je*

$$r = \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{2k}} + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{3k}} + \cdots + \frac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{nk}} + \cdots$$

Pribrojnici $a_n = \dfrac{b_1b_2\ldots b_k}{10^{nk}}$, $n \in \mathbb{N}$, *čine geometrijski niz s prvim članom* $a_1 = \dfrac{b_1b_2\ldots b_k}{10^k}$ *i kvocijentom* $q = \dfrac{1}{10^k} < 1$*. Budući da ih ima beskonačno mnogo, ne možemo ih sve zbrojiti. Kako odrediti njihov zbroj? Sa* s_n *označimo sumu prvih* n *članova niza, tj.* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$*. Što je* n *veći to* s_n *predstavlja bolju* *aproksimaciju broja r (zbrojili smo više članova). Kad $n \to \infty$, s_n će konvergirati broju r. Primjenimo li formulu za zbroj prvih n-članova geometrijskog niza dobivamo (vidi Primjer 3.26):*

$$r = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{10^k - 1}.$$

Tako naprimjer za $r = 0.135135135\ldots$ imamo: $k = 3$ i $r = \frac{135}{10^3-1} = \frac{135}{999} = \frac{5}{37}$. Provjerite!

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Pomoću njegovih članova induktivno definirajmo niz **parcijalnih suma** (s_n) :

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

s_n predstavlja sumu prvih n članova niza (a_n).

Redom realnih brojeva nazivamo uređeni par nizova realnih brojeva $((a_n), (s_n))$. Pri tome kažemo da je a_n **opći član** reda, a s_n njegova n-ta **parcijalna suma** tog reda.

Za red $((a_n), (s_n))$ kažemo da je **konvergentan** [**divergentan**] ako je njegov niz parcijalnih suma (s_n) konvergentan [divergentan]. Ako postoji limes $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ (s konačan ili beskonačan), kažemo da je s **suma** ili **zbroj** reda $((a_n), (s_n))$ i pišemo:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Zbog jednostavnosti izražavanja upotrebljava se ista oznaka:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ili} \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

i za sam red $((a_n), (s_n))$ i za njegovu sumu $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. U daljnjem izlaganju iz konteksta će biti jasno radi li se o redu ili o njegovoj sumi pa se nadamo da uz mali oprez to neće dovesti do nesporazuma.

Primjedba 4.1 *Zapis reda može imati općenitiji oblik:*

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n, \text{ gdje je } k \in \mathbb{Z} \;.$$

Tako npr. zapisi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_1 q^n$ *predstavljaju jedan te isti red:*

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots .$$

Primjedba 4.2 *Redovi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, *istovremeno oba konvergiraju ili oba divergiraju. Naime, ako je* s_n *n-ta parcijalna suma reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*,a* σ_n *n-ta parcijalna suma reda* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$*, onda je:*

$$\sigma_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1} = s_{k+n-1} - (a_1 + \cdots + a_{k-1}),$$

odakle se vidi da $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ *postoji onda i samo onda ako postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} s_{k+n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Primjer 4.3 *Odredimo sumu reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Zamijetite da se k-ti član, $k \in \mathbb{N}$, može zapisati u obliku $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Tada je opći član niza (s_n) jednak:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1} \right) = 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ je konvergentan i suma mu iznosi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

Primjer 4.4 *Odredimo sumu reda* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{4-5n}{n^3 - 3n^2 + 2n}$.

Najprije rastavimo opći član na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned} \frac{4-5n}{n^3 - 3n^2 + 2n} &= \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n-2} \quad / \; n(n-1)(n-2) \\ 4 - 5n &= A(n-1)(n-2) + Bn(n-2) + Cn(n-1). \end{aligned}$$

Zamjenjujući u prethodnoj jednakosti n redom s $0, 1, 2$ dobivamo $A = 2$, $B = 1$, $C = -3$. Dakle,

$$\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{3}{n-2}.$$

n-ti član niza (s_n) je:

$$\begin{aligned} s_n = & \sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{k=3}^{n+2} \left(\frac{2}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{3}{k-2} \right) = 2 \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k-1} - 3 \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k-2} \\ = & \; 2 \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2 \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) \\ & -3 \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} \right) = -4 + \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2}. \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-4 + \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+2} \right) = -4$, zadani red je konvergentan, a njegova suma iznosi -4, tj. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n^3 - 3n^2 + 2n} = -4$.

Primjer 4.5 *Ispitajmo konvergenciju* **geometrijskog reda** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$:

Za n-tu parcijanla suma s_n vrijedi: $s_n = a_1(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}) = \frac{a_1}{1-q} - a_1 \frac{q^n}{1-q}$. Prema *Primjerima 3.26 i 3.27* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ postoji onda i samo onda ako je $\mid q \mid < 1$ i pri tome je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Dakle, geometrijski red je konvergentan onda i samo onda ako je $\mid q \mid < 1$. Pri tome njegova suma je: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$.

Primjer 4.6 *Geometrijski red* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$ *konvergira onda i samo onda ako je* $\alpha > 1$

Kvocijent ovog geometrijskog reda je $q = 2^{1-\alpha} > 0$. Prema prethodnom primjeru red je konvergentan onda i samo onda ako je $q = 2^{1-\alpha} < 1$, tj. $1 - \alpha < 0$.

Primjer 4.7 Harmonijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *je divergentan:*

Niz parcijalnih suma kome je n-ti član $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ je rastući niz. Lako se pokaže matematičkom indukcijom da je $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$, odakle dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$

Nužan uvjet konvergencije reda

> Ako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Neka je $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ suma reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Iz $a_n = s_n - s_{n-1}$ prijelazom na limes dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Obrnuto, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ne možemo zaključiti da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan. Primjer, koji potvrđuje ovu tvrdnju, je harmonijski red. Dakle, nužan uvjet nije i dovoljan uvjet da bi red konvergirao.

Primjer 4.8 *Red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{n^2+4}$ *je divergentan jer nije ispunjen nužan uvjet konvergencije:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5}{n^2+4} = 1 \neq 0$.

4.2 Kriteriji konvergencije

Računanje sume nekog reda obično je složen matematički problem, koji u većini praktičnih slučajeva nismo u mogućnosti riješiti. Ako ipak, na neki način ustanovimo da je promatrani red konvergentan, u primjenama ćemo se zadovoljiti aproksimacijom sume reda. Zbog toga u ovoj točki navodimo nekoliko osnovnih kriterija za ispitivanje konvergencije redova.

Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je **red s nenegativnim članovima** ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Takvi redovi često se javljaju u primjenama i služe kod izučavanja redova s članovima proizvoljnog predznaka. Redovi s nenegativnim članovima imaju svojstvo da im je odgovarajući niz parcijalnih suma monotono rastući. Zbog toga vrijedi:

> Red s nenegativnim članovima je konvergentan onda i samo onda ako je njegov niz parcijalnih suma omeđen.

Dokaz. Ako je red konvergentan, onda je po definiciji njegov niz parcijalnih suma konvergentan. U prethodnom poglavlju pokazali smo da je svaki konvergentan niz omeđen niz. Ako je niz parcijalnih suma omeđen, tada je zbog monotonosti i konvergentan.

Primjer 4.9 *Pokažimo da je* **hiperharmonijski red** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, *konvergentan onda i samo onda ako je* $\alpha > 1$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstven prirodan broj $k = k(n)$ takav da je $2^{k-1} \leq n < 2^k$.

Neka je $\alpha > 1$. Budući da se radi o redu s nenegativnim članovima, treba pokazati da je niz parcijalnih suma (s_n) omeđen. U dokazu ćemo iskoristiti činjenicu da je geometrijski red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)n}$ konvergentan i da ima sumu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)n} = \dfrac{1}{1-2^{1-\alpha}}$. Za n-tu parcijalnu sumu s_n hiperharmonijskog reda vrijedi:

$$\begin{aligned}
s_n = \; & 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) \\
& + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{k-1}+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right) \leq \\
& 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}\right) \\
= \; & 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(2^{1-\alpha}\right)^i < \sum_{i=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^i = \frac{1}{1-2^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Kako je niz parcijalnih suma ovog reda omeđen, red je konvergentan.

Neka je $\alpha \leq 1$. Pokazat ćemo da je u tom slučaju hiperharmonijski red divergentan. U tu svrhu dovoljno je pokazati da je niz parcijalnih suma (s_n) neomeđen. Za parcijalnu sumu s_n vrijedi:

$$\begin{aligned}
s_n = \; & 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} \geq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) \\
& + \left(\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-2}+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^{k-2}+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}\right) \geq \\
& 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}\right) \\
= \; & 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \frac{4}{8^\alpha} + \cdots + \frac{2^{k-2}}{(2^{k-1})^\alpha} = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} \cdot \left(2^{1-\alpha}\right)^i \geq 1 + \frac{(k-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, $s_n \geq 1 + \dfrac{(k-1)}{2}$, odakle je lako uočiti da je niz (s_n) odozgo neomeđen. Naime, $k = k(n) \to \infty$ kada $n \to \infty$ pa je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Tako npr. redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ konvergiraju, dok redovi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ divergiraju.

Kažemo da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **majoranta** reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ako postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n \leq b_n$ za svaki $n \geq n_0$. U isto vrijeme kažemo da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **minoranta** reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Pokazat ćemo da je neki red s pozitivnim članovima konvergentan [divergentan] ako posjeduje barem jednu konvergentnu majorantu [divergentnu minorantu].

Poredbeni kriterij:

Neka su $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ bilo koja dva reda s nenegativnim članovima i neka postoje realan broj $c > 0$ i prirodan broj n_0 takvi da je

$$a_n \leq c \cdot b_n \quad (n \geq n_0). \tag{4.1}$$

Tada vrijedi:

a) Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

b) Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz. Označimo parcijalne sume redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sa s_n i σ_n. Nizovi (s_n) i (σ_n) su monotono rastući. Iz (4.1) za proizvoljni $n \geq n_0$ dobivamo:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + c \cdot \sum_{k=n_0}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + c \cdot \sigma_n - c \cdot \sum_{k=1}^{n_0-1} b_k.$$

a) Neka je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan. To znači da je niz (σ_n) konvergentan, a onda i omeđen. Iz prethodne nejednakosti tada slijedi omeđenost niza (s_n). Kako je, dakle, niz (s_n) monotono rastući i omeđen, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.

b) Neka je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan. To znači da je niz (s_n) odozgo neomeđen, pa je prema gornjoj nejednakosti i niz (σ_n) odozgo neomeđen. Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentan.

Primjer 4.10 *Ispitajmo konvergenciju redova: a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

a) Uspoređivanjem prvog reda s konvergentnim geometrijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ zaključujemo da je on konvergentan, jer je $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

b) Drugi red je divergentan. Iz $n < 2^n$ slijedi $\sqrt[n]{n} < 2$, odakle je $\frac{2}{n\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{n}$. Prema tome, harmonijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je minoranta našeg reda. Kako je harmonijski red divergentan, i naš red je također divergentan.

Poredbeni kriterij u formi limesa:

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ red s pozitivnim članovima i neka postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \geq 0$.

a) Za $c > 0$ red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira onda i samo onda ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira,

b) Ako je $c = 0$ i ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,

c) Ako je $c = 0$ i ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Dokaz. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$, odakle je $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - c < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$. Preuređivanjem imamo $(c-\varepsilon)b_n < a_n < (c+\varepsilon)b_n \quad (n > n_0)$. U slučaju $c > 0$ možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\varepsilon < c$. Tvrdnje slijede iz poredbenog kriterija.

Primjer 4.11 *Pokažimo da red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^n[1+(-\frac{1}{2})^n]}{2^n}$ *konvergira.*

Primjenom poredbenog kriterija u formi limesa s konvergentnim geometrijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{(1+1/n)^n[1+(-\frac{1}{2})^n]}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+1/n)^n[1+(-\frac{1}{2})^n] = e\cdot 1 = e > 0$,

odakle zaključujemo da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^n[1+(-\frac{1}{2})^n]}{2^n}$ konvergira.

Primjer 4.12 *Red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n+1}}$ *je divergentan.*

Divergenciju ćemo pokazati usporedbom s divergentnim harmonijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+1/n^3}+\sqrt{1/n+1/n^2}} = 1.$$

Divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt{n+1}}$ slijedi iz poredbenog kriterija u formi limesa.

Primjer 4.13 *Red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+3}$ *je konvergentan.*

Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{5^n+3}}{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^n + \frac{3}{2^n}} = 0$, konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+3}$ slijedi iz tvrdnje b) poredbenog kriterija u formi limesa.

Pomoću konvergentnog geometrijskog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ pokažite da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+3}$ konvergentan.

D' Alembertov kriterij:[1]

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima.

a) Ako postoje prirodan broj n_0 i realan broj $q < 1$ takvi da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \ (n > n_0),$$

onda je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan.

b) Ako postoji prirodan broj n_0 takav da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \ (n > n_0),$$

onda je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz.

a) Iz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ $(n > n_0)$ dobivamo $a_{n_0+1} \le q a_{n_0}$, $a_{n_0+2} \le q a_{n_0+1} \le q^2 a_{n_0}, \ldots$, tj.

$$a_{n_0+k} \le q^k a_{n_0} \ \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Za n-tu parcijalnu sumu $(n > n_0)$ vrijedi

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=1}^{n-n_0} a_{n_0+k} \le \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=1}^{n-n_0} a_{n_0} q^k \le \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \frac{a_{n_0}}{1-q}.$$

Niz (s_n) je omeđen pa je konvergentan.

[1] J. le R. D' Alembert – francuski matematičar i filozof (1717–1783).

b) Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tj. $0 < a_n \leq a_{n+1}$ za svaki $n > n_0$, onda nalazimo

$$0 < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \cdots \leq a_{n_0+k} \leq \cdots,$$

što pokazuje da nije ispunjen nužan uvjet konvergencije $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Primjer 4.14 *Pokažimo da red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$ *konvergira.*

Opći član je $a_n = \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$. Provjerite da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{2n(n+1)} < \frac{1}{2}$ (za $n \geq 2$)! Dakle, red konvergira.

D' Alembertov kriterij u formi limesa:

> Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, tada je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan za $L < 1$ i divergentan za $L > 1$.

Dokaz. Ako je $L < 1$, za $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \varepsilon$, odakle je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + L = 1 - \varepsilon < 1$. Broj $\varepsilon + L$ igra ulogu broja q u D' Alembertovom kriteriju.

Za $L > 1$ i $\varepsilon = L - 1 > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \varepsilon$. Sada imamo $1 = L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, pa prema D' Alembertovom kriteriju red divergira.

Primjedba 4.3 *Ilustrirajmo primjerima da za* $L = 1$ *ne možemo zaključiti ništa o konvergenciji reda.*

Za harmonijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *je* $L = 1$, *a kao što vam je poznato taj red je divergentan.*

Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *je* $L = 1$ *i taj red je konvergentan.*

Primjer 4.15 *Ispitajmo konvergenciju redova: a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $(a > 0)$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$:

a) Budući da je: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$, prema D' Alembertovom kriteriju zaključujemo da je red konvergentan.

b) Red je konvergentan prema D' Alembertovu kriteriju:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Zamijetite da iz nužnog uvjeta konvergencije dobivamo: $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $(a > 0)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Cauchyjev kriterij[2]:

> Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima.
>
> a) Ako postoje prirodan broj n_0 i realan broj $q < 1$ takav da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za svaki $n > n_0$, onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan,
>
> b) Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa n, onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz.

a) Iz $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ dobivamo $a_n \leq q^n$ za $n > n_0$. Prema poredbenom kriteriju red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira jer smo mu pronašli jednu konvergentnu majorantu (geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} q^n < 1$ s kvocijentom $q < 1$ je konvergentan).

b Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa n, onda je $a_n \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa n pa opći član a_n ne konvergira nuli.

Primjer 4.16 *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$*:*

Provjerite metodom matematičke indukcije da za svaki prirodan broj n vrijedi $n < \left(\frac{3}{2}\right)^n$, odakle je $\sqrt[n]{n} < \frac{3}{2}$. Za svaki član reda a_n dobivamo $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} < \frac{3}{4}$. Red je konvergentan prema Cauchyjevu kriteriju.

Cauchyjev kriterij u formi limesa:

> Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$.

[2] O. L. Cauchy – francuski matematičar (1789 – 1857).

Dokaz. Shema dokaza ove tvrdnje istovjetna je dokazu D' Alembertova kriterija u formi limesa. Potrebno je $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ zamijeniti s $\sqrt[n]{a_n}$.

Primjedba 4.4 *Kao i kod D' Alembertova kriterija, za $L = 1$ ne možemo zaključiti ništa o konvergenciji reda. U to se možemo lako uvjeriti na primjerima iz Primjedbe 4.3.*

Primjer 4.17 *Ispitajmo konvergenciju reda kome je opći član reda zadan s:*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ paran} \\ \frac{4}{2^n}, & n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Pokažimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Zamijetite da je

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ paran} \\ \frac{1}{2}\sqrt[n]{4}, & \text{neparan.} \end{cases}$$

Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1$, postoji prirodan broj n_0 takav da je $1 - 2\varepsilon < \sqrt[n]{4} < 1 + 2\varepsilon$ za svaki $n > n_0$. Množenjem tih nejednakost s $\frac{1}{2}$ dobivamo $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt[n]{4} < \frac{1}{2} + \varepsilon$, odakle je $\frac{1}{2} - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2} + \varepsilon$, $(n > n_0)$. Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ i prema Cauchyjevu kriteriju u formi limesa red je konvergentan.

Konvergenciju ovog reda ne možemo ustanoviti D' Alembertovim kriterijem u formi limesa. Naime, imamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2 & n \text{ paran} \\ \frac{1}{8} & n \text{ neparan,} \end{cases}$$

što znači da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ne postoji.

Primjer 4.18 *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$

Opći član reda je $a_n = \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$. Zamijetite da iz $1 \le \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2}} \le \sqrt[n]{n}$ slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2}} = 1$. Sada dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n + 3}{2}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Prema Cauchyjevom kriteriju (u formi limesa) red je konvergentan.

Zamijetite da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1} + 3}{(-1)^n + 3} = \begin{cases} 1/4, & n \text{ paran} \\ 1, & n \text{ neparan,} \end{cases}$$

što nam govori da limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ne postoji. D' Alembertov kriterij (u formi limesa) nije primjenjiv na ovaj red.

Primjedba 4.5 *Ako postoji* $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *onda postoji i* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *i pri tome je* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ *(vidi Zadatke za vježbu 3.2–3.5). Dakle, Cauchyjev kriterij u formi limesa daje konvergenciju odnosno divergenciju reda kad god to daje D' Alembertov kriterij u formi limesa. Također, ako nema odluke o konvergenciji reda D' Alembertovim kriterijem* ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$), *onda neće biti odluke ni prema Cauchyjevu kriteriju* ($\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$).

Obrat nije istinit, tj. limes $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *može postojati a da ne postoji limes* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *U to se možete uvjeriti na prethodna dva primjera. Stoga je Cauchyjev kriterij „jači" od D' Alembertova kriterija.*

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazivamo **alterniranim redom** ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0$, $a_{2n} \leq 0$ ili $a_{2n-1} \leq 0$, $a_{2n} \geq 0$.

Leibnizov[3] kriterij:

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirani red. Ako niz realnih brojeva ($| a_n |$) pada i konvergira nuli, onda red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira nekom realnom broju a za koji vrijedi ocjena:

i) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0$ i $a_{2n} \leq 0$, onda je $a_2 \leq a \leq a_1$,

ii) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \leq 0$ i $a_{2n} \geq 0$, onda je $a_1 \leq a \leq a_2$.

Dokaz. Neka je prvo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ($a_{2n-1} \geq 0$, $a_{2n} \leq 0$) alternirani red i $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ njegova n-ta parcijalna suma. Za parcijalnu sumu s_{2n} parnog indeksa dobivamo $s_{2n} = s_{2n-2} + (a_{2n-1} + a_{2n}) \geq s_{2n-2}$, a za parcijalnu sumu s_{2n+1} neparnog indeksa je $s_{2n+1} = s_{2n-1} + (a_{2n} + a_{2n+1}) \leq s_{2n-1}$. Niz ($s_{2n}$) monotono raste, a niz (s_{2n-1}) monotono pada. Nadalje, iz $s_2 \leq s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$ zaključujemo da su (s_{2n}) i (s_{2n-1}) omeđeni nizovi i prema tome konvergiraju. Kako je $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$, slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = a$. Stoga je i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. Prema tome je red konvergentan. Iz $s_2 \leq s_{2n} \leq a_1$ prijelazom na limes za sumu a reda dobivamo $a_2 \leq a \leq a_1$.

Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo: $a_{2n-1} \leq 0$, $a_{2n} \geq 0$, onda primjenom maloprije dokazane tvrd-

[3] G. W. Leibniz – njemački filozof i matematičar (1646 – 1716).

nje na red red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = -a_n$, dobivamo da je on konvergentan, pa je stoga konvergentan i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, i pri tome je $b_2 \leq b \leq b_1$, gdje je $b = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -a$. Množenjem posljednjih nejednakosti s -1 dobivamo $a_1 \leq a \leq a_2$. Time je dokazan Leibnizov kriterij.

Primjer 4.19 *Red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *je konvergentan:*

Niz $| a_n |= \frac{1}{n}$ je padajući i konvergira nuli.

Pomoću definicije konvergentnog reda nije teško dokazati sljedeću tvrdnju:

Neka su $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ bilo koja dva konvergentna reda realnih brojeva. Tada su redovi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

konvergentni i pri tome za njihove sume vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Primjer 4.20 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n} + \frac{3}{2^n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} + 3\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{1-1/3} + \frac{3}{1-1/2} = 9.$

Primjedba 4.6 *U općem slučaju, konvergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *ili reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ *ne povlači konvergenciju redova* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*. Tako npr. red:* $0+0+0+0+\cdots$ *je konvergentan, dok su redovi:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ *divergentni.*

Redovi s nenegativnim članovima mogu poslužiti za ispitivanje konvergencije redova s članovima bilo kakvog predznaka. Kažemo da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **apsolutno**

konvergentan ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ konvergentan. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **uvjetno konvergentan** ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, a red $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ divergentan.

Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan

Dokaz. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergentan red. Budući da je $a_n \leq | a_n |$ $(n \in \mathbb{N})$, tvrdnja slijedi iz poredbenog kriterija.

Primjer 4.21 *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$ *je apsolutno konvergentan.*

Budući da je $| a_n | = \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$, treba pokazati da konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$, što je učinjeno u *Primjeru 4.14*.

Primjer 4.22 *Pokazali smo da red* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ *konvergira i da red red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *divergira. Dakle, red* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ *je uvjetno konvergentan.*

Zadaci za vježbu 4

1. Za svaki od navedenih redova odredite opći član a_n, n-tu parcijalnu sumu s_n i sumu reda:

   a) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$

   b) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$

   c) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} + \cdots$

   d) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$

   e) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \cdots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \cdots$

2. Za svaki red nađite n-tu parcijalnu sumu s_n i sumu reda:

   a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$ b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$ c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n^2-4)}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$

3. Poredbenim kriterijem ispitajte konvergenciju redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\cdot 2^{2n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1+n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

4. D' Alembertovim kriterijem ispitajte konvergenciju redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!4^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{2^n+3}}$

5. Cauchyjevim kriterijem ispitajte konvergenciju redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}$, $a \in \mathbb{R}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n+2}}{5^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$ h) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$

6. Leibnizovim kriterijem pokažite konvergenciju redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n-1)}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n^3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ f) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$

7. Ispitajte koji od redova konvergira apsolutno, koji uvjetno, a koji divergira:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$

5. LIMES FUNKCIJE. NEPREKIDNE FUNKCIJE

U ovom poglavlju uvodimo dva osnovna pojma matematičke analize: *limes funkcije i neprekidnost funkcije.* Ti pojmovi predstavljaju osnovu za razumijevanje diferencijalnog i integralnog računa i zbog toga im treba posvetiti posebnu pažnju. Pojam limesa funkcije uvodimo preko limesa nizova realnih brojeva, a neprekidnost funkcije pomoću limesa funkcije. Radi lakšeg razumijevanja paralelno ćemo navoditi i ekvivalentne definicije tih pojmova na tzv. „ε, δ jeziku".

5.1 Limes funkcije

Za realan broj a kažemo da je **točka gomilanja** ili **gomilište** skupa $D \subseteq \mathbb{R}$ ako postoji takv niz (a_n) elemenata iz D da je:

$$a_n \in D, \ \ a_n \neq a \qquad \text{i} \ \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Skup svih točaka gomilanja skupa D označavamo s D'. Točku $a \in D$ nazivamo **izoliranom točkom** skupa D ako ona nije točka gomilanja skupa D. Navedimo nekoliko primjera: a) $D = [a, b>$, $D' = [a, b]$; b) $D = \mathbb{N}$, $D' = \emptyset$; c) $D = \mathbb{Q}$, $D' = \mathbb{R}$; d) Točke $a = 7$ i $a = 11$ su izolirane točka skupa $D =< 2, 6 > \cup \{7, 11\}$.

Primjedba 5.1 *Može se pokazati da je realan broj a točka gomilanja skupa $D \subseteq \mathbb{R}$ onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $< a - \varepsilon, a + \varepsilon > \cap (D\backslash\{a\}) \neq \emptyset$. Dakle, točke gomilanja skupa D su one točke u čijoj se svakoj ε-okolini nalaze i druge točke iz D.*

Slično, realan broj $a \in D$ je izolirana točka skupa D onda i samo onda ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $< a - \varepsilon, a + \varepsilon > \cap D = \{a\}$.

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, realna funkcija realne varijable. Osim u točkama iz domene D, zanimat će nas vrijednost funkcije f i u okolini točaka gomilanja skupa D. Neka je $a \in D'$. Tada postoji barem jedan niz (a_n) elemenata iz D, takav da je za svaki prirodan broj n :

$$a_n \neq a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ppomoću funkcije f i niza (a_n) s gore navedenim svojstvima napravimo novi niz $(f(a_n))$. Niz $(f(a_n))$:

1) može konvergirati broju L koji ne ovisi o izboru niza (a_n),

2) može konvergirati broju L koji ovisi o izboru niza (a_n),

3) može divergirati.

Navedeno ilustrirajmo primjerima.

Primjer 5.1 *Funkcija f zadana je formulom $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$. Skup svih točaka gomilanja domene $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ je $D' = \mathbb{R}$.*

a) Neka je $a = -2$. Za bilo koji niz realnih brojeva (a_n), $a_n \neq -2$, iz D za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$ dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2-4}{a_n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 2) = -2-2 = -4$.

b) Neka je $a \in D$ i (a_n), $a_n \neq a$, bilo koji niz iz D takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2-4}{a_n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n-2) = a-2$.

U ovim primjerima $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ ne ovisi o izboru niza (a_n).

Primjer 5.2 *Funkcija f zadana je formulom $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ Njena domena D je skup $\mathbb{R}$.*

a) Neka je $a = 0$ i $a_n = -1/n$. Tada je $f(-1/n) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f(-1/n) = 0$.

b) Ako je $a = 0$ i $a_n = 1/n$, onda je $f(1/n) = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n) = 1$.

c) Za $a = 0$ i $a_n = (-1)^n/n$ niz $f(a_n) = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ divergira.

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ ili ne postoji ili ovisi o izboru niza (a_n).

Ukoliko za svaki niz realnih brojeva (a_n) iz D takav da je $a_n \neq a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ postoji realan broj $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ koji ne ovisi o izboru niza (a_n), onda L zaslužuje posebno ime.

Heineova definicija limesa funkcije:

Realan broj L je **limes** ili **granična vrijednost** funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $a \in D'$, ako za svaki niz (a_n) iz D, $a_n \neq a$, za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ vrijedi:

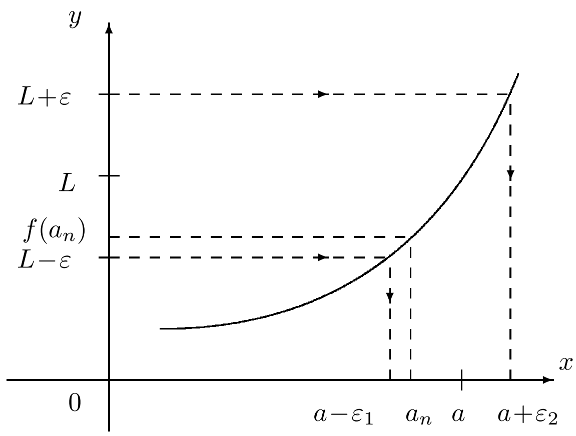
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$

Ako je a izolirana točka skupa D, onda za limes funkcije f u točki a uzimamo broj $f(a)$. Za limes L funkcije f u točki a koristimo oznaku:

$$L = \lim_{x\to a} f(x).$$

i čitamo: $f(x)$ *konvergira (teži) prema* L *kada* x *konvergira prema* a.

Oznaka $x \to a$ znači da se x približava točki a.



Slika 5.1. $L = \lim\limits_{x\to a} f(x) \, : \, (\, a_n \to a \,) \Rightarrow (\, f(a_n) \to L \,)$

Primjedba 5.2 *Funkcija* f *u točki* a *može imati samo jedan limes.*

Primjedba 5.3 *Neka je* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, *bilo koja funkcija i* $a \in D$. *Iz definicije limesa vidimo da limes funkcije* f *u točki* a *ne ovisi o* $f(a)$, *već je određen vrijednostima funkcije u neposrednoj blizini točke* a. *Stoga je problem egzistencije i određivanja limesa funkcije* f *u točki* $a \in D$ *ekvivalentan problemu egzistencije i određivanja limesa u točki* a *funkcije* $\tilde{f}$ *definirane formulom:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D\backslash\{a\} \\ c, & x = a \end{cases}$$

gdje je c bilo koji realan broj. Ta činjenica, osim što nam često olakšava računanje limesa funkcije, govori nam da je u općem slučaju $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Primjer 5.3 *Za* $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$ *odredimo* a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

Domena funkcije f je skup $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

a) Neka je (a_n), $a_n \in D$, $a_n \neq 1$, bilo koji niz realnih brojeva koji konvergira broju 1, tj. za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n^2+5a_n-3}{a_n+3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n^2+5a_n-3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+3)} = \frac{2\cdot 1^2+5\cdot 1-3}{1+3} = 1.$$

Dakle, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = 1$. Uočite da je i $f(1) = 1$. Slično se može pokazati da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ za svaki $a \in D$.

b) Uzmimo sada $a = -3$. Ako je (a_n) bilo koji niz realnih brojeva takav da je $a_n \in D$, $a_n \neq -3$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -3$, onda iz $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2a_n^2+5a_n-3}{a_n+3}$ vidimo da se javlja neodređeni oblik $\left(\frac{0}{0}\right)$, tj. i brojnik i nazivnik konvergiraju prema nuli kada $n\to\infty$. Zamijetite da za svaki $x \neq -3$ vrijedi:

$$f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = 2x-1.$$

Prema *Primjedbi 5.3* $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$ postoji onda i samo onda ako postoji $\lim\limits_{x\to -3}(2x-1)$ i pri tome je $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3}(2x-1)$. Odredimo $\lim\limits_{x\to -3}(2x-1)$:

$$\lim_{x\to -3}(2x-1) = \lim_{n\to\infty}(2a_n-1) = 2\lim_{n\to\infty} a_n - 1 = 2(-3)-1 = -7.$$

Dakle, $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$.

Primjer 5.4 *Odredimo: a)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$, *b)* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$, $a \neq 2$.

Neka je $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$. Domena funkcije f je skup $D = [1, 2 > \cup < 2, \infty >$. Zamijetite da je $D' = [1, \infty >$.

a) Neka je (a_n) bilo koji niz za koji je $a_n \in D$, $a_n \neq 2$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Treba odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{a_n-1}-1}{a_n-2}$. Kao i u prethodnom primjeru, javlja se neodređeni oblik $\left(\frac{0}{0}\right)$. Za svaki $x \neq 2$ imamo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\left(\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}.$$

Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{a_n-1}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \frac{1}{2}$, tada je $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2}$. Prema *Primjedbi 5.3* je:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2}.$$

b) Za bilo koji niz (a_n) takav da je $a_n \in D$, $a_n \neq a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in D$ dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{a_n-1}-1}{a_n-2} = \dfrac{\sqrt{a-1}-1}{a-2}$, odakle zaključujemo da je:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{a-1}-1}{a-2}.$$

Zamijetite da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ za svaki $a \in D$.

Primjer 5.5 *Za bilo koje realne brojeve α i β vrijedi:*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} (1+\alpha x)^{\beta/x} = e^{\alpha\,\beta}.}$$

Neka je (a_n), $a_n \neq 0$, bilo koji niz realnih brojeva koji konvergira nuli. Treba pokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha\, a_n)^{\beta/a_n} = e^{\alpha\,\beta}$. Pomoću niza (a_n) napravimo novi niz (ξ_n) takav da je $\xi_n = \dfrac{1}{a_n}$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \mid \xi_n \mid = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{\xi_n}\right)^{\beta\,\xi_n} = e^{\alpha\,\beta}$ (vidi *Primjer 3.37*). Budući da je $(1+\alpha a_n)^{\beta/a_n} = \left(1+\dfrac{\alpha}{\xi_n}\right)^{\beta\,\xi_n}$ dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} (1+\alpha\, a_n)^{\beta/a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{\xi_n}\right)^{\beta\,\xi_n} = e^{\alpha\,\beta}.$$

Tako je npr. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-\frac{x}{3}\right)^{6/x} = e^{(-1/3)6} = e^{-2}$.

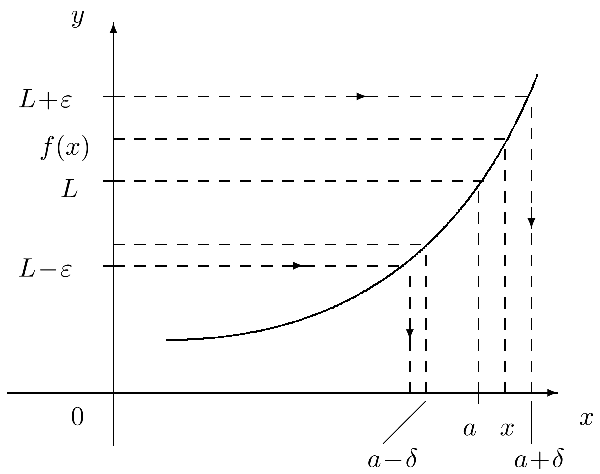
Navedimo također i Cauchyjevu definiciju limesa funkcije f u točki a. Pokazat ćemo da je ona ekvivalentna Heineovoj definiciji, tj. ako je broj L limes funkcije f u točki a po jednoj definiciji, onda je L limes i po drugoj definiciji.

Cauchyjeva definicija limesa funkcije:

Realan broj L je **limes** ili **granična vrijednost** funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $a \in D'$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da:

$$(x \in D\backslash\{a\} \,;\, | x - a |< \delta) \Rightarrow (| f(x) - L |< \varepsilon).$$

Ako je a izolirana točka skupa D, onda za graničnu vrijednost funkcije f u točki a uzimamo broj $f(a)$.



Slika 5.2. $(0 <| x - a |< \delta) \Rightarrow (| f(x) - L |< \varepsilon)$

Dokažimo ekvivalentnost Heinove i Cauchyjeve definicije limesa funkcije.

Dokaz. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ realna funkcija realne varijable, $a \in D'$ i L limes funkcije f u točki $a \in D'$ prema Cauchyjevoj definiciji. Nadalje, neka je (a_n), $a_n \neq a$, bilo koji niz iz D koji konvergira prema a. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da:

$$(0 <| x - a |< \delta) \Rightarrow (| f(x) - L |< \varepsilon)\,. \tag{5.1}$$

Zbog $a_n \to a$ za taj δ postoji prirodan broj n_0 takav da

$$(n > n_0) \Rightarrow (| a_n - a |< \delta). \tag{5.2}$$

Sada, za svaki $n > n_0$ prema (5.2) i (5.1) vrijedi $| f(a_n) - L |< \varepsilon$, što znači da niz $(f(a_n))$ konvergira k L. Prema Heinovoj definiciji L je limes funkcije f u točki a.

Preostaje dokazati obrat. Ako f ima svojstvo da svaki niz $(f(a_n))$ konvergira k L, kad god je (a_n), $a_n \neq a \in D'$, niz iz D koji konvergira broju a, treba pokazati da je L limes funkcije f u točki a po Cauchyjevoj definiciji. Dokaz provodimo metodom kontradikcije. Pretpostavimo da L nije limes funkcije f u točki a po Cauchyjevoj definiciji. To znači da postoji barem jedan $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svako $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in D$, takvo da je

$$0 <\mid x_\delta - a \mid< \delta \quad \text{i} \quad \mid f(x_\delta) - L \mid\geq \varepsilon.$$

Posebno, stavimo li za δ redom vrijednosti $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$, postoji $a_n = x_{\frac{1}{n}}$ takvo da je

$$0 <\mid a_n - a \mid< \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \mid f(a_n) - L \mid\geq \varepsilon.$$

Prva gore navedena nejednakost daje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, a iz druge zaključujemo da L nije granična vrijednost niza $(f(a_n))$. S druge strane, prema pretpostavci je $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = L$. Tako smo došli do kontradikcije. Dakle, ako je L limes funkcije f u točki $a \in D'$ prema Heinovoj definiciji, tada je i prema Cauchyjevoj definiciji.

Primjer 5.6 *Pokažimo da je* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4.$

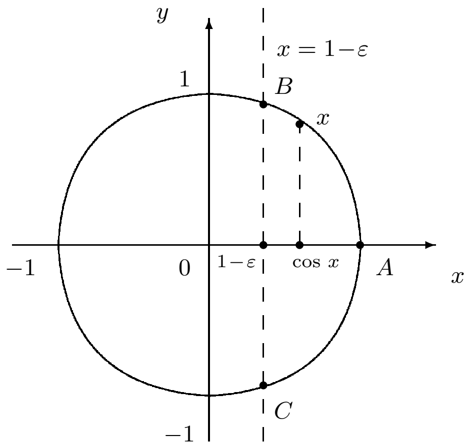
Za svaki $x \neq 2$ imamo $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = |x-2|$. Za zadani $\varepsilon > 0$ neka je $\delta > 0$ bilo koji realan broj takav da je $\delta < \varepsilon$. Tada za svaki x takav da je $0 < |x-2| < \delta$ imamo

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = |x-2| < \delta < \varepsilon.$$

Primjer 5.7 *Vrijedi:* a) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1,$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0.$

Izračunajmo samo prvi limes. Drugi se može pokazati na sličan način. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da je $\mid \cos x - 1 \mid< \varepsilon$ za svaki $x \neq 0$ iz intervala $< -\delta, \delta >$.

Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Uzmimo jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava u ravnini. Pravac $x = 1 - \varepsilon$ siječe kružnicu u točkama B, C (vidi *Sliku 5.3*). Neka je δ duljina luka $\widehat{AB}$. Sada točke segmenta $[-\delta, \delta]$ identificirajmo s točkama luka $\widehat{CB}$. Pri tome je broju $-\delta$ pridružena točka C, nuli točka A i broju δ točka B. Neka je $x \neq 0$ iz intervala $< -\delta, \delta >$. Sa slike se vidi da je $1 - \varepsilon < \cos x < 1 + \varepsilon$, odakle je $\mid \cos x - 1 \mid< \varepsilon$.



Slika 5.3.

Napravimo dokaz i na drugi način. Prema poznatoj trigonometrijskoj formuli je $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, Budući da je $\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \left|\frac{x}{2}\right|$, dobivamo:

$$|1-\cos x| = 2\left|\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \frac{|x|^2}{2}.$$

Za proizvoljan realan broj $\varepsilon > 0$ neka je $\delta > 0$ takav da je $\delta < \sqrt{2\varepsilon}$. Tada za svaki $x \neq 0$, $| x-0 | < \delta$ imamo:

$$|1-\cos x| < \frac{|x|^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} < \varepsilon.$$

Primjedba 5.4 *Za razliku od Heinove definicije, Cauchyjeva definicija ne govori nam kako pronaći limes L funkcije f u točki a.*

Ukoliko realan broj L ima svojstvo da je $f(x)$, $x \in D\backslash\{a\}$, sve bliže broju L (u smislu da $| f(x) - L |$ postane i ostane manje od svakog realnog broja) što je x bliži broju a, onda iz Cauchyjeve definicije slijedi da je $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Dokažite!

Primjer 5.8 *Neka je funkcija f zadana formulom $f(x) = \dfrac{x^4-16}{x^4-2x^2-8}$. Odredimo* a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $a \notin \{-2,2\}$.

Domena ove funkcije je skup $D = \mathbb{R} \setminus\{-2,2\}$. Zamijetite da je brojnik $x^4-16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$, a nazivnik $x^4-2x^2-8 = (x-2)(x+2)(x^2+2)$. Stoga za svaki $x \in D$ imamo $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+2}$. Ako je $x \in D$ sve bliži broju $c \in \mathbb{R}$, onda je $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+2}$ sve bliže broju $\dfrac{c^2+4}{c^2+2}$. Prema *Primjedbi 5.4* je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \dfrac{c^2+4}{c^2+2}$.

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{n\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^4-2x^2-8} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{x^2+2} = \dfrac{2^2+4}{2^2+2} = \dfrac{4}{3}.$
Unutar zagrada naveli smo neodređeni oblik koji se javlja kada $x \to 2$.

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{n\to -2} \dfrac{x^4-16}{x^4-2x^2-8} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+4}{x^2+2} = \dfrac{(-2)^2+4}{(-2)^2+2} = \dfrac{4}{3}.$
Unutar zagrada naveli smo neodređeni oblik koji se javlja kada $x \to -2$.

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to a} \dfrac{x^4-16}{x^4-2x^2-8} = \dfrac{a^4-16}{a^4-2a^2-8} = \dfrac{a^2+4}{a^2+2}.$

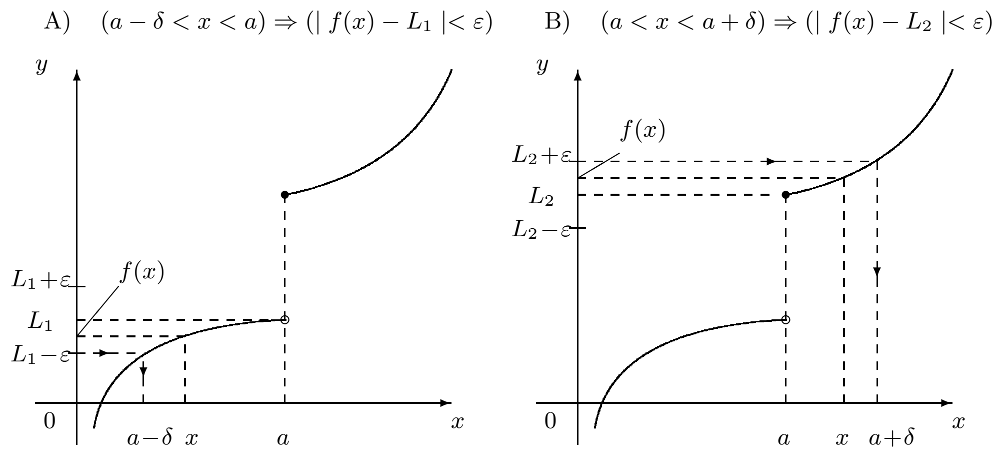
Primjer 5.9 *Izračunajmo* $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4} \left(\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\right) \frac{(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = (\text{Primjedba } 5.4) = \frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+2\cdot 4}+3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Osim limesa funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $a \in D'$ mogu se definirati i **jednostrani limesi** tj. limes slijeva (lijevi limes) i limes zdesna (desni limes) u točki $a \in D'$. Navest ćemo istovremeno Heinovu i Cauchyjevu definiciju. Dokaz njihove ekvivalentnosti sličan je dokazu ekvivalentnosti definicija za limes funkcije u točki i stoga ga prepuštamo čitatelju.

> Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ realna funkcija realne varijable i $a \in D'$. Kažemo da f ima **limes L slijeva** [**limes L zdesna**] u točki a i pišemo
>
> $$L = \lim_{x\to a-} f(x) \quad [L = \lim_{x\to a+} f(x)]$$
>
> **Heine:** ako za svaki niz (a_n) iz D takav da je $a_n < a$ [$a_n > a$] i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = L$.
>
> **Cauchy:** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in D$ sa svojstvom $a - \delta < x < a$ [$a < x < a + \delta$] vrijedi $| f(x) - L | < \varepsilon$.

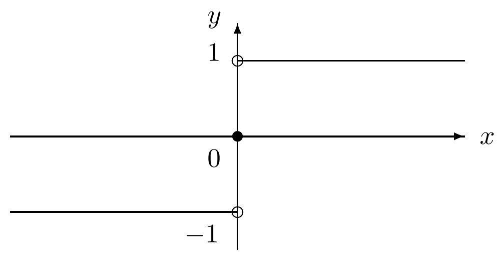
Oznaka $x \to a-$ znači da je $x < a$ i da se x približava točki a. Slično značenje ima i oznaka $x \to a+$ (vidi *Sliku 5.4*).



Slika 5.4. A) $L_1 = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$, *B)* $L_2 = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$

Jednostrani limes, kao i limes funkcije, je jedinstven ukoliko postoji.

Primjer 5.10 *Nacrtajmo graf funkcije* $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0. \end{cases}$ *i odredimo* $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.



Slika 5.5.

Za svaki $x<0$ je $f(x)=-1$, dok je $f(x)=1$ za $x>0$. Odredimo $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$:

> **Heine**: Neka je (a_n), $a_n<0$, bilo koji niz realnih brojeva koji konvergira nuli. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1) = -1$. Dakle, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$.
>
> **Cauchy**: Neka je $\varepsilon>0$ bilo koji realan broj. Budući da je $\mid f(x)-(-1) \mid = 0 < \varepsilon$ za svaki $x<0$, za traženi $\delta>0$ možemo uzeti bilo koji realan broj.

Slično se može pokazati da je $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$.

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, ima limes L u točki $a \in D'$ onda i samo onda ako ona u točki a ima i limes slijeva i limes zdesna koji iznose L.

Dokaz. Ako je $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da:

$$(\, x \in D;\ 0 <|\ x - a\ |< \delta\,) \Rightarrow (\,|\ f(x) - L\ |< \varepsilon\,), \tag{5.3}$$

odakle dobivamo:

$$(\, x \in D; a-\delta < x < a\,) \Rightarrow (\,|\ f(x)-L\ |< \varepsilon\,)\&(\, x \in D; a < x < a+\delta\,) \Rightarrow (\,|\ f(x)-L\ |< \varepsilon\,). \tag{5.4}$$

Iz (5.4) i Cauchyjeve definicije jednostranih limesa slijedi:

$$L = \lim_{x\to a-} f(x), \quad L = \lim_{x\to a+} f(x).$$

Obratno, ako je $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ takvi da:

$$(\, x \in D; a-\delta_1 < x < a\,) \Rightarrow (\,|\ f(x)-L\ |< \varepsilon\,)\&(\, x \in D; a < x < a+\delta_2\,) \Rightarrow (\,|\ f(x)-L\ |< \varepsilon\,).$$

Za $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vrijedi (5.3), što nam govori da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Primjer 5.11 *Neka je* $f(x) = \dfrac{|\ x-2\ |}{x-2}$. *Odredimo* $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)$.

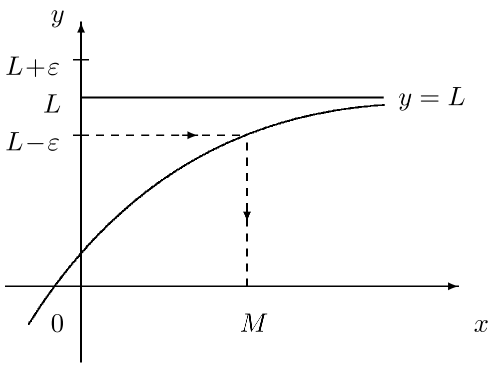
Zamijetite da je:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Kada $x \to 2-$ (tj. x je manji od 2 i sve bliži broju 2) onda je $f(x) = -1$. Dakle, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} (-1) = -1$. Slično, ako $x \to 2+$ onda je $f(x) = 1$, odakle je $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} 1 = 1$. Prema prethodnoj tvrdnji funkcija f nema limes u točki $x = 2$.

Navedimo istovremeno Heinovu i Cauchyjevu definiciju za limes funkcije f kada $x \to \infty$.

> Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ odozgo neomeđen skup i $f : D \to \mathbb{R}$ bilo koja funkcija. Kažemo da je realan broj L **limes** ili **granična vrijednost** funkcije f u ∞ i pišemo $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$
>
> **Heine:** ako za svaki niz (a_n) iz D za koji je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ vrijedi
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L.$$
>
> **Cauchy:** ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $M = M(\varepsilon)$ takav da
>
> $$(\, x \in D\,;\, x > M\,) \Rightarrow (|\, f(x) - L\,| < \varepsilon).$$



Slika 5.6. $(\, x > M\,) \Rightarrow (\,|\, f(x) - L\,| < \varepsilon\,)$

Dokaz ekvivalentnosti tih dviju definicija prepuštamo čitatelju. Slično se definira limes funkcije f kada $x \to -\infty$. Svaki od limesa $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, ukoliko postoji, je jedinstven.

Primjer 5.12 *Po definiciji pokažimo da je* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Heine: Neka je a_n bilo koji niz realnih brojeva takav da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Tada je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Cauchy: Za M je dovoljno uzeti broj $\frac{1}{\varepsilon}$.

Slijedeća pravila posljedica su Heinove definicije limesa funkcije i odgovarajućih pravila (*Poglavlje 3*) za limes nizova realnih brojeva.

Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$ dvije funkcije i $a \in D'$. Ako postoje realni brojevi L_1 i L_2 takvi da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$, onda vrijedi:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$, tj. limes zbroja(razlike) jednak je zbroju(razlici) limesa.
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$, tj. limes produkta jednak je produktu limesa.
3. $\lim\limits_{x\to a} \mid g(x) \mid = \mid \lim\limits_{x\to a} g(x) \mid = \mid L_2 \mid$. Limes apsolutne vrijednosti funkcije jednak je apsolutnoj vrijednosti limesa funkcije.
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{1}{L_2}$ ako je $g(x) \neq 0$ u nekoj okolini od a i $L_2 \neq 0$. Limes recipročne vrijednosti funkcije jednak je recipročnoj vrijednosti limesa funkcije.
5. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, ako je $g(x) \neq 0$ u nekoj $\varepsilon -$ okolini broja a i $L_2 \neq 0$. Limes kvocijenta jednak je kvocijentu limesa.
6. Ako je $f(x) > 0$ za svaki $x \in D$ i $\alpha > 0$ bilo koji realan broj, onda je $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^\alpha = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^\alpha = L_1^\alpha$.

Primjedba 5.5 *Može se pokazati da navedene tvrdnje vrijede i za limes funkcije kada $x \to \pm\infty$ kao i za jednostrane limese.*

Primjedba 5.6 *Iz drugog pravila dobivamo da je $\lim\limits_{x\to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ za svaki realan broj c.*

Primjer 5.13 *Prepoznajte koja su od navedenih pravila korištena u sljedećim primjerima:*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2}{3x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x)} = \dfrac{2^2+2}{3\cdot 2} = 1.$

b)
$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}} = \lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-1}} = \sqrt{\frac{3+3}{3-1}} = \sqrt{3}.$$

c)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x}\begin{matrix}/:x\\/:x\end{matrix} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{3+1/x}$$
$$= \sqrt{3+\lim_{x\to\infty}(1/x)} = \sqrt{3}.$$

d)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x} \overset{(\frac{\infty}{-\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x)}}{x}\begin{matrix}/:x\\/:x\end{matrix}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{3+1/x}\right) = -\sqrt{3+\lim_{x\to-\infty}(1/x)} = -\sqrt{3}.$$

U posljednja dva primjera javlja se tzv. neodređeni oblik $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, tj. i brojnik i nazivnik su sve veći kad $x\to\infty$ ili kad $x\to-\infty$.

Primjer 5.14 *Odredimo* $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5}{2x^2+5}$ *i* $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+5}{2x^2+5}$.

Za svaki $x\neq 0$ imamo:
$$\frac{x^2-3x+5\;/:x^2}{2x^2+5\;\;\;/:x^2} = \frac{1-3/x+5/x^2}{2+5/x^2}.$$
Kad $x\to\infty$ ili $x\to-\infty$ onda $3/x\to 0$ i $5/x^2\to 0$, odakle dobivamo:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5}{2x^2+5} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1-3/x+5}{2+5/x^2} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+5}{2x^2+5} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1-3/x+5}{2+5/x^2} = \frac{1}{2}.$$

Neka su $f,g,h: D\to\mathbb{R}$ realne funkcije realne varijable, $a\in D'$ i neka postoji ε-okolina $<a-\varepsilon, a+\varepsilon>$ broja a takva da je:
$$f(x)\leq g(x)\leq h(x)\quad (\forall x\in <a-\varepsilon,a+\varepsilon>\setminus\{a\}). \tag{5.5}$$
Ako je $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$, onda postoji $\lim_{x\to a}g(x)$ i pri tome je $\lim_{x\to a}g(x)=L$.

Dokaz. Neka je (a_n), $a_n\neq a$, bilo koji niz elemenata iz D koji konvergira prema broju a. Tada je prema Heineovoj definiciji
$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}h(a_n)=L.$$

Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, postoji prirodan broj n_0 takav da je $| a_n - a |< \varepsilon$ za svaki $n > n_0$. Prema (5.5) za svaki prirodan broj $n > n_0$ vrijedi

$$f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n),$$

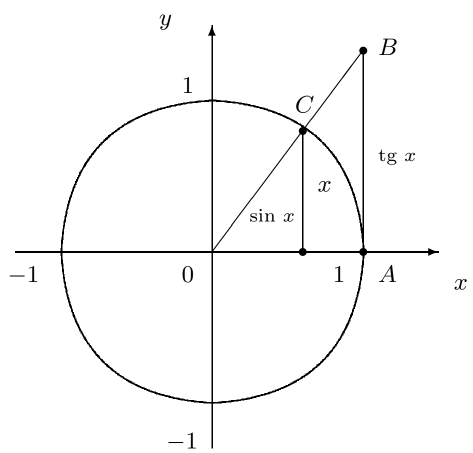
odakle dobivamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = L$, tj. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

Primjedba 5.7 *Tvrdnja vrijedi za limes slijeva [limes zdesna] ako se zamijene ε okolina $< a-\varepsilon, a+\varepsilon >$ intervalom $< a-\varepsilon, a >$ [intervalom $< a, a+\varepsilon >$] i uvjet (5.5) uvjetom $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ za svaki $x \in< a-\varepsilon, a >$ [za svaki $x \in< a, a+\varepsilon >$].*

Zamijene li se ε okolina $< a-\varepsilon, a+\varepsilon >$ intervalom $< -\infty, m >$, $m < 0$ [intervalom $< M, \infty >$, $M > 0$], i uvjet (5.5) uvjetom $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ za svaki $x \leq m$ [za svaki $x \geq M$], onda tvrdnja vrijedi i za limes kada $x \to -\infty$ [kada $x \to \infty$].

Primjer 5.15 *Pokažimo da je* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

a) Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$ i neka duljina luka $\overset{\frown}{AC}$ iznosi x.



Slika 5.7.

Prema slici je $\sin x < x$. Površina trokuta OAB iznosi $\dfrac{1\cdot \operatorname{tg} x}{2} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$, a površina kružnog isječka OAC je $\dfrac{1\cdot x}{2} = \dfrac{x}{2}$. Budući da je površina kružnog isječka manja od površine trokuta, bit će $\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, tj. $x < \operatorname{tg} x$. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned}
&\sin x < x < \operatorname{tg} x \ \ / : \sin x \\
&1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\
&\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.
\end{aligned}$$

b) Neka je sada $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Tada je $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ i $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$. Budući da su funkcije $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, $x \mapsto \cos x$ parne, dobivamo $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Dakle, za svaki $x \neq 0$ iz intervala $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ vrijede nejednakosti:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, prema prethodnoj nejednakosti je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Primjer 5.16 *Odredimo* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$

Slijedeća tvrdnja govori o tzv. **metodi supstitucije** za računanje limesa funkcije.

Neka su $g : D \to \mathbb{R}$ i $f : K \to \mathbb{R}$ dvije realne funkcije realne varijable, $a \in D'$ i $x_0 \in K'$. Ako su ispunjene sljedeće pretpostavke:

a) $g(D) \subseteq K$, tj. definirana je kompozicija $x \mapsto f(g(x))$,

b) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = x_0$ i $\lim\limits_{t\to x_0} f(t) = L$,

c) postoji $\varepsilon > 0$, takvo da je $g(x) \neq x_0$ za svaki $x \neq a$ iz D za koji je $\mid x - a \mid < \varepsilon$,

onda je $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{t\to x_0} f(t) = L$.

Dokaz. Iskoristimo Heineovu definiciju limesa funkcije. Neka je (a_n), $a_n \neq a$, bilo koji konvergentan niz iz D i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Treba pokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(a_n)) = L$. Po pretpostavci b) funkcija g ima limes x_0 u točki a. Prema Heineovoj definiciji je $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n)) = x_0$. Po pretpostavci a) je $g(a_n) \in K$. Budući da je $a_n \neq a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, prema c) možemo smatrati da je $g(a_n) \neq x_0$. Funkcija f ima limes L u točki x_0 pa stoga prema Heinovj definiciji za niz $(g(a_n))$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(a_n)) = L$.

Primjedba 5.8 *Ilustrirajmo primjerom da se uvjet* c) *ne smije izostaviti. Neka je:*

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Uočite da je $f(g(x)) = 1$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *. Osim toga je* $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ *i* $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$. *Neka je* $a = x_0 = 0$. *Tada je* $1 = \lim\limits_{x\to a} f(g(x)) \neq \lim\limits_{t\to x_0} f(t) = 0$. *Uvjet* c) *nije ispunjen. Naime, za svaki* $\varepsilon > 0$ *i bilo koji realan broj* $x \neq a$ *je* $g(x) = x_0$.

Primjedba 5.9 *Nije teško provjeriti da navedena tvrdnja vrijedi i za jednostrane limese. Također, zamijeni li se samo uvjet* c) *uvjetom*

c') postoji $M > 0$ [$m < 0$]takav da je $g(x) \neq x_0$ za svaki $x > M$ [za svaki $x < m$],

onda tvrdnja vrijedi i za $a = \infty$ *[za* $a = -\infty$*].*

Objasnimo pobliže kako koristiti navedenu metodu supstitucije. Pretpostavimo da treba odrediti $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$. Uvedimo supstituciju $t = g(x)$ i odredimo $\lim\limits_{x\to a} t = t_0$. Ako je $t \neq t_0$ za svaki $x \neq a$ iz neke ε-okoline broja a, onda je

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{t\to t_0} f(t).$$

Slično se postupa kod jednostranih limesa i za $a = \infty$ ili $a = -\infty$.

Primjer 5.17 *Odredimo* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$.

Neka je $t = x - 2$. Tada je $\lim\limits_{x\to 2} t = 0$ i $t \neq 0$ za svaki $x \neq 2$. Dakle, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

Metoda supstitucije često se koristi za računanje limesa iracionalnih izraza.

Primjer 5.18 *Izračunajmo* a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

a) Neka je $t = \sqrt[3]{x}$. Kad $x \to 1$ onda $t = \sqrt[3]{x} \to 1$, tj. $\lim\limits_{x\to 1} t = \lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x} = 1$. Za svaki $x \neq 1$ je $t \neq \lim\limits_{x\to 1} t$. Uz navedenu supstituciju dobivamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} &= \lim_{t\to 1} \frac{t^2 - 2t + 1}{(t^3 - 1)^2} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)^2}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2} \\ &= \lim_{t\to 1} \frac{1}{(t^2+t+1)^2} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

b) Stavimo li $t = \sqrt[3]{x+1}$ dobivamo $\lim\limits_{x\to 0} t = 1$. Lako je provjeriti da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $t \neq 1$ za svaki $x \neq 0$ iz intervala $< -\varepsilon, \varepsilon >$. Imamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \lim_{t\to 1} \frac{t^3-1}{t-1} = \lim_{t\to 1}(t^2+t+1) = 3.$$

Primjer 5.19 *Pokažimo da za sve realne brojeve α i β vrijedi*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta\, x} = e^{\alpha\,\beta}} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta\, x} = e^{\alpha\,\beta}}$$

Dokažimo samo prvi limes. Drugi se dokazuje na sličan način. Neka je $t = \frac{1}{x}$. Tada je $\lim\limits_{x\to\infty} t = 0$ i $t = \frac{1}{x} \neq 0$ za svaki $x > 0$. Sada je $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta\, x} = \lim\limits_{t\to 0} (1+\alpha\, t)^{\beta/t} = e^{\alpha\,\beta}$ (vidi *Primjer 5.5*).

Kažemo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, u točki $a \in D'$ ima limes ∞ i pišemo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

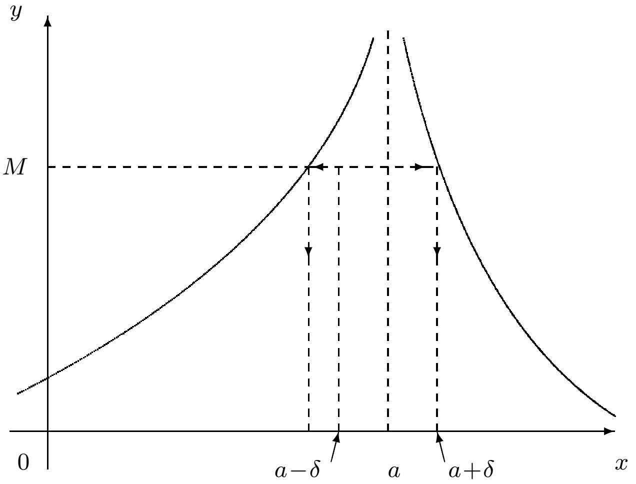
Heine: ako za svaki niz (a_n) iz D takav da je $a_n \neq a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty.$$

Cauchy: ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da

$$(\, x \in D \backslash \{a\}\,;\ |\ x - a\ |< \delta\,) \Rightarrow (\, f(x) > M\,).$$

Može se pokazati da su Heineova i Cauchyjeva definicija ekvivalentne.



Slika 5.8. $(\,0 <\mid x-a\mid < \delta\,) \Rightarrow (\,f(x) > M\,)$

Primjedba 5.10 *Slično se definiraju i sljedeći limesi:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a+} f(x) = -\infty.$$

Definirajte te limese!

Primjer 5.20 *Odredimo* $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2}$.

Što je x bliži broju 4, nazivnik je pozitivan i sve bliži nuli, a kvocijent sve veći. Dakle, $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2} = \infty$.

Napravimo strogi dokaz po Cauchyjevoj definiciji. Neka je $M > 0$ bilo koji realan broj. Budući da je

$$\frac{1}{(x-4)^2} > M \Leftrightarrow \frac{1}{M} > (x-4)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{M}} > \mid x-4\mid,$$

za $\delta > 0$ je dovoljno uzeti bilo koji realan broj manji od $\dfrac{1}{\sqrt{M}}$.

Primjer 5.21 *Odredimo* a) $\lim\limits_{x\to 4-} \dfrac{1}{x-4}$ *i* b) $\lim\limits_{x\to 4+} \dfrac{1}{x-4}$.

a) Kada $x \to 4-$, onda je nazivnik $x-4$ negativan i sve bliži nuli, a izraz pod limesom postaje manji od svakog realnog broja. Dakle, $\lim\limits_{x\to 4-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$.

b) Ako $x \to 4+$, nazivnik $x-4$ je pozitivan i sve bliži nuli. Stoga izraz pod limesom postaje veći od svakog realnog broja, tj. $\lim\limits_{x\to 4+} \dfrac{1}{x-4} = \infty$.

Zamijetite da ne postoji $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4}$ niti kao konačan realan broj niti kao ∞ ili $-\infty$.

Do sada smo definirali limese $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ za sve kombinacije od a i L kao konačne ili beskonačne brojeve osim za $a=\infty$ i $a=-\infty$ uz $L=\infty$ i $L=-\infty$.

Neka je $D\subseteq\mathbb{R}$ odozgo neomeđen skup. Kažemo da funkcija $f : D\to\mathbb{R}$ konvergira prema ∞ [prema $-\infty$] kada x konvergira prema ∞ i pišemo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ [$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$]

Heine: ako za svaki niz (a_n) iz D takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\infty \ \left[\ \lim_{n\to\infty} f(a_n)=-\infty\ \right].$$

Cauchy: ako za svaki realan broj $M>0$ $[\,m<0\,]$ postoji realan broj $x_0=x_0(M)>0$ $[\,x_0=x_0(m)\,]$ takav da

$$(\,x\in D\backslash\{a\}\,;\,x>x_0\,)\Rightarrow(\,f(x)>M\,)$$

$$[\ (\,x\in D\backslash\{a\}\,;\,x>x_0\,)\Rightarrow(\,f(x)<m\,)\ ].$$

Nije teško pokazati da su Heineova i Cauchyjeva definicija ekvivalentne definicije. Slično se definiraju $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ za funkciju f definiranu na odozdo neomeđenom skupu.

Primjer 5.22 Limes racionalne funkcije *kada* $x\to\infty$ *ili* $x\to-\infty$. *Neka je* $R=\dfrac{P}{Q}$ *racionalna funkcija,* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ *i* $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$. *Budući da je:*

$$R(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\frac{a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)}{b_mx^m\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_mx}+\cdots+\frac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\frac{b_0}{b_mx^m}\right)}$$

i da svaki od članova:

$$\frac{a_{n-1}}{a_nx},\ \frac{a_{n-2}}{a_nx^2},\ \ldots,\ \frac{a_0}{a_nx^n},\ \frac{b_{m-1}}{b_mx},\ \frac{b_{m-2}}{b_mx^2},\ \ldots,\ \frac{b_0}{b_mx^m}$$

konvergira prema nuli kada $x\to\infty$ *ili* $x\to-\infty$, *dobivamo:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

Dakle, limes racionalne funkcije kada $x\to\infty$ *ili* $x\to-\infty$ *ovisi samo o eksponentima i koeficijentima najstarijih članova. Ilustrirajmo navedenu tvrdnju:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x}{3x^2 - 2x + 5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3}{3x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{3} = \infty,$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^5 - x^2}{7x^3 + 2x + 5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^5}{7x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{7} = \infty,$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^3 + x}{12x^2 - 7x - 125} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^3}{12x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{6} = -\infty,$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-9x^7 - 1}{7x^2 - 2x + 5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-9x^7}{7x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-9x^5}{7} = \infty,$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2 - x}{5x^3 - 3x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2}{5x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{5x} = 0,$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - x}{5x^3 - 3x + 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{5x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{5x} = 0,$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^7 + x}{5x^7 - 3x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^7}{5x^7} = \frac{2}{5},$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^8 + 2x}{2x^8 + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^8}{2x^8} = 2.$

Primjer 5.23 *Neka je* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *Pokažimo da za sve realne brojeve* α *i* β *vrijedi:*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{f(x)}\right)^{\beta\, f(x)} = e^{\alpha\,\beta}}$$

Neka je $t = \frac{1}{f(x)}$. Tada $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ povlači: $\lim\limits_{x\to\infty} t = 0$. Osim toga je $t \neq 0$ za svaki dovoljno velik x. Sada je $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{f(x)}\right)^{\beta\, f(x)} = e^{\alpha\,\beta} = \lim\limits_{t\to 0} (1 + \alpha\, t)^{\beta/t} = e^{\alpha\,\beta}$.

5.1.1 Asimptote

Neka točka $T(x, f(x))$ leži na grafu funkcije f. Pravac p nazivamo **asimptotom** funkcije f ako udaljenost točke T od pravca konvergira nuli kada se točka T udaljuje od ishodišta.

Asimptota može biti paralelna s nekom od koordinatnih osi ili u kosom položaju prema tim osima.

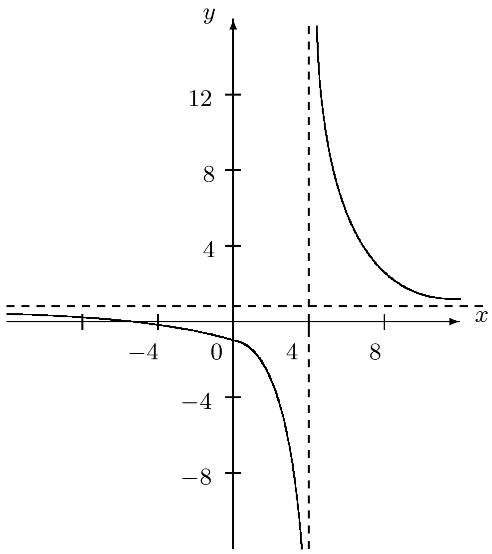
Pravac $x = a$ nazivamo **vertikalnom asimptotom** funkcije f ako je barem jedan od limesa:

$$\lim_{x\to a+} f(x), \qquad \lim_{x\to a-} f(x)$$

jednak ili ∞ ili $-\infty$.

Primjer 5.24 *Odredimo vertikalne asimptote funkcije* $f(x) = \dfrac{x+5}{x-4}$.

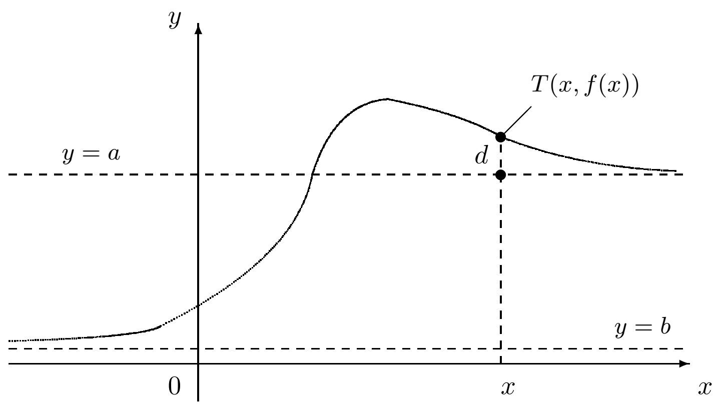
Domena ove funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Budući da za svaki $a \neq 4$ vrijedi $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{a+5}{a-4}$, pravac $x = a$ $(a \neq 4)$ nije vertikalna asimptota. Kada je $x < 4$ i sve bliži broju 4 brojnik je sve bliži broju 9, a nazivnik je negativan i sve bliži nuli. Dakle, $\lim_{x\to 4-} \dfrac{x+5}{x-4} = -\infty$. Slično se zaključi da je $\lim_{x\to 4+} \dfrac{x+5}{x-4} = \infty$. Prema tome, pravac $x = 4$ je vertikalna asimptota funkcije f.



Slika 5.9. Graf funkcije $x \mapsto \frac{x+5}{x-4}$

Pravac $y = a$ (vidi *Sliku 5.10*) nazivamo **horizontalnom asimptotom** funkcije f ako udaljenost $d = | f(x) - a |$ između asimptote i točke $T = (x, f(x))$ konvergira nuli kada $x \to \infty$ ili kada $x \to -\infty$, tj. ako je

$$\lim_{x\to\infty} d = 0 \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to-\infty} d = 0.$$



Slika 5.10. Pravci $y = a$ i $y = b$ su horizontalne asimptote

Zamijetite da je $\lim\limits_{x\to\infty} d = \lim\limits_{x\to\infty} | f(x) - a | = 0$ onda i samo onda ako je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Slično, $\lim\limits_{x\to-\infty} d = 0$ onda i samo onda ako je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$. Dakle, vrijedi sljedeća tvrdnja:

> Pravac $y = a$ je horizontalna asimptota funkcije f onda i samo onda ako je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ ili $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

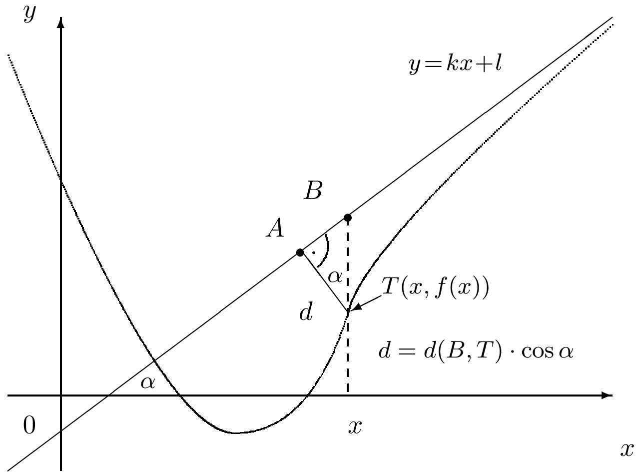
Primjer 5.25 *Koja od funkcija zadanih formulama* a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$, b) $f(x) = \sin x$ *ima horizontalnu asimptotu:*

a) $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. Što je x sve veći to je $\frac{2}{x}$ sve manje pa $\frac{2}{x} \to 0$ kada $x \to \infty$. Stoga je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$. Slično se može pokazati da je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Dakle, pravac $y = 1$ je jedina horizontalna asimptota funkcije f.

b) Kad $x \to \infty$ (ili $-\infty$) funkcija sinus poprimi beskonačno mnogo puta svaku vrijednost iz segmenta $[-1, 1]$. Stoga, za bilo koje $L \in \mathbb{R}$ i $M > 0$ postoji beskonačno mnogo vrijednosti od x takvih da je $| f(x) - L |$ veće od svakog realnog broja $\varepsilon < 0.5$

(provjerite grafički!). Dakle, ne postoje $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ pa stoga ne postoje ni horizontalne asimptote.

Pravac $y = kx + l$ (vidi *Sliku 5.11*) nazivamo **desnom kosom asimptotom** [**lijevom kosom asimptotom**] funkcije f ako udaljenost d između pravca i točke $T(x, f(x))$ konvergira nuli kada $x \to \infty$ [kada $x \to -\infty$] tj. ako je $\lim\limits_{x\to\infty} d = 0$ [$\lim\limits_{x\to-\infty} d = 0$].



Slika 5.11.

Zamijetite da udaljenost d između pravca $y = kx + l$ i točke $T(x, f(x))$ konvergira nuli (kada $x \to \infty$ ili $x \to -\infty$) onda i samo onda ako $d(B, T) = | f(x) - kx - l |$ konvergira nuli.

Pravac $y = kx+l$ je desna kosa asimptota [lijeva kosa asimptota] funkcije f onda i samo onda ako je

$$(i) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \left[\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k\right] \quad \text{i}$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = l \quad \left[\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = l\right].$$

Dokaz. Neka je $y = kx + l$ desna kosa asimptota. Tada je

$$\lim_{x\to\infty} \mid f(x) - kx - l \mid = 0, \tag{5.6}$$

odakle je i $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - l) = 0$ pa mora biti $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = l$. Prema (5.6) je očito $\lim_{x\to\infty} \frac{\mid f(x) - kx - l \mid}{x} = 0$, tj. $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right| = 0$. Tada je i $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right) = 0$. Budući da $\frac{l}{x} \to 0$ kada $x \to \infty$, mora biti $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0$, odakle je $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$.

Obratno, ako je $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ i $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = l$, onda je $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - l) = 0$.

Za lijevu kosu asimptotu dokaz se provodi slično.

Primjedba 5.11 *Dovoljno je tražiti samo vertikalne i kose asimptote funkcije f. Horizontalna asimptota je specijalan slučaj kose asimptote za $k = 0$ i stoga je dobivamo tražeći kosu asimptotu. Naime, ako je pravac $y = a$ horizontalna asimptota i $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, onda u postupku traženja desne kose asimptote $y = kx+l$ dobivamo:*

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 0 \;\; i \;\; l = \lim_{x\to\infty}[f(x) - 0\cdot x] = a,$$

tj. da je pravac $y = a$ asimptota. Slično se izvede zaključak i u slučaju kada je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Primjer 5.26 *Odredimo kose asimptote funkcija zadanih formulama:*
a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, b) $f(x) = \dfrac{x^3-3}{x^2+x}$, c) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+x}$, d) $f(x) = \dfrac{x^5-3}{x^2+x}$,

a) Prvo potražimo desnu kosu asimptotu $y = kx + l$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \\ l &= \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0. \end{aligned}$$

Pravac $y = x$ je desna kosa asimptota. Pokažite da je pravac $y = -x$ lijeva kosa asimptota.

b) Potražimo lijevu kosu asimptotu $y = kx + l$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3}{x(x^2+x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 \\ l &= \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3}{x^2+x} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-3}{x^2+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1. \end{aligned}$$

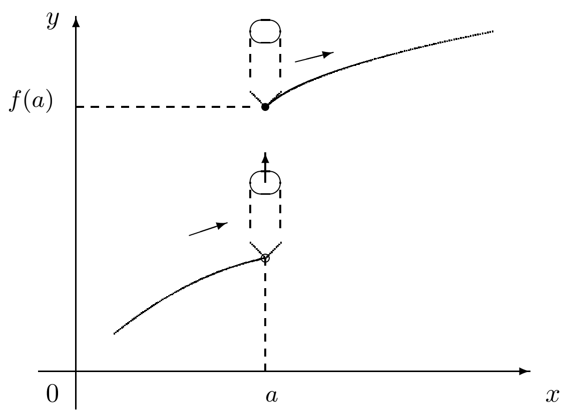
Pravac $y = x - 1$ je lijeva kosa asimptota. Provjerite da se desna kosa asimptota podudara s lijevom kosom asimptotom.

c) Budući da je $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2-3}{x(x^2+x)} = 0$, ova funkcija nema kosih asimptota. Da li postoji horizontalna asimptota? Postoji, jer je $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3}{x^2+x} = 2$. Asimptota $y = 2$ je paralelna s x osi.

d) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5-3}{x^3+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = \infty \notin \mathbb{R}$. Ne postoje kose asimptote.

5.2 Neprekidnost funkcije

Neprekidne funkcije predstavljaju jednu od najvažnijih klasa funkcija. Intuitivno, neprekidnom funkcijom zvali bi onu funkciju čiji graf možemo dobiti iz jednog poteza olovkom po papiru, bez podizanja olovke. Za funkciju čiji graf nastaje iz dva ili više poteza rekli bi da ima prekid u točki gdje smo napravili vertikalni pomak olovke.



Slika 5.12. Prekid u točki a

Ima mnogo slučajeva gdje nas zoran pristup napušta. Stoga je potrebna precizna definicija neprekidnosti funkcije. Iako ćemo u ovoj točki upotrebljavati isključivo Cauchyjevu definiciju neprekidnosti istovremeno navodimo i Heineovu.

Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je **neprekidna u točki** $a \in D$

Heine: ako za svaki niz (a_n) iz D takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Cauchy: ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(x \in D; \mid x - a \mid < \delta) \Rightarrow (\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon). \tag{5.7}$$

Kažemo da funkcija f ima **prekid** ili **diskontinuitet** u točki $a \in D$, ako ona nije neprekidna u a.
Kažemo da je funkcija f **neprekidna na** D, ako je ona neprekidna u svakoj točki iz D.

Na prvi pogled izgleda da su to definicije limesa funkcije u točki. Ipak nije tako. Razlika je u tome što se u Heineovoj definiciji neprekidnosti ne isključuje mogućnost $a_n = a$, a u Cauchyjevoj $x = a$. Te dvije definicije su međusobno ekvivalentne. Dokaz je gotovo identičan dokazu ekvivalentnosti odgovarajućih definicija za limes funkcije u točki.

Primjedba 5.12 *Za razliku od limesa funkcije koji se definira u točkama gomilanja domene, neprekidnost funkcije definira se samo u točkama domene.*

Primjer 5.27 *Najjednostavniji primjer funkcije neprekidne na* $\mathbb{R}$ *je konstanta* $f : x \mapsto c$.

Budući da je $f(x) - f(a) = c - c = 0$, za δ možemo uzeti bilo koji pozitivan realan broj.

Primjer 5.28 Afina funkcija $f : x \mapsto cx + d$, *gdje su* $c, d \in \mathbb{R}$, *neprekidna je na* $\mathbb{R}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ i $a \in \mathbb{R}$. Pokažimo da je afina funkcija f neprekidna u točki a. Treba pronaći $\delta > 0$ takvo da je $\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji je $\mid x - a \mid < \delta$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\mid f(x) - f(a) \mid = \mid (cx + d) - (ca + d) \mid = \mid c \mid\mid x - a \mid .$$

Ako je $c = 0$, onda je funkcija konstanta ($f(x) = d$) pa je neprekidna. Neka je stoga $c \neq 0$. Za δ je dovoljno uzeti $\delta = \frac{\varepsilon}{\mid c \mid}$. Tada

$$(\mid x - a \mid < \delta) \Rightarrow (\mid f(x) - f(a) \mid = \mid c \mid\mid x - a \mid < \mid c \mid \delta = \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti točke a funkcija je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $a \in D$, onda iz (5.7) slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(x \in D;\ 0 <| x - a |< \delta) \Rightarrow (| f(x) - f(a) |< \varepsilon),$$

odakle po definiciji limesa dobivamo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Dakle, funkcija f neprekidna u točki a ima limes $f(a)$. Vrijedi i obrat, tj. ako funkcija f u točki a ima limes $f(a)$, onda je f neprekidna u točki a. Zaista, ako je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, onda za dani $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(x \in D;\ 0 <| x - a |< \delta) \Rightarrow (| f(x) - f(a) |< \varepsilon).$$

Budući da je ta implikacija valjana i za $x = a$, vrijedi (5.7). Time smo dokazali sljedeću tvrdnju:

> Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je neprekidna u točki $a \in D$ onda i samo onda ako ona u točki a ima limes $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ koji je jednak $f(a)$.

Slijedeća tvrdnja slijedi iz prethodne tvrdnje i pravila za računanje limesa funkcija.

> Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, bilo koje dvije funkcije neprekidne u točki $a \in D$. Tada su u točki a neprekidne i funkcije:
>
> a) $f \pm g$ (zbroj, odosno razlika, neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija),
>
> b) $f \cdot g$ (umnožak neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija),
>
> c) $|g|$ (aps. vrijednost neprekidne funkcije je neprekidna funkcija),
>
> d) $\dfrac{f}{g}$ (ako je $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in D$) (kvocijent neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija).

Primjer 5.29 *Polinomi su neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$. Racionalne funkcije su neprekidne u svakoj točki u kojoj su definirane.*

Neka je $R = \dfrac{P}{Q}$ racionalna funkcija i neka je $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Funkcija $x \mapsto x$ je neprekidna pa su neprekidne i funkcije $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^4$, ... Svaki član a_k, $k = 1, \ldots, n$, polinoma P kao umnožak konstante a_k s neprekidnom funkcijom $x \mapsto x^k$ je neprekidna funkcija. Polinom P je neprekidna funkcija kao konačna suma neprekidnih funkcija. Budući da je racionalna funkcija kvocijent polinoma ona je neprekidna.

Primjer 5.30 *Trigonometrijske funkcije su neprekidne u svakoj točki svoje domene.*

Dokažimo prvo da su funkcije *sin* i *cos* neprekidne u svakoj točki $a \in \mathbb{R}$. Prisjetite se da za svaki realan broj z vrijede ocjene $|\sin z| \leq 1$ i $|\sin z| \leq |z|$ i formule:

$$\begin{array}{l} \sin z - \sin w = 2\cos\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2} \\ \cos z - \cos w = -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}, \end{array} .$$

Iz tih formula dobivamo:

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq |x-a|, \\ |\cos x - \cos a| &= 2\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq |x-a|, \end{aligned}$$

odakle slijedi da su funkcije sinus i kosinus neprekidne na $\mathbb{R}$, jer za zadani $\varepsilon > 0$, za δ je dovoljno uzeti $\delta = \varepsilon$. Funkcije tangens i kotangens su neprekidne kao kvocijenti neprekidnih funkcija.

I kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija:

> Neka su $g : D \to \mathbb{R}$ i $f : K \to \mathbb{R}$, $g(D) \subseteq K$, dvije realne funkcije realne varijable. Ako je g neprekidna u točki a i f neprekidna u točki $g(a)$, onda je kompozicija $f \circ g$ neprekidna u točki a.

Dokaz. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(x \in D; |x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon).$$

Zbog neprekidnosti funkcije f u točki $g(a)$ za ε postoji $\delta_1 > 0$ takav da

$$(x \in K; |y-g(a)| < \delta_1) \Rightarrow (|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon). \tag{5.8}$$

Za taj δ_1 zbog neprekidnosti funkcije g u točki a postoji $\delta > 0$ takav da

$$(x \in D; |x-a| < \delta) \Rightarrow (|g(x) - g(a)| < \delta_1).$$

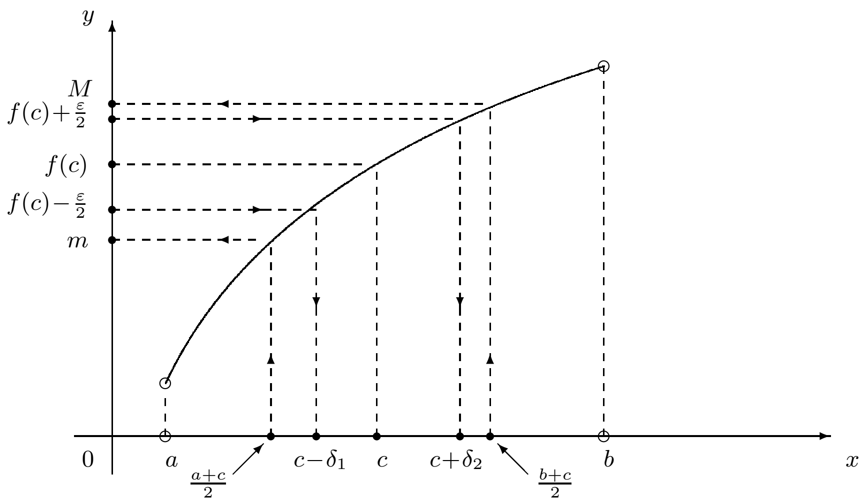
Ako $x \in D$ zadovoljava uvjet $|x-a| < \delta$, onda $y = g(x)$ zadovoljava uvjet $|y - g(a)| < \delta_1$ i prema (5.8) vrijedi

$$(x \in D; |x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon).$$

Značajnu klasu funkcija čine elementarne funkcije koje se dobivaju iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja osnovnih računskih operacija $(+, -\cdot, :)$ i konačnog broja kompozicija osnovnih elementarnih funkcija. Do sada smo pokazali neprekidnost polinoma, racionalnih i trigonometrijskih funkcija. Da bismo pokazali neprekidnost preostalih elementarnih funkcija, prema prethodne dvije tvrdnje dovoljno je dokazati da su osnovne elementarne funkcije neprekidne u svakoj točki svoje domene. Prvo dokažimo pomoćnu tvrdnju:

> Ako monotona funkcija f preslikava interval $I =< a, b >$ na otvoren interval $I' = f(I)$, onda je ona neprekidna na I.

Dokaz. Neka je $c \in < a, b >$ bilo koja točka. Pokažimo da je f neprekidna u točki c. Zbog određenosti neka je f rastuća funkcija. Neka je $M = f\left(\frac{b+c}{2}\right)$ i $m = f\left(\frac{a+c}{2}\right)$ (vidi *Sliku 5.13*).



Slika 5.13.

Kad bi bilo $f(x) = M$ za svaki $x \in \left[c, \frac{b+c}{2}\right]$, onda bi zbog toga što raste f bila konstanta na segmentu $x \in \left[c, \frac{b+c}{2}\right]$. Isto tako, kad bi bilo $f(x) = m$ za svaki $x \in \left[a, \frac{a+c}{2}\right]$, onda bi f bila konstanta na segmentu $x \in \left[a, \frac{a+c}{2}\right]$. Ako je $M = m$, onda je f konstanta na segmentu $\left[\frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right]$ pa je neprekidna u točki c. Neka je nadalje $m < M$. Slučajeve $M = f(c)$ i $m = f(c)$ ćemo diskutirati poslije. Pretpostavimo sada da su $M > f(c)$ i $m < f(c)$ i neka je $\varepsilon/2 > 0$ takvo da je $\varepsilon/2 < M - f(c)$ i $\varepsilon/2 < f(c) - m$. Budući da točke $f(c) - \varepsilon/2$ i $f(c) + \varepsilon/2$ pripadaju intervalu I', postoje realni brojevi $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ takvi da točke $c - \delta_1$ i $c + \delta_2$ pripadaju intervalu $I =< a, b >$ i da vrijedi $f(c - \delta_1) = f(c) - \varepsilon/2$ i $f(c+\delta_2) = f(c)+\varepsilon/2$. Budući da funkcija raste, $x \in [c-\delta_1, c]$ povlači $f(c-\delta_1) = f(c)-\varepsilon/2 \leq f(x) \leq f(c)$. Slično $x \in [c, c + \delta_2]$ povlači $f(c) \leq f(x) \leq f(c + \delta_2) = f(c) + \varepsilon/2$. Neka je

$\delta > 0$ manji od brojeva δ_1, δ_2, tj. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ako je $m = f(c)$ za δ je dovoljno uzeti bilo koji broj manji od δ_2 takav da je $c - \delta \in I$. Slično se postupa i za $M = f(c)$. Sada $x \in < c - \delta, c + \delta >$ povlači $f(c) - \varepsilon/2 \leq f(x) \leq f(x) + \varepsilon/2$, tj. $| f(x) - f(c) | \leq \varepsilon/2$. Time je pokazano da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(| x - c | < \delta) \Rightarrow (| f(x) - f(c) | < \varepsilon).$$

Primjedba 5.13 *Prethodna tvrdnja vrijedi i u slučaju da su I i $I' = f(I)$ segmenti. Dokaz je potpuno isti.*

Eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$ $(a \neq 1)$ je strogo monotona na $\mathbb{R}$, a slika joj je interval $< 0, \infty >$. Njena inverzna funkcija, logaritamska funkcija $\log_a x$ je strogo monotona na intervalu $< 0, \infty >$ i preslikava ga na $\mathbb{R}$. Dakle, eksponencijalna i logaritamska funkcija su neprekidne funkcije u svakoj točki u kojoj su definirane.

Opća potencija $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ je strogo monotona na intervalu $< 0, \infty >$ i preslikava ga na interval $< 0, \infty >$. Prema tome, ona je neprekidna na $< 0, \infty >$.

Funkcija arkussinus je strogo rastuća i preslikava segment$[-1, 1]$ na segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Prema tome, arkussinus je neprekidna na segmentu $[-1, 1]$. Slično, funkcija arkuskosinus je neprekidna funkcija na segmentu $[-1, 1]$. Funkcija arkustangens je strogo rastuća na $\mathbb{R}$ i preslikava ga na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Dakle, ona je neprekidna funkcija. Arkuskotangens je neprekidna funkcija jer preslikava $\mathbb{R}$ na interval $< 0, \pi >$.

Sumirajmo:

a) Svaka osnovna elementarna funkcija je neprekidna u svakoj točki u kojoj je definirana.

b) Svaka elementarna funkcija je neprekidna u svakoj točki u kojoj je definirana.

Po analogiji s jednostranim limesima, osim neprekidnosti u točki mogu se definirati neprekidnost slijeva i neprekidnost zdesna. Zamijenimo li u (5.7) pretpostavku $(x \in D; | x - a | < \delta)$ s pretpostavkom $(x \in D; a - \delta < x \leq a)$ $[(x \in D; a \leq x < a + \delta)]$ dobivamo definiciju **neprekidnosti funkcije f slijeva** [**zdesna**] u točki $a \in D$. Nije teško pokazati da je funkcija f neprekidna u točki a onda i samo onda ako je ona u točki a neprekidna i slijeva i zdesna.

Nadalje, može se pokazati da je funkcija f neprekidna slijeva [zdesna] u točki $a \in D$ onda i samo onda ako je $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ [$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$].

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna u točki $a \in D$.

a) Tada postoji δ-okolina $< a - \delta, a + \delta >$ broja a takva da je na njoj f omeđena.

b) Ako je $f(a) > 0$, onda postoji δ-okolina $< a - \delta, a + \delta >$ broja a takva da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in < a - \delta, a + \delta >$.

c) Ako je $f(a) < 0$, onda postoji δ-okolina $< a - \delta, a + \delta >$ broja a takva da je $f(x) < 0$ za svaki $x \in < a - \delta, a + \delta >$.

Dokaz. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(x \in D; \mid x - a \mid < \delta) \Rightarrow (\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon). \tag{5.9}$$

a) Za $\varepsilon = 1$ iz (5.9)imamo

$$(x \in D; \mid x - a \mid < \delta) \Rightarrow \mid f(x) \mid < 1 + f(a)),$$

što nam govori da je f omeđena na intervalu $< a - \delta, a + \delta >$.

b) Za $\varepsilon = f(a)/2$ iz (5.9) dobivamo da je $f(x) > f(a)/2$ za svaki $x \in D$ takav da je $\mid x - a \mid < \delta$.

c) Slično kao b).

Funkcije neprekidne na segmentu imaju niz dobrih svojstava. Navedimo bez dokaza dva svojstva:

Bolzano-Weierstrassov teorem:

Neka je $[a, b]$ segment realnih brojeva i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Ako funkcija f nije konstanta, onda je $f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ segment u $\mathbb{R}$.

Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ **jednoliko** ili **uniformno neprekidna** na skupu D, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(\, x_1, x_2 \in D; \mid x_1 - x_2 \mid < \delta \,) \Rightarrow (\mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \varepsilon.\,)$$

Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $I = [a, b]$, onda je ona i uniformno neprekidna na tom segmentu.

5.2.1 Neprekidnost i limes

Znamo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna u točki $a \in D$ onda i samo onda ako je $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Tim svojstvom su otklonjene teškoće kod računanja limesa u onim točkama u kojima je funkcija neprekidna. One se mogu pojaviti kada tražimo limes funkcije u točki prekida ili u točki u kojoj funkcija nije definirana.

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, bilo koja funkcija, $a \in D'$ i neka postoji $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Ako funkcija f nije definirana u točki a ili je $L \neq f(a)$, onda za funkciju $\tilde{f}$ definiranu formulom:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ L, & x = a, \end{cases}$$

kažemo da je **proširenje funkcije f po neprekidnosti** u točki a.

Primjer 5.31 *Funkcija f zadana formulom $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ definirana je u svakoj točki osim u nuli. Budući da je $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, funkciju f možemo proširiti po neprekidnosti s funkcijom $\tilde{f}$ zadanom formulom:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

> Neka su $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : K \to \mathbb{R}$, $f(D) \subseteq K$, bilo koje dvije funkcije i $a \in D'$. Ako postoji $L = \lim_{x \to a} f(x)$ i ako je g neprekidna u točki L, onda je
>
> $$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right),$$
>
> tj. limes i neprekidna funkcija „komutiraju”.

Dokaz. Ako je funkcija f neprekidna u točki a ($L = f(a)$) onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u točki a. Stoga je $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a)) = g(L) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$.

Ako f nije definirana u točki a ili u njoj ima prekid, označimo s $\tilde{f}$ njeno proširenje po neprekidnosti u točki a. Prema već dokazanom je $\lim_{x \to a} g(\tilde{f}(x)) = g\left(\lim_{x \to a} \tilde{f}(x)\right)$. Budući da je $\lim_{x \to a} g(\tilde{f}(x)) = \lim_{x \to a} g(f(x))$ i $\lim_{x \to a} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to a} f(x)$, dobivamo

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right).$$

Primjedba 5.14 *Označimo s g prirodnu eksponencijalnu funkciju ($g(x) = e^x$). Ako postoji $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)$, onda iz prethodnoe tvrdnje dobivamo: $\lim\limits_{x\to a} g(\ln f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)\right)$, tj.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to a} \ln f(x)} \quad \text{ili ekvivalentno: } \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \lim_{x\to a} \ln f(x).$$

Primjer 5.32 *Odredimo a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$.*

a) Znamo da je $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Iskoristimo li neprekidnost logaritamske funkcije dobivamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$$

b) Uvedimo supstituciju $t = t(x) = a^x - 1$. Budući da $t \to 0$ kada $x \to 0$ i da je $t(x) \neq 0$ za $x \neq 0$, smijemo primjeniti metodu supstitucije. Dobivamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}} = \frac{\ln a}{\lim\limits_{t\to 0} \ln(1+t)^{1/t}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

Primjer 5.33 *Neka su funkcije u i v definirane na nekoj okolini točke a. Ako je $u(x) > 0$ za svaki x iz te okoline i ako postoje limesi $\lim\limits_{x\to a} u(x) > 0$ i $\lim\limits_{x\to a} v(x)$, onda je*

$$\lim_{x\to a} \left(u(x)^{v(x)}\right) = \left(\lim_{x\to a} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$

Neka je $f(x) = u(x)^{v(x)}$. Logaritamska funkcija je neprekidna i stoga je:

$$\lim_{x\to a} \ln f(x) = \lim_{x\to a} \left(v(x) \ln u(x)\right) = \lim_{x\to a} v(x) \ln\left(\lim_{x\to a} u(x)\right).$$

Budući da je $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \ln\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$, antilogaritmiranjem dobivamo:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\lim\limits_{x\to a} v(x) \ln(\lim\limits_{x\to a} u(x))} = \left(e^{\ln(\lim\limits_{x\to a} u(x))}\right)^{\lim\limits_{x\to a} v(x)} = \left(\lim_{x\to a} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$

Primjer 5.34 *Pokažimo da je $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{e}$.*

Neka je $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$. Odredimo prvo $\lim\limits_{x\to 1} \ln f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \ln f(x) = {} & \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left|\begin{array}{c} t = 1-x \\ t \to 0 \end{array}\right| = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = \\ = {} & \lim_{t\to 0} \ln\,(1-t)^{1/t} = \ln\left(\lim_{t\to 0}(1-t)^{1/t}\right) = \ln e^{-1} = -1.\end{aligned}$$

Iz $\ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = -1$ antilogaritmiranjem dobivamo: $\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1}$.

Zadaci za vježbu 5.1-5.2

1. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, funkcija i $a \in D'$. Koja je od navedenih tvrdnji istinita?

   a) Ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $| f(x) - L |< \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $| x - a |< \delta$, onda je realan broj L limes funkcije f u točki a.

   b) Ako za neki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $| f(x) - L |< \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $| x - a |< \delta$, onda je realan broj L limes funkcije f u točki a.

   c) Ako postoje $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ takvi da je $| f(x) - L |< \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $0 <| x - a |< \delta$, onda je realan broj L limes funkcije f u točki a.

   d) Ako za svaki $\delta > 0$ postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $| f(x) - L |< \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $| x - a |< \delta$, onda je realan broj L limes funkcije f u točki a.

   e) Ako za svaki prirodan broj n postoji $\delta > 0$ takav da je $| f(x) - L |< \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $0 <| x - a |< 1/n$, onda je realan broj L limes funkcije u točki a.

   Rješenje: a) i e)

2. Dokažite prvo pomoću Heinove, a zatim pomoću Cauchyjeve definicije:

   a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ b) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$ c) $\lim_{x\to 5} \frac{3x+5}{4x} = 1$

   d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^3-1} = 2$ e) $\lim_{x\to -2} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2} = -1/4$ f) $\lim_{x\to -4} \frac{2x^2+9x+4}{x+4} = -7$

   g) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = 5$ h) $\lim_{x\to -1/2} \frac{6x^2+x-1}{x+1/2} = -5$ i) $\lim_{x\to 1/3} \frac{6x^2-5x+1}{x-1/3} = -1$

3. Izračunajte limese:

   a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$ c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$

   d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$ e) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$ f) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x-2}{x-2}$

   Uputa: Prvo skratite brojnik s nazivnikom, a zatim potražite broj L kojem teži $f(x)$ kada $x \to a$ (*Primjedba 5.4*).

4. Izračunajte limese:

   a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ c) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{9+3x}-6}{\sqrt{x}-3}$

   d) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$ f) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$

   Uputa: Racionalizirajte sve dok se ne riješite neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$, a zatim postupite kao u prethodnom zadatku. Koristite formule $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

5. Odredite limese:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{3/x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{3/x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{-3/x}$
   d) $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{-3/x}$

6. Ispitajte da li postoje jednostrani limesi:

   a) $\lim\limits_{x\to 5-}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ b) $\lim\limits_{x\to 5+}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ c) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$
   d) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ e) $\lim\limits_{x\to -2+}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$ f) $\lim\limits_{x\to -2-}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$
   g) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 1-}\left(3+\dfrac{1}{7^{1/(1-x)}}\right)$
   j) $\lim\limits_{x\to 0+}\cos(\pi/x)$ k) $\lim\limits_{x\to 0-}\cos(\pi/x)$

   Rješenje: Limesi a)–i) postoje, dok limesi j) i k) ne postoje. Da biste se uvjerili da ne postoji limes j) uzmite nizove $a_n=\dfrac{1}{2n}$ i $a'_n=\dfrac{2}{2n+1}$ i pokažite da je $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=1$ i $\lim\limits_{n\to\infty}f(a'_n)=0$, gdje je $f(x)=\cos(\pi/x)$. Slično se postupa pod k).

7. Funkcija f je zadana formulom

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le -1\\ -x, & x>-1.\end{cases}$$

   Odredite $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)$ i $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)$. Da li postoji $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$?

8. Odredite parametre a i b tako da za funkciju f,

$$f(x)=\begin{cases} 3-x^2, & x\le -2\\ ax+b, & -2<x<2\\ x^2/2, & x\ge 2,\end{cases}$$

   postoje $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ i $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

9. Odredite:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+3x-2}$
   d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+3x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x}{2x^3+x}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3-2x}{2x^3+x}$
   g) $\lim\limits_{x\to -\infty}4^x$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$ i) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$

10. Koristeći se pravilima za računanje s limesima odredite:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2+\pi x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{tg}^2 x}{x^4}$
   d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{x-8}$
   g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0-}2^{1/x}$
   j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ l) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

11. Dokažite tvrdnju:
Ako je $\lim_{x\to a} \mid f(x) \mid = 0$, *onda je* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Pokažite da tvrdnja vrijedi i za jednostrane kao i za limese kada $x \to \infty$ ili $x \to -\infty$.

12. Dokažite:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ b) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ c) $\lim_{x\to 1}(x-1)^2\sin^3\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$.

Uputa: a) $0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x}$, b) $0 \le\mid x\sin(1/x) \mid\le\mid x \mid$,

c) $0 \le \left|(x-1)^2\sin^3\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \le (x-1)^2$.

13. Metodom suptitucije izračunajte limese:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$ b) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$ c) $\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

d) $\lim_{x\to\pi/6} \frac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}$ e) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{x-1}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{x^2}$

g) $\lim_{x\to\pi/6} \frac{\operatorname{tg} g - \sin x}{x^3}$ h) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x - 1}{x-e}$ i) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$

Uputa: a) $t^3 = 26+x$, b) $t^4 = x+17$, c) $t = x^{35}$, d) $t = x - \pi/6$, $\cos(t+\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$, $\sin t = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$, $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$, e) $t = x-1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ f) $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$, $t = x/2$, h) $t = x/e - 1$, i) $\sin u - \sin v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$.

14. Izračunajte:

a) $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^{7x}$ b) $\lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/(7x)}$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

d) $\lim_{x\to\infty}(1+4/x)^{x+3}$ e) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$ f) $\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{1/x}$

15. Odredite limese:

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})(1-x)}$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{(2x+1)/(x-1)}$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$ d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

e) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^4+5}{x+10}\right)^{4/(x+2)}$ f) $\lim_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$

16. Pronađite asimptote (horizontalne,vertikalne i kose) funkcije f zadane formulom:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$

d) $f(x) = \frac{2}{x^2-9}$ e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ f) $f(x) = \frac{4x-\sqrt{x}}{x^{2/3}+x4}$

g) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ h) $f(x) = \frac{1+x}{3-x}$ i) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$

j) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ k) $f(x) = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$ l) $f(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$

17. Odredite parametar a tako da pravac $y=-1$ bude horizontalna asimptota funkcije $f(x)=\dfrac{x^a+3x}{7-x^{4/3}}$.

18. Zadane su funkcije:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<2 \\ x^2-1, & x\geq 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3, & -\infty<x\leq 1 \\ 10-5x, & 1<x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3, & -\infty<x\leq 1 \\ 10-5x, & 1<x<3 \\ -x-2, & x\geq 3 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 4\cdot 3^x, & x<0 \\ 2a+x, & x\geq 0 \end{cases}$

Odredite točke prekida.

19. Odredite parametar a tako da funkcija

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ x^2-2x+a, & x\geq 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

20. Odredite parametre a i b tako da funkcija

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leq 1 \\ ax^2+bx, & x>1 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

21. Domena funkcije $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$ je skup $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Definirajte $f(0)$ tako da funkcija bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

22. Ispitajte neprekidnost **Dirichletove funkcije**:

$$\lambda(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbf{I}. \end{cases}$$

6. DIFERENCIJALNI RAČUN

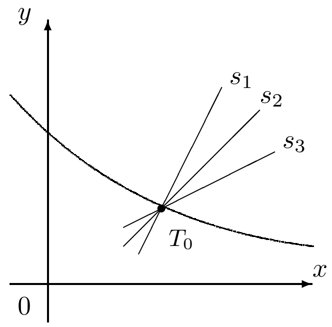
Diferencijalni račun nastao je iz potrebe da se riješe neki konkretni problemi, kao npr. problem tangente na krivulju (datira od starih Grka), problem maksimalne i minimalne vrijednosti funkcije, fizikalni problem brzine materijalne točke itd. Ovaj račun razvija se i formalizira tek od druge polovice 17. stoljeća, a njegovo otkriće pripisuje se Isaac Newtonu (1642 – 1727) i Gottfried Leibnizu (1646 – 1716). Diferencijalni račun ima nezamjenjivu ulogu u prirodnim i tehničkim, a u zadnje vrijeme i društvenim znanostima.

Unatoč mnogim nesuglasicama o tome tko je prvi otkrio diferencijalni račun, većina povjesničara matematike smatra da su ga istovremeno i nezavisno jedan od drugog otkrili Newton i Leibniz. Newton je razmatrao problem brzine materijalne točke, a Leibniz problem tangente na krivulju.

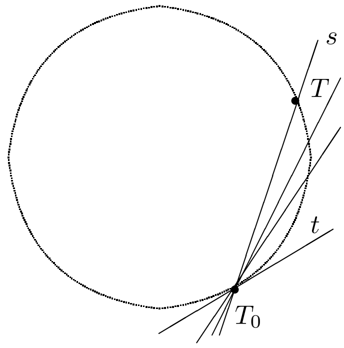
6.1 Pojam derivacije funkcije

Problem tangente. Iz geometrije poznato nam je da se svakom točkom T_0 kružnice može povući samo jedna tangenta-*pravac koji siječe kružnicu samo u točki* T_0. Ta definicija „pada u vodu" za neku drugu, proizvoljno izabranu krivulju. Na *Slici 6.1.a* prikazano je nekoliko pravaca koji sijeku graf funkcije samo u točki T_0, a ni jedan od njih ne želimo zvati tangentom.

Neka je pravac t tangenta na kružnicu u točki T_0 (vidi *Sliku 6.1.b*). Pomičemo li po kružnici točku T prema točki T_0, sekanta s (pravac T_0T) rotira oko točke T_0. Kada točka T padne u točku T_0, sekanta s prelazi u tangentu t. U ravnini možemo uvesti koordinatni sustav i s β označiti kut što ga sekanta T_0T zatvara s pozitivnim smjerom x-osi, a s α kut što ga tangenta t zatvara s pozitivnim smjerom x-osi. Ako se sada točka T približava točki T_0, kut β sve je bliži kutu α (u smislu da je mjera kuta β sve bliža mjeri kuta α). Specijalno, $\operatorname{tg}\beta$ (koeficijent smjera sekante T_0T) sve je bliži broju $\operatorname{tg}\alpha$ (koeficijent smjera tangente t). Ovo svojstvo iskoristit ćemo za definiranje tangente funkcije u točki T_0.

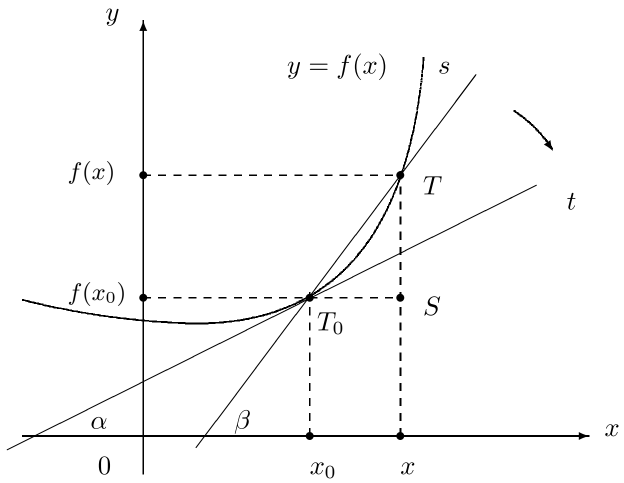


Slika 6.1.a.



Slika 6.1.b.

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na nekoj ε okolini $< x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon >$ točke x_0. Uzmimo bilo koju točku $T = T(x, f(x))$ grafa funkcije f tako da je x iz te ε okoline točke x_0 (vidi *Sliku 6.2*). Zbog neprekidnosti funkcije f, točka T primiče se točki $T_0 = T_0(x_0, f(x_0))$ onda i samo onda ako $x \to x_0$. Označimo s β kut što ga sekanta T_0T zatvara s pozitivnim smjerom x-osi.



Slika 6.2.

Na *Slici 6.2* vidi se da je $\beta = \sphericalangle TT_0S$, odakle za koeficijent smjera sekante T_0T iz pravokutnog trokuta ΔTT_0S dobivamo $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ako postoji (kao realan broj):

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

onda jedinstveni pravac[1] $y = kx + l$ koji prolazi točkom T_0 i za koeficijent smjera ima broj $k = \lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{tg}\beta$ nazivamo **tangentom** funkcije f u točki T_0. Nadalje, ako ne postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{tg}\beta$, onda kažemo da ne postoji ni tangenta funkcije f u točki T_0.

Primjedba 6.1 *Kut α što ga tangenta t zatvara s pozitivnim smjerom x-osi dobivamo rješavanjem jednadžbe:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{x\to x_0} \operatorname{tg}\beta.$$

Primjer 6.1 *Odredimo tangentu (ako postoji) funkcije $f(x) = x^2$ u točki $T_0(2,4)$ i kut α između tangente i pozitivnog smjera x-osi.*

U ovom primjeru je $x_0 = 2$, $f(x_0) = 4$. Budući da postoji:

$$k = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4,$$

onda postoji i tangenta. Njena jednadžba glasi: $y = 4x + l$. Uvrštavanjem koordinata točke $T_0(2,4)$ u jednadžbu pravca dobivamo $l = -4$. Dakle, pravac $y = 4x - 4$ je tražena tangenta. Odredimo kut α. Iz $\operatorname{tg}\alpha = 4$ dobivamo $\alpha \approx 1.326$ radijana (provjerite pomoću kalkulatora!).

Problem brzine. Materijalna točka giba se po pravcu tako da se nakon t sekundi nalazi na udaljenosti $s(t)$ metara. Unutar vremenskog intervala $\Delta t = t - t_0$ materijalna točka prevali udaljenost $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Njena srednja brzina u vremenskom intervalu Δt iznosi:

$$\overline{v} := \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Kako definirati pravu brzinu $v(t_0)$ u vremenskom trenutku t_0? Što je manji vremenski interval Δt srednja brzina $\overline{v}$ bit će bolja aproksimacija prave brzine. Stoga fizičari pravu brzinu $v(t_0)$ u trenutku t_0 definiraju kao:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t},$$

ukoliko taj limes postoji.

[1] Ako je pravac p zadan jednadžbom $y = kx + l$, onda ćemo si dozvoliti slobodu i pisati *pravac* $y = kx + l$ umjesto *pravac* p.

Primjer 6.2 *Predmet ispušten s visine s_0 metara nalzi se u vakuumu nakon t sekundi na visini $s(t) = s_0 - \frac{g}{2}t^2$ metara, gdje je $g \approx 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$ ubrzanje sila teže (vidi Zadatak 2.32). Odredimo brzinu tijela u svakom trenutku t.*

Najprije ćemo izračunati vrijeme t_1 za koje će tijelo pasti na tlo:

$$0 = s(t_1) = s_0 - \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s_0}{g}}.$$

Potražimo brzinu u trenutku $t \leq t_1$:

$$\begin{aligned} v(t) = & \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_0 + \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - (s_0 + \frac{1}{2}gt^2)}{\Delta t} \\ = & \lim_{\Delta t \to 0} (gt + \tfrac{1}{2}g\Delta t) = gt. \end{aligned}$$

U ovom poglavlju s $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ označavamo **otvoren skup,** tj. skup sa svojstvom:

za svaki $x_0 \in \Omega$ postoji realan broj $\varepsilon = \varepsilon(x)$ takav da je $< x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon > \subseteq \Omega$.

Primjer otvorenog skupa u $\mathbb{R}$ je svaki interval $< a, b >$. **Okolinom** točke $x_0 \in \mathbb{R}$ nazivamo svaki otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži točku x_0.

Primjedba 6.2 *Može se pokazati da je skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren onda i samo onda ako je on unija (konačna ili beskonačna) intervala iz $\mathbb{R}$.*

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je funkcija f **derivabilna** ili **diferencijabilna** u točki $x_0 \in \Omega$, ako postoji limes:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Ako limes (6.1) ne postoji, onda kažemo da funkcija f nije derivabilna u točki x_0. Ako je funkcija f derivabilna u točki x_0, onda realan broj (6.1) nazivamo **derivacijom** funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$ ili s $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}f(x)$, tj.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.} \tag{6.2}$$

Ako je funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \Omega$, onda kažemo da je ona **derivabilna na** Ω, a funkciju $x \mapsto f'(x)$ definiranu na Ω označavamo s f' i nazivamo **derivacijom funkcije** f **na** Ω.

Primjedba 6.3 *Ako se radi o derivaciji funkcije f u točki $x \in \Omega$, onda (6.2) glasi:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Primjedba 6.4 *Supstitucijom $\Delta x = x - x_0$, (6.2) prelazi u ekvivalentnu formulu:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{6.3}$$

Broj $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *nazivamo* **kvocijentom diferencija**. *U brojniku je diferencija (razlika) vrijednosti funkcije f u točkama x i x_0, a u nazivniku odgovarajuća diferencija nezavisne varijable. Kvocijent diferencija mjeri „brzinu promjene" funkcije f u odnosu na promjenu nezavisne varijable. Dakle, derivacija funkcije f u točki x_0 je limes kojem konvergira kvocijent diferencija* $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *kada $x \to x_0$.*

Primjer 6.3 *Derivacija konstantne funkcije iščezava u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$:*

Neka je $f(x) = c,\ \ c \in \mathbb{R}$. Tada je prema (6.2):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

Primjer 6.4 *Koristeći definicionu formulu (6.2) odredimo derivaciju funkcija:* a) $f(x) = x$, b) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ dobivamo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Dakle, funkcija $f(x) = x$ je derivabilna na $\mathbb{R}$ i $f'(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

b) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} f'(x) = & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ = & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

Funkcija $f(x) = x^2$ je derivabilna na $\mathbb{R}$ i $f'(x) = 2x$.

c) Domena ove funkcije je skup $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Pokažimo da je ova funkcija derivabilna u svakoj točki $x > 0$. Neka je $x > 0$. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $x + \Delta x > 0$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) = & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ = & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Primjer 6.5 Marginalna analiza. *Označimo sa $C(x)$ ukupne troškove proizvodnje x jedinica neke robe. Za proizvodnju dodatnih Δx jedinica robe potrebni su dodatni troškovi $\Delta C = C(x+\Delta x) - C(x)$. U ekonomskoj teoriji kvocijent diferencija*

$\dfrac{\Delta C}{\Delta x} = \dfrac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$ *naziva se* **srednjim marginalnim troškovima** *potrebnim za proizvodnju dodatnih* Δx *jedinica na proizvodnom nivou od* x *jedinica ili kraće srednjim marginalnim troškovima. Slično se definiraju srednji marginalni prihod i srednji marginalni profit. Označimo s* $R(x)$ *ukupni prihod ostvaren proizvodnjom* x *jedinica robe. Profit* P *jednak je razlici ukupnog prihoda i ukupnih troškova, tj.* $P = R - C$. *U literaturi se kvocijenti diferencija* $\dfrac{\Delta R}{\Delta x} = \dfrac{R(x+\Delta x) - R(x)}{\Delta x}$ *i* $\dfrac{\Delta P}{\Delta x} = \dfrac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x}$ *nazivaju* **srednjim marginalnim prihodom** *i* **srednjim marginalnim profitom** *ostvarenim proizvodnjom dodatnih* Δx *jedinica robe na proizvodnom nivou od* x *jedinica.*

Za primjer, odredimo a) srednje troškove proizvodnje prvih 20 *jedinica robe, b) srednje marginalne troškove proizvodnje prvih* 20 *jedinica robe i c) srednje marginalne troškove proizvodnje jedne dodatne jedinice robe ako se trenutno proizvodi* 20 *jedinica robe. Ukupni troškovi (u novčanim jedinicama (NJ)) proizvodnje* x *jedinica robe u ovom primjeru zadani su formulom* $C(x) = 2x^2 + 3x + 140$.

a) Srednji troškovi $\overline{C}(x)$ proizvodnje prvih x jedinica robe dani su formulom $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. $\overline{C}(20) = \dfrac{C(20)}{20} = 50\,\text{NJ}$.

b) Traženi srednji marginalni troškovi proizvodnje prvih 20 jedinica robe iznose: $\dfrac{C(20)-C(0)}{20} = 43\,\text{NJ}$.

c) $\dfrac{C(21)-C(20)}{1} = 85\,\text{NJ}$.

U teoretskim razmatranjima ekonomisti dozvoljavaju da broj proizvedenih jedinica robe x *poprima realane vrijednosti. Za funkcije ukupnih troškova* C, *ukupnog prihoda* R *i profita* P *koriste se derivabilene funkcije. Na taj način u modelima može se koristiti teorija diferencijalnog računa. Broj* $C'(x)$ *predstavlja* **marginalne troškove** *na proizvodnom nivou od* x *jedinica robe. Slično, brojevi* $R'(x)$ *i* $P'(x)$ *predstavljaju* **marginalni prihod** *i* **marginalni profit** *na proizvodnom nivou od* x *jedinica robe. Budući da je* $C'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x} \approx \dfrac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$, *za* $\Delta x = 1$ *dobivamo aproksimacionu formulu za marginalne troškove:* $C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$ *iz koje se vidi da su marginalni troškovi na proizvodnom nivou od* x *jedinica robe približno jednaki troškovima proizvodnje jedne dodatne jedinice robe. Slično, marginalni prihod na proizvodnom nivou od* x *jedinica robe približno je jednak prihodu ostvarenom proizvdnjom jedne dodatne jedinice robe. Marginalni profit na nekom proizvodnom nivou približno je jednak profitu koji se ostvaruje proizvodnjom jedne dodatne jedinice robe.*

Navedeno ilustrirajmo primjerom. Kada samo jedan proizvođač proizvodi neku robu govorimo o monopolu. U takvoj situaciji postoji direktna veza između potražnje $D(p)$ *za robom i prodajne cijene jedinice robe* p. *Opadanjem cijene raste potražnja za* *robom, a porastom cijene ona opada, tj. D je padajuća funkcija. Pretpostavimo da monopolist može proizvesti najviše* 175 *jedinica robe tjedno i da služba marketinga procjenjuje da se x jedinica robe može prodati po cijeni* $p(x) = (500-x)\,\mathrm{NJ}$. *Nadalje, monopolist procjenjuje da ukupni tjedni troškovi proizvodnje x jedinica robe iznose* $C(x) = x^2 + 4x + 100$ NJ. *Odredimo a) ukupni tjedni prihod i tjedni profit koji se ostvaruje prodajom x jedinica robe i b) marginalni profit na proizvodnom nivou od* $x = 124\,\mathrm{NJ}$.

a) Ukupni tjedni prihod ostvaren prodajom x jedinica robe iznosi $R(x) = xp(x) = 500x - x^2\,\mathrm{NJ}$, a tjedni profit je $P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 496x - 150\,\mathrm{NJ}$.

b) Treba izračunati $P'(124)$. Izračunajmo prvo kvocijent diferencija $\dfrac{\Delta P}{\Delta x}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta P}{\Delta x} &= \frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x} = \frac{-2(x+\Delta x)^2+496(x+\Delta x)-150-(-2x^2+496x-150)}{\Delta x} \\
&= \frac{-4x\Delta x + 496\Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = -4x + 496 - 2\Delta x
\end{aligned}
$$

Prijelazom na limes dobivamo $P'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(-4x+496-2\Delta x) = -4x+496$, odakle je $P'(124) = -4 \cdot 124 + 496 = 0$.

Zamijetite da za svaki $\delta > 0$ vrijedi $P'(124 + \delta) = -4\delta < 0$, tj. dodatnom proizvodnjom robe marginalni profit opada. Stoga je razumno očikavati da će i profit opadati. Slično, budući da je $P'(124 - \delta) = 4\delta > 0$ za svaki $\delta > 0$, možemo očekivati da će na proizvodnom nivou manjem od $x = 124$ jedinice robe povećanjem proizvodnje rasti i profit. Dakle, možemo očekivati da će profit biti maksimalan upravo na proizvodnom nivou od $x = 124$ jedinice robe. Odredite tjeme parabole $P(x) = -2x^2 + 496x - 150$ i uvjerite se da se maksimalan profit javlja upravo za $x = 124$ i iznosi $P(124) = 30.60\,\mathrm{NJ}$.

Primjedba 6.5 Geometrijski smisao derivacije. *Prema definiciji, tangenta funkcije f u točki $T_0(x_0, f(x_0))$ postoji onda i samo onda ako je f derivabilna u točki x_0. Ako u točki $T_0(x_0, f(x_0))$ tangenta postoji, onda njena jednadžba ima oblik:*

$$y = f'(x_0) \cdot x + l,$$

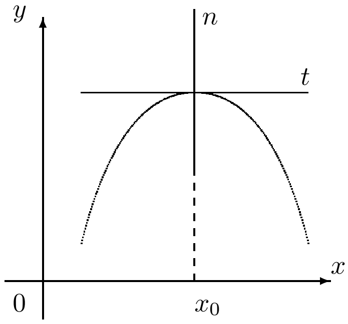
gdje su $f'(x_0)$ koeficijent smjera tangente, a l odsječak na y-osi. Uvrštavanjem u posljednju jednadžbu koordinata točke $(x_0, f(x_0))$ dobivamo $l = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Dakle, jednadžba tangente funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

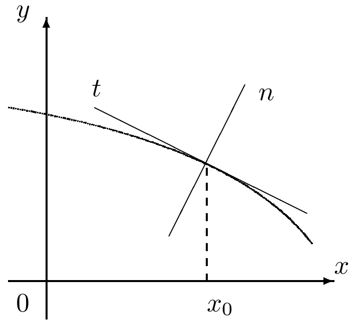
Pravac koji prolazi točkom $T_0(x_0, f(x_0))$ i okomit je na tangentu nazivamo **normalom** *funkcije f u točki $T_0(x_0, f(x_0))$. Ako je $f'(x_0) = 0$, onda je tangenta u točki $T_0(x_0, f(x_0))$ paralelna s x-osi, a $x = x_0$ je jednadžba normale (vidi Sliku 6.3.a).*

Pretpostavimo stoga da je $f'(x_0) \neq 0$ i $y = k'x + l'$ jednadžba normale (vidi Sliku 6.3.b). Koeficijent smjera k' normale odredit ćemo pomoću poznatog rezultata iz analitičke geometrije:

Dva pravca $y = kx + l$, $k \neq 0$ i $y = k'x + l'$, $k' \neq 0$ su okomita onda i samo onda ako je $k' = -\frac{1}{k}$.



Slika 6.3.a. $f'(x_0) = 0$



Slika 6.3.b. $f'(x_0) \neq 0$

Dakle, koeficijent smjera normale iznosi $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Odsječak l' na y-osi odredi se iz uvjeta da normala prolazi točkom $T_0(x_0, f(x_0))$. Tako dobivamo jednadžbu normale (provjerite!):

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0), & \textit{za } f'(x_0) \neq 0 \\[2ex] x = x_0, & \textit{za } f'(x_0) = 0. \end{array}}$$

Primjer 6.6 *Odredimo jednadžbu tangente i normale funkcije $f(x) = x^2$ u točki (x_0, x_0^2) :*

Znamo da je $f'(x_0) = 2x_0$ (vidi *Primjer 6.4*). Jednadžba tangente glasi:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0),$$

dok je s:

$$\begin{array}{ll} y = x_0^2 - \dfrac{1}{2x_0} \cdot (x - x_0), & \text{za } x_0 \neq 0 \\ x = 0, & \text{za } x_0 = 0 \end{array}$$

zadana jednadžba normale.

Pomoću limesa funkcije slijeva i limesa zdesna definira se derivabilnost funkcije slijeva i derivabilnost zdesna:

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup, $x_0 \in \Omega$ i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija. Ako postoji:

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left[f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right],$$

onda kažemo da je funkcija f **derivabilna** ili **diferencijabilna slijeva** [**zdesna**] u točki x_0. Pri tome realan broj $f'_{-}(x_0)$ [$f'_{+}(x_0)$] nazivamo **derivacijom slijeva** [**derivacijom zdesna**] funkcije f u točki x_0.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup. Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je derivabilna u točki $x_0 \in \Omega$ onda i samo onda ako u točki x_0 ima derivaciju slijeva $f'_{-}(x_0)$ i derivaciju zdesna $f'_{+}(x_0)$, koje su jednake derivaciji $f'(x_0)$ u točki x_0.

Primjer 6.7 *Pokažimo da je funkcija $f(x) = \mid x \mid$ derivabilna u svakoj točki osim u nuli, te da je* $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Neka je $x > 0$. Izračunajmo $f'(x)$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je Δx dovoljno malen, tako da je $x + \Delta x > 0$. Dobivamo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mid x + \Delta x \mid - \mid x \mid}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Za $x < 0$ i Δx dovoljno malen, tako da je $x + \Delta x < 0$ imamo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mid x + \Delta x \mid - \mid x \mid}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -1 = -1.$$

Pokažimo da funkcija f nije derivabilna u nuli:

$$\begin{aligned} f'_{-}(0) &= \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\mid 0 + \Delta x \mid - \mid 0 \mid}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \\ f'_{+}(0) &= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\mid 0 + \Delta x \mid - \mid 0 \mid}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \end{aligned}$$

Budući da je $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$, funkcija f nije derivabilna u nuli. To znači da ova funkcija nema tangentu u točki $(0, 0)$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Ako je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in \Omega$, onda je ona neprekidna u točki x_0.

Dokaz. Znamo da je funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in \Omega$ onda i samo onda ako u točki x_0 ima limes koji iznosi $f(x_0)$. Budući da je $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x_0)$, dovoljno je pokazati da je $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$. Iskoristimo li formulu (6.3) dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Obrat prethodne tvrdnje ne vrijedi, tj. postoji funkcija koja je neprekidna u x_0, ali nije derivabilna u toj točki. Takva je npr. funkcija $f(x)=|\,x\,|$, koja je neprekidna u nuli ali u nuli nije derivabilna.

6.2 Derivacije elementarnih funkcija. Pravila deriviranja

Računanje derivacije funkcije prema definicionoj formuli (6.2) je nepraktično i teško. Stoga u ovoj točki navodimo derivacije osnovnih elementarnih funkcija i pravila deriviranja pomoću kojih se lako može izračunati derivacija bilo koje elementarne funkcije.

> Funkcija $f : x\mapsto x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, derivabilna je u svakoj točki svoje domene i pri tome je:
> $$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Dokaz. Dokažimo prvo da za sve realne brojeve α i $x\neq 0$ vrijedi:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha.$$

Neka je $u=\frac{\Delta x}{x}$ i $t=(1+u)^\alpha-1$. Zamijetite da $u\to 0$ kada $\Delta x\to 0$. Stoga i $t\to 0$ kada $\Delta x\to 0$. Budući da je $\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha\cdot\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}\cdot\frac{\ln(1+u)}{u}$, (provjerite!) dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}} &= \lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\frac{\ln(1+t)}{t}}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=\frac{\alpha}{\ln\left[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]}\cdot\\ &\cdot\ln\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}\right]=\frac{\alpha}{\ln e}\cdot\ln e=\alpha.\end{aligned}$$

Za derivaciju funkcije f u točki x prema (6.2) dobivamo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha-1} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= x^{\alpha-1} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1} \cdot \alpha$$

Primjer 6.8 *Odredimo derivacije funkcija:* a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$.

a) Zamijetite da je $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. Stoga je $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\dfrac{2}{3x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$,

b) Budući da je $f(x) = x^{-\frac{1}{6}}$, dobivamo $f'(x) = -\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{6}-1} = -\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}} = -\dfrac{1}{6x \cdot \sqrt[6]{x}}$.

Derivacija logaritamske funkcije:

> Neka je $a > 0$ $(a \neq 1)$. Logaritamska funkcija $x \mapsto \log_a x$ je derivabilna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}_+$ i pri tome vrijedi:
>
> $$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e.$$
>
> Specijalno, za derivaciju prirodne logaritamske funkcije $(a = e)$ dobivamo:
>
> $$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Dokaz. Prema definicionoj formuli (6.2) dobivamo:

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a e \cdot \ln(x+\Delta x) - \log_a e \cdot \ln x}{\Delta x}$$

$$= \log_a e \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{\Delta x}{x} \to 0 \\ \text{kada } \Delta x \to 0 \end{array} \right|$$

$$= \frac{\log_a e}{x} \lim_{t \to 0} \ln(1+t)^{1/t} = \frac{\log_a e}{x} \ln \lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = \frac{\log_a e}{x}.$$

U dokazu smo upotrijebili formulu: $\log_a x = \log_a e \ln x$ (vidi t.2.6).

Primjer 6.9 *a)* $f(x) = \log x$, $f'(x) = \dfrac{\log e}{x}$; *b)* $f(x) = \log_3 x$, $f'(x) = \dfrac{\log_3 e}{x}$.

Derivacija eksponencijalne funkcije:

Eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$, $a > 0$ $(a \neq 1)$ je derivabilna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$ i vrijedi:

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$$

Specijalno, za derivaciju prirodne eksponencijalne funkcije imamo:

$$\left(e^x\right)' = e^x.$$

Dokaz. U prethodnom poglavlju pokazali smo da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ (vidi *Primjer 5.32*). Prema (6.2) dobivamo:

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Primjedba 6.6 *Moglo bi se pokazati da se od svih derivabilnih funkcija jedino prirodna eksponencijalna funkcija ($f(x) = e^x$) podudara sa svojom derivacijom.*

Trigonometrijske funkcije: $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$ su derivabilne u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$. Pri tome vrijedi:

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

Dokaz. Upotrijebit ćemo poznate trigonometrijske formule (vidi *Zadatke za vježbu 2.2–2.8*):

$$\sin u - \sin v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$$
$$\cos u - \cos v = -2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Prema (6.2) za derivaciju funkcije *sin* dobivamo:

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x\to 0} \cos(x+\frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.\end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti funkcije *cos* je $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x$, što smo iskoristili u dokazu.

Odredimo derivaciju funkcije *cos:*

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$
$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Funkcija *sin* je neprekidna pa je $\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) = \sin x$.

Derivacija zbroja i razlike funkcija:

> Neka je $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ otvoren skup. Ako su $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ derivabilne funkcije u točki $x\in\Omega$, onda vrijedi:
>
> a) zbroj $f+g$ je derivabilna funkcija u točki $x\in\Omega$ i pri tome vrijedi:
> $$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x).$$
> b) razlika $f-g$ je derivabilna funkcija u točki $x\in\Omega$ i pri tome vrijedi:
> $$(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x).$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju a). Neka su f i g derivabilne funkcije u točki $x\in\Omega$. Prema (6.2) dobivamo:

$$(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(x)+g'(x).$$

Slično se može dokazati tvrdnja b).

Primjer 6.10 *Provjerite:*

a) $\left(x^2+x+3\right)' = \left(x^2\right)'+(x)'+(3)' = 2x+1,$

b) $(2^x-\ln x+\sqrt{x})' = (2^x)'-(\ln x)'+(\sqrt{x})' = 2^x\ln 2-\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $(\sin x-\log_3 x)' = (\sin x)'-(\log_3 x)' = \cos x-\frac{\log_3 e}{x}$

d) $\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)' = \left(x+\frac{1}{x}\right)' = (x)'+\left(x^{-2}\right)' = 1-\frac{2}{x^3}.$

Primjedba 6.7 *Ne vrijedi obrat prethodne tvrdnje. Naime, postoje funkcije f i g čiji je zbroj derivabilna funkcija u svakoj točki, a da ni jedna od njih nije derivabilna ni u jednoj točki. Takve su npr. funkcije f i g definirane formulama:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{I} \end{cases} \qquad \text{i} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{I} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Derivacija produkta:

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup. Ako su $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije u točki $x \in \Omega$, onda je i funkcija $f \cdot g$ derivabilna u točki $x \in \Omega$ i pri tome vrijedi:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Specijalno, za derivaciju produkta funkcije f s konstantom $c \in \mathbb{R}$ dobivamo:

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo da su f i g derivabilne u točki $x \in \Omega$. Prema (6.2) dobivamo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(fg)(x + \Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}.$$

Dodavanjem i oduzimanjem člana $f(x + \Delta x)g(x)$ u brojniku i pregrupiranjem članova dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} (f \cdot g)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).
\end{aligned}$$

Primjer 6.11 *Provjerite:*

$$\begin{aligned}
a)\ & \left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x, \\
b)\ & \left((x^3 + 2)(x^3 - 2)\right)' = (x^3 + 2)'(x^3 - 2) + (x^3 + 2)(x^3 - 2)' \\
& \qquad = 3x^2(x^3 - 2) + (x^3 + 2)3x^2 = 6x^5, \\
c)\ & \left((3x^3 - 6x)(9x^4 + 3x^3 + 3)\right)' = (3x^3 - 6x)'(9x^4 + 3x^3 + 3) + (3x^3 - 6x)(9x^4 + 3x + 3)' \\
& \qquad = (9x^2 - 6)(9x^4 + 3x^3 + 3) + (3x^3 - 6x)(36x^3 + 3) \\
& \qquad = 189x^6 + 54x^5 - 270x^4 - 72x^3 + 27x^2 - 18.
\end{aligned}$$

Riješite primjere b) i c) tako da prvo pomnožite izraze unutar zagrada i zatim derivirate.

Primjedba 6.8 *Zamijetite da je svaki polinom derivabilna funkcija na* $\mathbb{R}$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ i $g : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija u točki $x \in \Omega$. Ako je $g(t) \neq 0$ za svaki t iz neke ε-okoline točke x, onda je i funkcija $\frac{1}{g}$ derivabilna u točki x i pri tome vrijedi:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dokaz. Neka je funkcija g derivabilna u točki $x \in \Omega$ i neka je $g(t) \neq 0$ za svaki t iz neke ε-okoline točke x. Za dovoljno malen Δx, takav da $x + \Delta x$ pripada ε-okoline točke x, prema (6.2) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{g}\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x) g(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-1}{g(x+\Delta x)g(x)} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{g(x+\Delta x)g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{-1}{g^2(x)} \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Iz prethodne tvrdnje i pravila za deriviranje produkta slijedi

Pravilo za deriviranje kvocijenta:

Neka su funkcije $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ definirane na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Ako su f i g derivabilne u točki $x \in \Omega$ i ako je $g(t) \neq 0$ za svaki t iz neke ε-okoline točke x, onda vrijedi:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Primjer 6.12 *Pokažimo: a)* $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, *b)* $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$,

Primjenom pravila za deriviranje kvocijenta dobivamo:

$$\begin{aligned}
a)\ \ (\operatorname{tg} x)' = &\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Tako smo pokazali da vrijedi:

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},}$$

b) $$\begin{aligned}(\operatorname{ctg} x)' = &\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi:

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.}$$

Primjer 6.13 *Odredimo derivaciju funkcija: a)* $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x}{x^2 - 1}$, *b)* $f(x) = \dfrac{(2x+1)(3x+2)}{(x+1)(x-1)}$.

a) Neka je $|\, x \,| \neq 1$. Primjenom pravila za deriviranje kvocijenta dobivamo:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(2x^3 - 3x)'(x^2 - 1) - (2x^3 - 3x)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(6x^2 - 3)(x^2 - 1) - (2x^3 - 3x)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^4 - 3x^2 + 3}{(x^2 - 1)^2}.\end{aligned}$$

b) Zamijetite da se ova funkcija može zapisati u obliku: $f(x) = \dfrac{6x^2 + 7x + 2}{x^2 - 1}$. Imamo:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(6x^2 + 7x + 2)'(x^2 - 1) - (6x^2 + 7x + 2)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(12x + 7)(x^2 - 1) - (6x^2 + 7x + 2)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-7x^2 - 16x - 7}{(x^2 - 1)^2}.\end{aligned}$$

Primjedba 6.9 *Zamijetite da je svaka racionalna funkcija, kao kvocijent dvaju polinoma, derivabilna u svakoj točki svoje domene.*

Derivacija kompozicije funkcija:

> Neka su $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ i $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni skupovi i $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ takve funkcije da je $\phi(\Omega) \subseteq \Omega_1$. Ako je funkcija ϕ derivabilna u točki $x_0 \in \Omega$ i ako je funkcija f derivabilna u točki $\phi(x_0)$, onda je kompozicija $f \circ \phi$ derivabilna u točki $x_0 \in \Omega$ i vrijedi:
>
> $$(f \circ \phi)'(x_0) = f'(\phi(x_0)) \cdot \phi'(x_0). \tag{6.4}$$

Dokaz. Definirajmo pomoćnu funkciju $F : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ formulom:

$$F(\tau) = \begin{cases} \dfrac{f(\tau) - f(\phi(x_0))}{\tau - \phi(x_0)} & \text{za } \tau \neq \phi(x_0) \\ f'(\phi(x_0)) & \text{za } \tau = \phi(x_0). \end{cases}$$

Kako je $\lim\limits_{\tau \to \phi(x_0)} F(\tau) = \lim\limits_{\tau \to \phi(x_0)} \dfrac{f(\tau) - f(\phi(x_0))}{\tau - \phi(x_0)} = f'(\phi(x_0)) = F(\phi(x_0))$, funkcija F je neprekidna u točki $\phi(x_0)$. Budući da je ϕ derivabilna u točki x_0 (i stoga neprekidna u točki x_0), a F neprekidna u $\phi(x_0)$, kompozicija $F \circ \phi$ je neprekidna u točki x_0. Stoga imamo:

$$\lim_{x \to x_0} F(\phi(x)) = F(\phi(x_0)) = f'(\phi(x_0)).$$

Neka je $x \neq x_0$. Zamijetite da za $\phi(x) \neq \phi(x_0)$ vrijedi:

$$\frac{f(\phi(x)) - f(\phi(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(\phi(x)) - f(\phi(x_0))}{\phi(x) - \phi(x_0)} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = F(\phi(x)) \left[\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} \right].$$

Gornja jednakost vrijedi i u slučaju $\phi(x) = \phi(x_0)$. Naime, tada su i lijeva i desna strana jednakosti jednake nuli. Tako dobivamo:

$$(f \circ \phi)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\phi(x)) - f(\phi(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} F(\phi(x)) \left[\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} \right] = f'(\phi(x_0))\, \phi'(x_0).$$

Pravilo za deriviranje kompozicije funkcija (formula (6.4)) može se jednostavnije zapisati pomoću Leibnizove oznake derivacije: $f' = \dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}$ (čitajte: *de ef po de iks*). Objasnimo pobliže.

Kod kompozicije funkcija uobičajeno je istom simbolu dati dva značenja. Neka je x nezavisna varijabla, t funkcija od x i f funkcija od z, tako da je definirana kompozicija $x \mapsto h(x) = f(t(x))$. Umjesto oznake $h(x)$ stavlja se $f(x) = f(t(x))$. Na taj način f ima dvostruku ulogu: s lijeve strane f je direktna funkcija od x, a na desnoj strani f je funkcija od z. Kako se z i ne pojavljuje to i slovu t dajemo dva značenja. Osim što je t funkcija od x, smatramo još da je t nezavisna varijabla funkcije f. Uz taj dogovor formula (6.4) prelazi u:

$$\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, t} \cdot \frac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, x}. \tag{6.5}$$

Pri tome, treba imati na umu da f na lijevoj i desnoj strani predstavlja različite funkcije. Isto tako t ima različita značenja. Kod $\dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, t}$, t označava varijablu ($t \mapsto f(t)$) dok u $\dfrac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, x}$ označava funkciju ($x \mapsto t(x)$). Podrazumijeva se da derivaciju $f' = \dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}$ računamo u točki x, derivaciju $\dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, t}$ u točki $t(x)$ i derivaciju $\dfrac{\mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, x}$ u točki x.

Primjer 6.14 *Derivirajmo funkcije: a)* $f(x) = \sin(x^2+3)$ *b)* $f(x) = 3^{\cos x}$.

a) Neka je $t = x^2+3$. Tada je: $f(t) = \sin t$, $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\sin t = \cos t$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^2+3) = 2x$. Prema (6.5) dobivamo:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \cos t\cdot(2x) = 2x\cos(x^2+3).$$

b) Neka je $t = \cos x$. Dobivamo: $f(t) = 3^t$, $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}3^t = 3^t\ln 3$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos x = -\sin x$. Tada prema (6.5) imamo:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = 3^t\ln 3\,(-\sin x) = -\ln 3\,\sin x\;3^{\cos x}.$$

Često zavisnu varijablu $f(x)$ kraće označavamo s y, a derivaciju $f'(x)$ s y' ili $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$. Uz taj dogovor formula (6.5) prelazi u:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}.$$

Nadamo se da ovaj dogovor neće dovesti do nesporazuma.

Primjer 6.15 *Odredimo derivaciju funkcija: a)* $y = \left(x^2+3x+3\right)^{99}$, *b)* $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$.

a) Neka je $t = x^2+3x+3$. Budući da je $y(t) = t^{99}$, $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}t^{99} = 99\,t^{98}$ i $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^2+3x+3) = 2x+3$, dobivamo:

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = 99t^{98}\cdot(2x+3) = 99\left(x^2+3x+3\right)^{98}\cdot(2x+3).$$

b) Neka je $t = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Tada je $y(t) = \sqrt{t}$ i $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Nadalje je:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Dobivamo:

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^3(x^2-1)}}.$$

Logaritamsko deriviranje. Ni pomoću jednog od do sada navedenih pravila ne možemo derivirati funkciju $x \mapsto f(x) = g(x)^{h(x)}$, gdje je $g(x) > 0$. Označimo $f(x)$ s y. Logaritmiranjem nalazimo:

$$\ln y = h(x) \cdot \ln g(x).$$

Sada lijevu stranu derivirajmo po pravilu za deriviranje kompozicije funkcija, a desnu stranu po pravilu za deriviranje produkta i kompozicije funkcija. Dobivamo:

$$\frac{y'}{y} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Množenjem s $y = g(x)^{h(x)}$ dobivamo:

$$y' = g(x)^{h(x)} \left(h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)} \right).$$

Nemojte memorirati ovu formulu. Upamtite da se funkcija najprije logaritmira, a zatim derivira.

Primjer 6.16 *Odredimo derivaciju funkcija: a) $y = x^x$, b) $y = 2^x (\sin x)^{\cos x}$.*

a) Logaritmiranjem dobivamo $\ln y = x \cdot \ln x$. Sada deriviramo:

$$\frac{y'}{y} = (x)' \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Konačno, množenjem gornje jednakosti s $y = x^x$ dobivamo:

$$y' = x^x (\ln x + 1)\,.$$

b) Logaritamskim deriviranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\ln y = \ln\left(2^x\right) + \ln\left((\sin x)^{\cos x}\right)\,, \\
&\ln y = x \ln 2 + \cos x \cdot \ln(\sin x)\,, \\
&\frac{y'}{y} = \ln 2 + (\cos x)' \ln(\sin x) + \cos x \,(\ln(\sin x))'\,, \\
&\frac{y'}{y} = \ln 2 - \sin x \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\mathrm{co}\, x}{\sin x}\,, \\
&y' = y \left[\ln 2 + \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\, \ln(\sin x)\right]\,, \\
&y' = 2^x (\sin x)^{\cos x} \left[\ln 2 + \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\, \ln(\sin x)\right]\,.
\end{aligned}$$

Derivacija inverzne funkcije:

Neka je $f : \Omega \to \Omega'$ bijekcija s otvorenog skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ na otvoren skup $\Omega' \subseteq \mathbb{R}$. Ako je inverzna funkcija f^{-1} neprekidna u točki $x_0 \in \Omega'$ i ako funkcija f u točki $f^{-1}(x_0) \in \Omega$ ima derivaciju $f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$, onda je inverzna funkcija f^{-1} derivabilna u točki $x_0 \in \Omega'$ i vrijedi:

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Dokaz. Dokaz ove tvrdnje sličan je dokazu pravila za deriviranje kompozicije funkcija. Funkcija f^{-1} ima ulogu funkcije ϕ. Pomoćnu funkciju $F : \Omega' \to \mathbb{R}$ definirajmo formulom:

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(f^{-1}(x_0))}{t - f^{-1}(x_0)} & \text{za } t \neq f^{-1}(x_0) \\ f'(f^{-1}(x_0)) & \text{za } t = f^{-1}(x_0). \end{cases}$$

Kako je $\lim\limits_{t\to f^{-1}(x_0)} F(t) = \lim\limits_{t\to f^{-1}(x_0)} \dfrac{f(t) - f(f^{-1}(x_0))}{t - f^{-1}(x_0)} = f'(f^{-1}(x_0)) = F(f^{-1}(x_0))$, funkcija F je neprekidna u točki $f^{-1}(x_0)$. Nadalje, prema pretpostavci funkcija f^{-1} neprekidna je u točki x_0. Dakle, kompozicija $F \circ f^{-1}$ neprekidna je u točki x_0. Stoga imamo:

$$\lim_{x\to x_0} F(f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(x_0)) = f'(f^{-1}(x_0)).$$

Zamijetite da za $x \neq x_0$ vrijedi:

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{F(f^{-1}(x))}.$$

Budući da je $\lim\limits_{x\to x_0} F(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$, prema pravilu za limes kvocijenta dobivamo:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{F(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} F(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Dakle, funkcija f^{-1} je derivabilna u točki x_0.

Primjer 6.17 *Vrijede sljedeće formule za derivacije ciklometrijskih funkcija:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Dokaz. Dokažimo samo prvu tvrdnju. Preostale tvrdnje mogu se dokazati na sličan način. Na intervalu $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ funkcija *sin* i njen inverz *arc sin* ispunjavaju sve potrebne uvjete za primjenu prethodne tvrdnje. Dobivamo:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Predznak „ +" dolazi zbog toga što je *arc sin* rastuća funkcija.

Na kraju ove točke navedimo u obliku tablice pravila deriviranja i derivacije osnovnih elementarnih funkcija:

Pravila deriviranja

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x), \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f\circ t)'(x) = f'(t(x))\cdot t'(x)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Tablica 6.1.

Derivacije osnovnih elementarnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$
c (konst.)	0
x^{α} $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha - 1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$ $(= \frac{1}{x} \log_a e)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arc\,ctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Tablica 6.2.

Tehnika deriviranja sastoji se u tome da se na pravilan način primjene pravila deriviranja i navedena tablica derivacija osnovnih elementarnih funkcija.

Zadaci za vježbu 6.1-6.2

1. Pomoću definicione formule (6.2) odredite $f'(x_0)$:

   a) $f(x) = x^2 - 3x,\ x_0 = 1$
   b) $f(x) = 4x^2 + 7,\ x_0 = -1$
   c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x_0 = \sqrt{2}$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3},\ x_0 = -1$
   e) $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x_0 = 0$
   f) $f(x) = \sqrt{2x-1},\ x_0 = 2$
   g) $f(x) = x^2 + 3\sqrt{x},\ x_0 = 4$
   h) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{5}{x},\ x_0 = 4$
   i) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 8$
   j) $f(x) = \sqrt[4]{x},\ x_0 = 81.$

   Rješenje: a) $f'(1) = -1$, b) $f'(-1) = -8$, c) $f'(\sqrt{2}) = -2^{-7/4}$, d) $f'(-1) = -2$, e) $f'(0) = 1$, f) $f'(2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, g) $f'(4) = \dfrac{19}{4}$, h) $f'(4) = -\dfrac{1}{16}$, i) $f'(8) = \dfrac{1}{12}$, j) $f'(81) = \dfrac{1}{12}$,

2. Pokažite da sljedeće funkcije nisu derivabilne u točki x_0 :

   a) $f(x) = 3\mid x\mid +1,\ x_0 = 0$
   b) $f(x) = \mid x^2 - 5x + 6\mid,\ x_0 = 2$ i $x_0 = 3$
   c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{za } x \le 1 \\ 2-x & \text{za } x > 1, \end{cases}\ x_0 = 1$
   d) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{za } x \neq 0 \\ 0 & \text{za } x = 0, \end{cases}\ x_0 = 0.$

   Uputa: Pod a), b) i c) pokažite da se u točki x_0 derivacija slijeva razlikuje od derivacije zdesna. Pod d) pokažite da ne postoje niti derivacija slijeva niti derivacija zdesna u točki $x_0 = 0$.

3. Derivacija parne funkcije je neparna funkcija.

   Rješenje: Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ simetričan otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ parna funkcija. Pokažimo da za svaki $x_0 \in \Omega$ vrijedi $f'(-x_0) = -f'(x_0)$:

$$
\begin{aligned}
f'(-x_0) &= \lim_{x\to -x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - (-x_0)} = \left| \begin{array}{c} t = -x \\ t \to x_0 \text{ kada } x \to -x_0 \end{array} \right| = \lim_{t\to x_0} \frac{f(-t) - f(-x_0)}{-t + x_0} \\
&= \lim_{t\to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{-t + x_0} = -\lim_{t\to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = -f'(x_0).
\end{aligned}
$$

4. Derivacija neparne funkcije je parna funkcija. Dokažite.

5. Odredite derivacije funkcija:

   a) $y = x + \sin\pi$
   b) $y = 2^9$
   c) $y = \cos e - e^5$
   d) $y = (3x)^4 - (2x)^5$
   e) $y = (x^2 + 2x)^2$
   f) $y = (2x)^2(3x + 5)$
   g) $y = (x^2 - 2)(x + 1)$
   h) $y = x(3x+2)(3x-2)$
   i) $y = 8x^3 - 3(x + 1)^2 + 2$
   j) $y = \dfrac{(x^3 + 1)(5 + \sqrt[3]{x})}{x^5}$
   k) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$
   l) $y = 2^x + \log_2 x$
   m) $y = \sqrt[3]{x} - 2\cos x$
   n) $y = \frac{1}{x} - \ln x$
   o) $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}$

   Rješenje: a) $y' = 1$, b) $y' = 0$, c) $y' = 0$, d) $y' = -160x^4 + 324x^3$, e) $y' = 4x^3 + 12x^2 + 8x$, f) $y' = 36x^2 + 40x$, g) $y' = 3x^2 + 2x - 2$, h) $y' = 27x^2 - 4$, i) $y' = 672x^2 - 6x - 6$, j) $y' = -25x^{-6} - \frac{14}{3}x^{-17/3} - 10x^{-3} - \frac{5}{3}x^{-8/3}$, k) $y' =$

$\frac{7}{8}x^{-1/8}$, l) $y' = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{\ln 2\, x}$, m) $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + 2\sin x$, n) $y' = -\dfrac{1+x}{x^2}$, o) $y' = \frac{1}{6}x^{-5/6} - \frac{1}{3}x^{-4/3}$.

6. Odredite derivacije funkcija:

a) $y = x\sin x$	b) $y = \sin^2 x$	c) $y = \sin x \cos x$
d) $y = e^x \ln x$	e) $y = x \operatorname{arc\,tg} x$	f) $y = x^2 \cos x$
g) $y = \dfrac{x^2-2}{x+3}$	h) $y = \dfrac{x^2+4x+4}{1-x^3}$	i) $y = \dfrac{(x^2+7)(x+2)}{x(x-3)}$
j) $y = \dfrac{e^x + \sin x}{xe^x}$	k) $y = \dfrac{\cos x + \sin x}{e^x}$	l) $y = \left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left(\dfrac{2}{x+2}\right)$

Rješenja: a) $y' = x\cos x + \sin x$, b) $y' = \sin(2x)$, c) $y' = \cos(2x)$, d) $y' = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$, e) $y' = \operatorname{arc\,tg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$, f) $y' = 2x\cos x - x^2 \sin x$, g) $y' = \dfrac{x^2+6x+2}{(x+3)^2}$, h) $y' = \dfrac{x^4+10x^3+12x^2+2x+4}{(1-x^3)^2}$, i) $y' = \dfrac{x^4-6x^3-13x^2-28x+42}{(x^2-3x)^2}$, j) $y' = \dfrac{x(\cos x - \sin x) - \sin x - e^x}{x^2 e^x}$, k) $y' = -2\,e^{-x}\sin x$, l) $y' = -\dfrac{4x+6}{(x^2+3x+2)^2}$.

7. Odredite derivacije funkcija:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(x+5)^3}$	b) $y = \dfrac{(\sqrt{x}+7)^3}{\sqrt{9-x^2}}$	c) $y = \sqrt{10-\sqrt{x}}$
d) $y = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$	e) $y = x^2\ln(x-a)$	f) $y = e^{x^2}\operatorname{tg}(2x)$
g) $y = \ln \operatorname{tg} x$	h) $y = 5^{\cos x}$	i) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$

Rješenje: a) $y' = \dfrac{-2x^2+5x-3}{\sqrt{x^2+1}\,(x+5)^4}$, b) $y' = \dfrac{(\sqrt{x}+7)^2\left[\frac{3}{2\sqrt{x}}(9-x^2) + x\sqrt{x} + 7x\right]}{(9-x^2)^{3/2}}$, c) $y' = \dfrac{-1}{4\sqrt{x}\sqrt{10-\sqrt{x}}}$, d) $y' = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, e) $y' = 2x\ln(x-a) + \dfrac{x^2}{x-a}$, f) $y' = 2e^{x^2}\left(x\operatorname{tg}(2x) + \dfrac{1}{\cos^2(2x)}\right)$, g) $y' = \dfrac{2}{\sin 2x}$, h) $y' = -5^{\cos x}\sin x \ln 5$, i) $y' = -\dfrac{x}{|\,x\,|\,\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq 0$.

8. Odredite derivacije funkcija:

a) $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$	b) $y = \sqrt[3]{2e^x + 2^x + 1} + \ln^5 x$
c) $y = \arccos\sqrt{x}$	d) $y = \operatorname{arc\,tg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arc\,tg} x)$
e) $y = 2^x + 2^{2^x}$	f) $y = \ln^2 \operatorname{arc\,tg}(x/3)$

Rješenje: a) $y' = \dfrac{2\cos x}{3\,x\sqrt[3]{\sin x}} + \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, b) $y' = \dfrac{2e^x + 2^x\ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \dfrac{5\ln^4 x}{x}$, c) $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$, d) $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}} + \dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} + \dfrac{1}{1+x^2}$, e) $y' = 2^x\ln 2 + 2^{2^x+x}\ln^2 2$, f) $y' = 2\ln\operatorname{arc\,tg}(x/3)\cdot\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg}(x/3)}\cdot\dfrac{3}{9+x^2}$.

9. Pronađite dvije funkcije f i g tako da kompozicija $f \circ g$ bude derivabilna u točki $x = a$, a da f i g ne budu derivabilne u točki $x = a$.

10. Logaritamskim deriviranjem odredite derivacije funkcija:

    a) $y = x^{\sqrt{x}}$ b) $y = \sqrt[x]{x}$ c) $y = x^{x^x}$

    Rješenje: a) $y' = \frac{1}{2}(\ln x + 2)x^{\sqrt{x}-1/2}$, b) $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$, c) $y' = x^{x^x+x-1}[1 + x \ln x(1 + \ln x)]$,

11. Odredite jednadžbe tangente i normale funkcije f u točki s apscisom x_0, ako je:

    a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \;\; x_0 = -2$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x, \;\; x_0 = 2$
    c) $f(x) = x^2(2x + 5), \;\; x_0 = -1$ d) $f(x) = (2x + 4)^2, \;\; x_0 = -2$
    e) $f(x) = \frac{1}{2x + 3}, \;\; x_0 = 0$ f) $f(x) = \sqrt{x + 1}, \;\; x_0 = 3.$

    Rješenje: a) $t: \; y = -14x - 11$, $n: \; 14y = x + 240$, b) $t: \; y = 21x - 32$, $n: \; 21y = 212 - x$, c) $t: \; y = -4x - 1$, $n: \; 4y = x + 13$, d) $t: \; y = 0$, $n: \; x = -2$, e) $t: \; 2x + 9y = 3$, $n: \; 2y = 9x - 3$, f) $t: \; 4y = x + 5$, $n: \; y + 4x = 14$.

12. Odredite jednadžbu tangente inverza funkcije $f(x) = \frac{x}{x - 2}$ u točki $(2, 4)$.

    Rješenje: $2x + y = 8$.

13. Pronađite vrijednost apscise x_0 tako da tangenta funkcije $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ u točki s apscisom x_0 bude paralelna s tangentom inverzne funkcije u točki s apscisom x_0.

    Rješenje: $x_0 = 0$.

14. Odredite onu tangentu funkcije $f(x) = x^2 + 4x + 4$ koja je paralelna s pravcem $2y = 8x - 3$.

    Rješenje: $y = 4x + 4$.

15. Neka je $f(x) = ax^2 + bx + 3$. Odredite a i b tako da tangenta funkcije f u točki $(1, 5)$ bude okomita na pravac $y + x = 1$.

    Rješenje: $a = -1$, $b = 3$.

6.3 Derivacije višeg reda

Ako je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilan u u svakoj točki otvorenog skupa Ω, onda funkciju $x \mapsto f'(x)$ definiranu na Ω označavamo s f' ili $f^{(1)}$ i nazivamo **derivacijom** ili **prvom derivacijom funkcije** f **na** Ω. Prva derivacija f' može, ali i ne mora biti derivabilna funkcija na Ω.

Primjer 6.18 *Pokažimo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom:*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & x \geq 0 \end{cases}$$

derivabilna na $\mathbb{R}$ i da je njena derivacija f' derivabilna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$, osim u $x = 0$.

Iz definicione formule dobivamo:

$$f'(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0. \end{cases}$$

Izračunajmo derivaciju u nuli:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\Delta x}{2} = 0.$$
$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{2} = 0.$$

Budući da je $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, funkcija f derivabilna je u nuli i $f'(0) = 0$. Tako smo pokazali da je $f'(x) =| x |$. U *Primjeru 6.7* pokazano je da je funkcija f' derivabilna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$, osim u nuli.

Ako je prva derivacija f' derivabilna na Ω, onda njenu derivaciju nazivamo **drugom derivacijom funkcije** f i označavamo s $f"$ ili $f^{(2)}$. Dakle, $f" = (f')'$. Derivacije višeg reda definiraju se induktivno:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \ n \in \mathbb{N},$$

gdje je $f^{(n)}$ oznaka za n-tu derivaciju funkcije f. Po dogovoru je $f^{(0)} = f$.

Primjedba 6.10 *Prema Leibnizovoj notaciji, n-tu derivaciju $f^{(n)}$ $(n \geq 2)$ funkcije f označavamo s $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}$.*

Primjer 6.19 *Odredimo prve tri derivacije funkcije $f(x) = x^3 + x \sin x$:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + \sin x + x\cos x \\ f"(x) &= 6x + \cos x + (\cos x - x \sin x) = 6x + 2\cos x - x\sin x \\ f'''(x) &= 6 - 2\sin x - (\sin x + x\cos x) = 6 - 3\sin x - x\cos x \end{aligned}$$

Primjer 6.20 *Funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ su beskonačno puta derivabilne na* $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & g(x) = \cos x \\ f'(x) = \cos x & g'(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\sin x & g''(x) = -\cos x \\ f'''(x) = -\cos x & g'''(x) = \sin x \\ f^{(4)}(x) = \sin x & g^{(4)}(x) = \cos x \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Općenito, za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{array}{ll} f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1}\cos x, & f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \\ g^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \sin x, & g^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x, \end{array}$$

Provjerite ove formule i dokažite ih matematičkom indukcijom.

Primjer 6.21 *Odredimo parametar k tako da funkcija $y = \sin(kx)$ zadovoljava jednadžbu $y'' = -9y$.*

Budući da je $y' = k\cos(kx)$ i $y'' = -k^2 \sin(kx)$, iz jednadžbe $y'' = -9y$ dobivamo:

$$-k^2 \sin(kx) = -9 \sin(kx)\,,$$

odakle je $k^2 = 9$. Dakle, imamo dva rješenja: $k = 3$ i $k = -3$.

Primjer 6.22 Leibnizova formula. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup. Ako funkcije $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ imaju derivaciju svakog reda na Ω, onda vrijedi:*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\,.$$

Dokaz ćemo provesti indukcijom po n. Za $n = 1$ formula se svodi na formulu za derivaciju produkta. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, tj. da je $(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Pokažimo sada da iz te pretpostavke slijedi da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$ (usporedite ovaj dokaz s dokazom binomne formule (t.1.7)):

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\left(f^{(k)}\right)' g^{(n-k)} + f^{(k)} \left(g^{(n-k)}\right)'\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\ &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \left[f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] \\ &= f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \end{aligned}$$

Uočite da je dovoljno da funkcije imaju derivaciju n-tog reda da bi vrijedila Leibnizova formula.

Zadaci za vježbu 6.3

1. Odredite koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tako da bude $f(x) = (1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

   Uputa: Izračunajte $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, na dva načina: prvo iz formule $f(x) = (1+x)^n$, a zatim iz formule $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Provjerite da dobivate binomnu formulu $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$. Zamijenite li x s $\frac{b}{a}$ i pomnožite li jednakost s a^n dobivate binomnu formulu $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2. Neka je $y = (1+x)^{-1}$. Pronađite formulu za $y^{(n)}$.

   Rješenje: $y^{(n)} = (-1)^n n!(1+x)^{n+1}$.

3. Neka je f dvaput derivabilna funkcija na $\mathbb{R}$ i $g(x) = x^3 f(x)$. Ako je $g(-1) = 4$, $g'(-1) = 2$ i $g''(-1) = -3$, pronađite $f''(-1)$.

   Rješenje: $f''(-1) = -57$.

4. Odredite polinom f drugog stupnja tako da bude: $f(2) = 2$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = 6$.

   Rješenje: $f(x) = 3x^2 - 8x + 6$.

5. Ako je $(x-a)^2$ faktor polinoma f, onda je $f(a) = 0$ i $f'(a) = 0$. Prvo dokažite, a zatim generalizirajte ovaj rezultat.

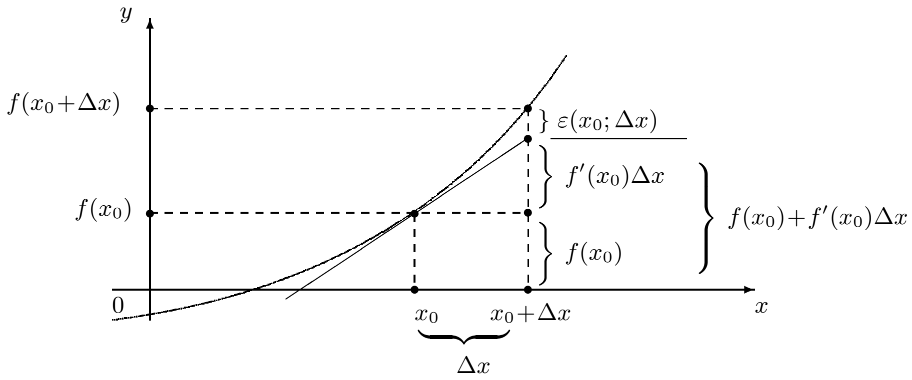
6.4 Diferencijal funkcije

U praksi često susrećemo funkcije zadane kompliciranim formulama s kojima je teško računati. U takvim situacijama, u svrhu pojednostavljivanja funkcije, često se koristi tzv. **metoda linearizacije** kod koje funkciju f u okolini neke točke x_0 aproksimiramo nekim polinoma stupnja ≤ 1. U daljnjem razmatranju ograničavamo se na onaj polinom čiji je graf upravo tangenta funkcije f u točki $(x_0, f(x_0)$. To s geometrijskog stajališta znači da u okolini točke $(x_0, f(x_0)$ graf funkcije f aproksimiramo tangentom u točki s apscisom x_0.

Svaki polinom stupnja ≤ 1 jedna je afina funkcija ($x \mapsto ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$), koja se nekada nazivala linearnom funkcijom. Od tuda dolazi naziv *metoda linearizacije*. Danas pod linearnom funkcijom podrazumijevamo funkciju $x \mapsto ax$ ($a \in \mathbb{R}$). Opravdanje za to nalazi se u teoriji linearnih operatora. Primijetite da za linearnu funkciju $f : x \mapsto ax$ vrijedi $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, dok za afinu funkciju to svojstvo ne vrijedi.

Analizirajmo pobliže ovu metodu. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija u točki $x_0 \in \Omega$, tako da u točki $(x_0, f(x_0))$ ima tangentu zadanu jednadžbom:

$$y = y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.6}$$



Slika 6.4.

Realan broj $\Delta f(x_0; \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ nazivamo **prirastom funkcije** f u točki x_0 koji odgovara prirastu Δx nezavisne varijable x. Jasno, pretpostavlja se da je $x_0 + \Delta x \in \Omega$. Vrijednost tangencijalnog polinoma (6.6) u točki $x_0 + \Delta x$ iznosi $y(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$. **Greškom aproksimacije** (u točki $x_0+\Delta x$) funkcije f tangencijalnim polinomom (6.6) nazivamo realan broj $\varepsilon(x_0; \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - y(x_0 + \Delta x)$ (vidi *Sliku 6.4*). Zamijetite da je:

$$\varepsilon(x_0; \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x. \tag{6.7}$$

Ocjena greške aproksimacije:

> Ako je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in \Omega$, onda postoji realan broj $\delta > 0$ takav da za svaki $\Delta x > 0$ sa svojstvom $\mid \Delta x \mid< \delta$ vrijedi:
>
> $$0 \leq\mid \varepsilon(x_0, \Delta x) \mid<\mid \Delta x \mid .$$

Dokaz. Iskoristimo li derivabilnost funkcije f u točki x_0 dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon(x_0;\Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.\end{aligned}$$

Sada tvrdnja slijedi iz definicije limesa. Naime, za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $\Delta x \neq 0$ iz intervala $< -\delta, \delta >$ vrijedi $\left|\dfrac{\varepsilon(x_0, \Delta x)}{\Delta x} - 0\right| < 1$.

Ako u ocjeni greške aproksimacije prijeđemo na limes dobivamo: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x_0, \Delta x) = 0$. To znači da u dovoljno malenoj okolini točke x_0 funkciju f možemo aproksimirati tangencijalnim polinomom (6.6). Iz (6.7) dobivamo $f(x_0+\Delta x) = f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\varepsilon(x_0, \Delta x)$, odnosno:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{6.8}$$

Iz $y(x_0+\Delta x)-y(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ vidimo da realan broj $f'(x_0)\Delta x$ predstavlja prirast ordinate tangente na krivulju u točki $(x_0, f(x_0))$ koji odgovara prirastu apscise za Δx. Označavamo ga s $\mathrm{d}\, f(x_0, \Delta x)$, tj.

$$\mathrm{d}\, f(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x.$$

Formula (6.8), kojom u okolini točke x_0 aproksimiramo funkciju f tangencijalnim polinomom (6.6) prelazi u:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}\, f(x_0, \Delta x). \tag{6.9}$$

Funkciju $\Delta x \mapsto \mathrm{d}\, f(x_0, \Delta x)$ nazivamo **diferencijalom** funkcije f u točki x_0 i označavamo s $\mathrm{d}\, f(x_0, \cdot)$. Ako je funkcija f derivabilna na Ω, onda svakoj točki $x \in \Omega$ možemo pridružiti diferencijal funkcije f u toj točki x, tj. funkciju $x \mapsto \mathrm{d}\, f(x, \cdot)$. Kada je jasno koliki su x i Δx, tada $\mathrm{d}\, f(x, \Delta x)$ označavamo kraće s $\mathrm{d}\, f$. Budući da uz tu notaciju za funkciju $x \mapsto x$ dobivamo $\mathrm{d}\, x = 1 \cdot \Delta x$, imamo:

$$\mathrm{d}\, f = f'(x) \cdot \mathrm{d}\, x. \tag{6.10}$$

U (6.10) nezavisna varijabla je $\mathrm{d}\, x$, a zavisna varijabla $\mathrm{d}\, f$. Ako je $\mathrm{d}\, x \neq 0$, onda je $f'(x) = \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}$. To je upravo Leibnizov način označavanja derivacije funkcije.

Primjer 6.23 *Aproksimirajmo pomoću diferencijala: a)* $\sqrt{145}$ *b)* $\sin 42°$

Primijenimo formulu (6.9).

a) Neka je $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 144$ i $\Delta x = 1$. Tada je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{145} = &\ f(145 + 1) \approx f(144) + \mathrm{d}\, f(144, 1) = f(144) + f'(144) \cdot 1 \\ = &\ \sqrt{144} + \frac{1}{2\sqrt{144}} = 12.0417. \end{aligned}$$

b) Stavimo $f(x) = \sin x$, $x_0 = 45°$ i $\Delta x = -3°$. Stupnjeve moramo pretvoriti u radijane (vidi t.2.7.1): $45° = \pi/4$, $\Delta x = -3\frac{\pi}{180} = -0.5236$ radijana. Budući da je $f(x_0) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $f'(x_0) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dobivamo:

$$\sin 42° \approx \sin(\pi/4) + \cos(\pi/4)(-0.5236) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-0.5236) = 0.6701.$$

Za usporedbu, prava vrijednost je ≈ 0.6691.

Primjer 6.24 Greške pri mjerenju. *Znanstvenik ili inženjer često pomoću vrijednosti x jedne fizikalne veličine računa po formuli $y = f(x)$ vrijednost druge veličine. U praksi stvarna vrijednost x često nije poznata i stoga se ona određuje eksperimentalnim putem. Zbog nepreciznosti mjernih instrumenata izmjerena vrijednost $x^\star$ razlikovat će se od prave vrijednosti x, ali se zna da se greška aproksimacije $\Delta x = x - x^\star$ kreće u intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$, tj. da je $-\varepsilon \le \Delta x \le \varepsilon$, pa često simbolički pišemo $x = x^\star \pm \varepsilon$. Za ε kažemo da je maksimalna apsolutna greška (ili granica apsolutne greške). Realan broj $\Delta x^\star =\mid x - x^\star \mid$ je apsolutna greška aproksimacije. Radi greške mjerenja $\Delta x = x - x^\star$, izračunata vrijednost $f(x^\star)$ razlikovat će se od prave vrijednosti $f(x) = f(x^\star + \Delta x)$. Apsolutnu grešku aproksimacije $\Delta f^\star :=\mid f(x^\star + \Delta x) - f(x^\star) \mid$ možemo procijeniti prema (6.9):*

$$\Delta f^\star =\mid f(x^\star + \Delta x) - f(x^\star) \mid \approx \mid f'(x^\star)\Delta x \mid = \mid f'(x^\star) \mid\mid \Delta x \mid,$$

a kako je $\mid \Delta x \mid \le \varepsilon$, maksimalna apsolutna greška može se procijeniti s:

$$\Delta f^\star \le \mid f'(x_0) \mid \varepsilon.$$

Dakle, $f(x^\star + \Delta x) \approx f(x^\star) \pm \mid f'(x^\star) \mid \varepsilon$.

Omjer između apsolutne greške aproksimacije $\Delta f^\star$ i apsolutne vrijednosti stvarne veličine $\mid f(x) \mid$ nazivamo relativnom greškom $\delta f^\star$, tj. $\delta f^\star = \dfrac{\Delta f^\star}{\mid f(x) \mid}$. Kako je u praksi stvarna vrijednost $f(x)$ obično nepoznata, a $f(x) \approx f(x_0)$, onda se relativna greška može definirati i kao $\delta f^\star = \dfrac{\Delta f^\star}{\mid f(x_0) \mid}$. Množenjem $\delta f^\star$ sa 100 dobivamo relativnu grešku izraženu u postocima (%).

Ilustracije radi, procjenimo apsolutnu i relativnu grešku prilikom izračunavanja mase m olovne kugle, ako je radijus kugle zadan s $r = 8 \pm 0.01\,\text{cm}$. *Specifična gustoća olova je* $\varrho = 12\,\text{g/cm}^3$.

Imamo: $r_0 = 8$, $\varepsilon = 0.01$, $m(r) = \varrho \cdot V(r) = \varrho \frac{4}{3} r^3 \pi$, $m(r_0) = 8\ 192\pi\,\text{g}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r} m(r_0) = 4r_0^2 \pi \varrho = 3\ 072\pi\,\text{g/m}$. Za ocjenu apsolutne greške dobivamo:

$$\Delta m^\star \le \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r} m(r_0) \right| \varepsilon = 3\ 072\pi \cdot 0.01 = 30.72\pi\,\text{g}.$$

Dakle, $m(r) \approx m(r_0) \pm 30.72\pi = 8\ 192\pi \pm 30.72\pi\,\text{g}$.

Za ocjenu relativnu greške imamo: $\delta m^\star = \dfrac{\Delta m^\star}{\mid m(r_0) \mid} \le \dfrac{30.72\pi}{8\ 192\pi} = 0.00375$ ili 0.375%.

Ilustrirajmo primjerom potrebu uvođenja pojma relativne greške. Pretpostavimo da su radijus r i visina h valjka izmjereni s istom apsolutnom greškom: $r = 3 \pm 0.01\,\text{cm}$, $h = 200 \pm 0.01\,\text{cm}$. *Budući da je $h >> r$, točnost mjerenja veličine h mnogo je veća od točnosti mjerenja veličine r.*

Primjer 6.25 *Neka je* $f(x) = x^3 - x^2 - 3$. *Zamijetite da je* $f(1) = -3$ *i* $f(2) = 1$. *Polinom* f *je neprekidna funkcija na segmentu* $[1,2]$ *pa je i* $f([1,2])$ *segment (neprekidna funkcija preslikava segment na segment). Stoga postoji* $\xi \in [1,2]$ *takav da je* $f(\xi) = 0$. *Kako pronaći* ξ*?*

Neka je $x_0 = 2$. *Budući da je* $f(x_0) = 1$, *potražimo iz jednadžbe* $\mathrm{d}\,f = (3x^2 - 2x)\mathrm{d}\,x$ *onaj* $\mathrm{d}\,x$ *koji će za* $x = x_0$ *dati* $\mathrm{d}\,f = -f(x_0)$. *Dobivamo:* $-1 = (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2)\mathrm{d}\,x$, *odakle je* $\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{8}$. *Stoga očekujemo da će* $x_1 = x_0 + \mathrm{d}\,x = 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$ *biti blizu* ξ. *Provjerite pomoću kalkulatora da je* $f(x_1) = \frac{39}{512} \approx 0.076$. *Ponovimo postupak s novom vrijednošću* $x_1 = \frac{15}{8}$ *i potražimo* $\mathrm{d}\,x$ *koji će iz jednadžbe* $\mathrm{d}\,f = (3x^2 - 2x)\mathrm{d}\,x$ *za* $x = x_1$ *dati* $\mathrm{d}\,f = -f(x_1) = -\frac{39}{512}$. *Dobivamo:* $-\frac{39}{512} = \left[\left(\frac{15}{8}\right)^3 - 3 \cdot \frac{15}{8}\right]\mathrm{d}\,x$. *Dakle,* $\mathrm{d}\,x = -\frac{52}{3\ 915}$. *Za* $x_2 = x_1 + \mathrm{d}\,x = \frac{15}{8} - \frac{52}{3\ 915} = \frac{58\ 309}{31\ 320}$ *očekujemo da bude još bolja aproksimacija broja* ξ. *Pomoću kalkulatora provjerite da je* $f(x_2) \approx -0.01329$. *Postupak iteriranja može se nastaviti dalje.*

Zamijetite da je $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, *itd. Općenito* $(k+1)$*-va aproksimacija* x_{k+1} *glasi:* $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k = 0, 1, \ldots$. *Za sada recimo samo da je ova tehnika rješavanja jednadžbe* $f(x) = 0$ *poznata pod nazivom* **Newtonova metoda.** *Više o ovoj metodi može se naći u knjigama iz numeričke matematike.*

Zadaci za vježbu 6.4

1. Aproksimirajte pomoću (6.9):

   a) $\frac{1}{0.98^3}$ b) $\sqrt[3]{29}$ c) $\sqrt{67}$
   d) $2.01^3 - 2.01^2$ e) 0.999^{10} f) $0.95^3 - \frac{1}{0.95^4}$

   Rješenje: a) ≈ 1.06, b) ≈ 3.0741, c) ≈ 8.1875, d) ≈ 4.08, e) ≈ 0.99, f) ≈ -0.4

2. Odredite diferencijale funkcija:

   a) $y = \cos(1 - x^2)$ b) $y = \frac{1 - x^3}{(2 + x)^2}$ c) $S = S(r) = 4r^2\pi$
   d) $s = s(t) = s_0 - \frac{g}{2}t^2$ e) $y = \frac{x}{x+1}$ f) $f = f(r) = -k\frac{m_1 m_2}{r}$ $(k, m_1, m_2 \in \mathbb{R})$

   Rješenje: a) $\mathrm{d}\,y = 2x\sin(1 - x^2)\mathrm{d}\,x$, b) $\mathrm{d}\,y = -\frac{x^3 + 6x^2 + 2}{(x+2)^3}\mathrm{d}\,x$, c) $\mathrm{d}\,S = 8r\pi\mathrm{d}\,r$, d) $\mathrm{d}\,s = gt\mathrm{d}\,t$, e) $\mathrm{d}\,y = \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}\,x$, f) $\mathrm{d}\,f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathrm{d}\,r$

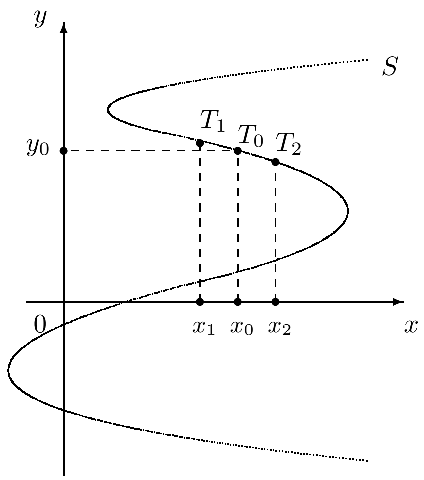
3. Stari Babilonci su 2000 g. pr. n. e. imali sljedeću približnu formulu za računanje kvadratnog korijena:
   $$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}.$$
   Pokažite da ta „babilonska" formula slijedi iz (6.9).

4. Površina S kruga radijusa r poveća se približno za $0.25\,\mathrm{cm}^2$. Procjenite povećanje Δr radijusa.

   Rješenje: $S = r^2\pi$. $\mathrm{d}\,S = 2r\pi \mathrm{d}\,r \Rightarrow \mathrm{d}\,r = \frac{\mathrm{d}\,S}{2r\pi}$, $\Delta r \approx \mathrm{d}\,r = \frac{0.25}{4\pi} = \frac{1}{16\pi}\,\mathrm{cm}$.

6.5 Derivacija implicitno zadane funkcije

Graf svake neprekidne funkcije $f :< a, b > \to \mathbb{R}$ jedna je ravninska krivulja. Svaki pravac $x = c$ ($c \in < a, b >$) siječe tu krivulju (graf) samo u jednoj točki. Općenito, za neprazan podskup S ravnine kažemo da je **funkcijski skup**, ako ga svaki pravac $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) siječe najviše u jednoj točki. U tom slučaju skup S je graf neke funkcije. Na *Slici 6.5* prikazana je jedna ravninska krivulja S koja nije funkcijski skup.



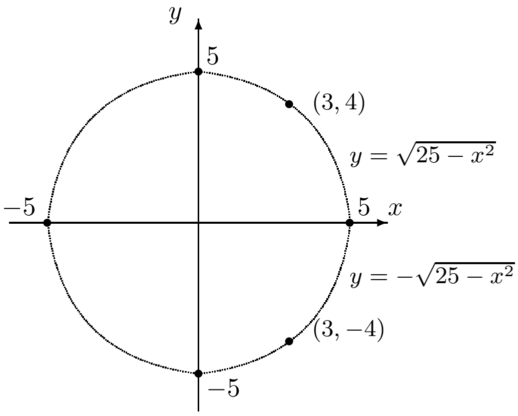
Slika 6.5.

Neka je $\tilde{S}$ dio krivulje između točaka $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ i $T_0(x_0, y_0) \in \tilde{S}$ (vidi *Sliku 6.5*). Skup $\tilde{S}$ je funkcijski skup. Označimo li s y ordinatu točke u kojoj paralela s y-osi kroz točku $(x, 0)$ ($x \in < x_1, x_2 >$) siječe skup $\tilde{S}$, onda je s $x \mapsto y$ zadana funkcija s intervala $< x_1, x_2 >$ u $\mathbb{R}$. Za tu funkciju y kažemo da je implicitno zadana skupom S u okolini točke $T_0(x_0, y_0)$.

Podskup S najčešće zadajemo jednadžbom, kao što je npr. $x^2 + y^2 = 1$, $y^5 + 3y^2 - 2x^2 + 4 = 0$ i općenito jednadžbom $F(x, y) = 0$, gdje je F realna funkcija od dvije realne varijable. Napomenimo da pod **realnom funkcijom od dvije realne varijable** podrazumijevamo svaku funkciju $F : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$, gdje su $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ neprazni skupovi.

Neka je S podskup ravnine zadan jednadžbom $F(x,y)=0$. Prisjetite se da je realan broj $y(x)$ rješenje po y jednadžbe $F(x,y)=0$, ako je $F(x,y(x))=0$. Ako na nekoj okolini točke x_0 jednadžba $F(x,y)=0$ ima rješenje $y(x)$ po y (jedno ili više) i ako svakom x-u iz te okoline pridružimo samo jedno rješenje $y(x)$, onda za funkciju $Y : x \mapsto y(x)$, definiranu na navedenoj okolini točke x_0, kažemo da je **implicitno zadana** skupom S. Radi jednostavnosti, uobičajeno je funkciju Y označavati slovom y. Nadamo se da taj dogovor neće dovesti do nesporazuma radi li se o funkciji $y = Y$ ili o nepoznanici jednadžbe $F(x,y)=0$. Ako je $y(x_0)=y_0$, onda se još kaže da je implicitna funkcija y zadana u okolini točke (x_0,y_0).

Primjer 6.26 *Kružnica radijusa $r = 5$ s centrom u ishodištu koordinatnog sustava u ravnini zadana je jednadžbom $x^2+y^2=25$.*



Slika 6.6.

Odredimo koeficijent smjera tangente na kružnicu u točki: a) $(3,4)$, b) $(3,-4)$:

Zamijetite da su gornja i donja polukružnica funkcijski skupovi.

a) Točka $(3,4)$ leži na gornjoj polukružnici, koja je graf funkcije y implicitno zadane jednadžbom kružnice: $x^2+y^2=25$. Njena eksplicitna formula glasi: $y = y(x) = \sqrt{25-x^2}$. Deriviranjem dobivamo:

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{y(x)}.$$

Koeficijent smjera tangente u točki $(3,4)$ iznosi $y'(3) = \frac{-3}{4}$.

b) Donja polukružnica je graf implicitno zadane funkcije. Njena eksplicitna formula glasi: $y = y(x) = -\sqrt{25-x^2}$. Deriviranjem dobivamo $y'(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{y(x)}$. Dakle, koeficijent smjera tangente na kružnicu u točki $(3,-4)$ iznosi $y'(3)=\frac{3}{4}$.

Neka je y funkcija bilo pod a) bilo pod b) i odredimo njenu derivaciju bez pozivanja na eksplicitnu formulu. Znamo da vrijedi $x^2 + y(x)^2 = 25$. Deriviranjem obiju strana po x dobivamo $2x + 2y(x)y'(x) = 0$, tj. $y'(x) = \frac{-x}{y(x)}$.

Pokažite da je jednadžba tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ u točki (x_0, y_0) zadana s

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

Možemo postaviti sljedeća pitanja:

Pod kojim je uvjetima u nekoj okolini točke x_0 jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadana funkcija y? Koji su dodatni uvjeti potrebni da bi ta implicitno zadana funkcija y bila derivabilna na toj okolini točke x_0?

Odgovor na ovo pitanje daje teorem o implicitnim funkcijama. Budući da je za njegovo razumijevanje potrebno uvesti nove pojmove, nećemo ga navoditi.

Ako je na nekoj okolini točke x_0 jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadana funkcija y i ako znamo formulu po kojoj se računa $y(x)$, onda tu formulu nazivamo **eksplicitnom formulom** funkcije y. Često puta nismo u stanju naći eksplicitnu formulu implicitno zadane funkcije y, a ipak nam treba njena derivacija y'. U sljedećih nekoliko primjera ilustrirano je kako tada odrediti derivaciju implicitno zadane funkcije.

Primjer 6.27 *Odredimo derivaciju implicitno zadanih funkcija:*

a) $y^5 + 3y^2 - 2x^2 = -4$ *b)* $x^3 + 2x^2y^3 + 3y^4 = 6$ *c)* $y^2 - 3x^2 = 1$

Na y treba gledati kao na funkciju od x i primjeniti formulu za deriviranje kompozicije funkcija. Derivacija (po x) lijeve strane jednakosti jednaka je derivaciji desne strane.

a) Deriviranjem dobivamo:

$$\begin{aligned} &(y^5)' + 3(y^2)' - 2(x^2)' = (-4)', \\ &5y^4y' + 6yy' - 4x = 0, \end{aligned}$$

odakle je $y' = \frac{4x}{5y^4 + 6y}$.

b) Deriviranjem dobivamo:

$$\begin{aligned} &(x^3)' + (2x^2)'y^3 + 2x^2(y^3)' + (3y^4)' = (6)', \\ &3x^2 + 4xy^3 + 6x^2y^2y' + 12y^3y' = 0, \end{aligned}$$

odnosno $y' = -\frac{3x^2 + 4xy^3}{6x^2y^2 + 12y^3}$.

c) Iz $y^2 - 3x^2 = 1$ deriviranjem dobivamo $(y^2)' - 3(x^2)' = (1)'$, odnosno $2yy' - 6x = 0$. Dakle, $y' = \frac{3x}{y}$.

Primjedba 6.11 *Derivacije ciklometrijskih funkcija* arc sin*,* arc cos*,* arc tg *i* arc tg *možemo izračunati primjenom derivacije implicitno zadane funkcije. Tako npr. funkciju* $y = \arcsin x$ *možemo zapisati u implicitnom obliku:* $\sin y = x$ *i derivirati kao implicitnu funkciju. Dobivamo:*

$$\cos y\, y' = 1,$$

odakle slijedi:

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Primjer 6.28 *Napuhavanjem zračni balon sfernog oblika mijenja svoj volumen* V *i svoje oplošje* S*. Pronađimo brzinu kojom se mijenja oplošje* S *u ovisnosti o volumenu* V*.*

Treba pronaći $\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,V}$. Neka je r radijus balona. Tada je $S = 4r^2\pi$ i $V = \frac{4}{3}r^3\pi$. Da bismo dobili jednadžbu koja sadrži samo S i V zamijetite da je

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi} \qquad \text{i} \qquad r^2 = \frac{S}{4\pi}.$$

Iz $r^6 = (r^3)^2 = \frac{9V}{16\pi^2}$ i $r^6 = (r^2)^3 = \frac{S^3}{64\pi^3}$ dobivamo $\frac{S^3}{64\pi^3} = \frac{9V^2}{16\pi^2}$, odnosno $S^3 = 36\pi V^2$. Deriviranjem po V imamo:

$$3S^2 \frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,V} = 72\pi V,$$

odakle je:

$$\frac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,V} = \frac{24\pi V}{S^2} = 4\sqrt[3]{\frac{\pi}{6V}}.$$

Derivacije višeg reda implicitno zadane funkcije mogu se pronaći uzastopnom primjenom implicitnog deriviranja.

Primjer 6.29 *Jednadžbom* $x^2 + y^2 = 2$ *implicitno je zadana funkcija* y*. Odredimo njenu drugu derivaciju.*

Deriviranjem dobivamo $2yy' + 2x = 0$, odakle je $y' = \frac{-x}{y}$. Deriviranjem posljednje jednakosti dobivamo:

$$y" = \frac{(-x)'y - (-x)y'}{y^2} = \frac{-y + xy'}{y^2}.$$

Budući da je $y' = \frac{-x}{y}$, dobivamo:

$$y" = \frac{-y + xy'}{y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{y^3}.$$

Kako je $x^2 + y^2 = 2$, to je $y" = \frac{-2}{y^3}$.

6.6 Derivacija parametarski zadane funkcije

Pretpostavimo da je funkcija f parametarski zadana (vidi t.2.9), tako da su nezavisna varijabla x i zavisna varijabla y=$f(x)$ funkcije parametra t :

$$\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t), \quad t \in< a,b >, \end{aligned} \tag{6.11}$$

pri čemu su ϕ i ψ derivabilne funkcije na intervalu $< a,b >$.

Neka je $t_0 \in< a,b >$ i $\phi'(t_0) \neq 0$. Pokažimo da postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je ϕ strogo monotona na intervalu $J =< t_0-\delta, t_0+\delta >\subseteq< a,b >$:

Pretpostavimo prvo da je $\phi'(t_0)>0$. Odaberimo realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je $0<\varepsilon<\phi'(t_0)$. Prema definiciji derivacije funkcije u točki, postoji $\delta>0$ takav da je:

$$\left|\frac{\phi(t)-\phi(t_0)}{t-t_0} - \phi'(t_0)\right| < \varepsilon \quad \text{za svaki } t \in< t_0-\delta, t_0+\delta > \setminus\{t_0\},$$

odakle dobivamo da za svaki $t \in< t_0-\delta, t_0+\delta >$ vrijedi:

$$\phi'(t_0) - \varepsilon < \frac{\phi(t)-\phi(t_0)}{t-t_0} < \varepsilon + \phi'(t_0).$$

Budući da je $0 < \phi'(t_0)-\varepsilon$, prva nejednakost daje $0 < \dfrac{\phi(t)-\phi(t_0)}{t-t_0}$, odakle zaključujemo da je $\phi(t) < \phi(t_0)$ za $t < t_0$ i $\phi(t) > \phi(t_0)$ za $t > t_0$. Dakle, funkcija ϕ je strogo rastuća na intervalu $< t_0-\delta, t_0+\delta >$. Ako je $\phi'(t_0) < 0$, onda je $-\phi'(t_0) > 0$ pa postoji interval $< t_0-\delta, t_0+\delta >$ na kome funkcija $(-\phi)$ strogo raste a funkcija ϕ strogo pada.

Neka je $\varphi = \phi_{|J}$ restrikcija funkcije ϕ na interval $J =< t_0-\delta, t_0+\delta >$. Zbog stroge monotonosti funkcije φ postoji inverzna funkcija φ^{-1} (vidi t. 2.1.2) pa za $t \in< t_0-\delta, t_0+\delta >$ iz (6.11) dobivamo $t = \varphi^{-1}(x)$ i $f(x) = y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Sada nam pravila za deriviranje kompozicije funkcija i inverzne funkcije omogućavaju da nađemo derivaciju $f'(x_0)$ funkcije f u točki $x_0 = \phi(t_0) = \varphi(t_0)$:

$$f'(x_0) = (\psi\circ\varphi^{-1})'(x_0) = \psi'(\varphi^{-1}(x_0))\cdot(\varphi^{-1})'(x_0) = \psi'(\varphi^{-1}(x_0))\cdot\frac{1}{(\varphi)'(\varphi^{-1}(x_0))}.$$

Uzmemo li u obzir da je $t_0 = \varphi^{-1}(x_0)$ i $\varphi'(t_0) = \phi'(t_0)$, onda dobivamo:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\phi'(t_0)}, \quad x_0 = \phi(t_0).} \tag{6.12}$$

Zamijetite da simboli x i y imaju dva značenja. Tako je x nezavisna varijabla funkcije f i funkcija koja ovisi od t $(x : t \mapsto \phi(x))$. Slično, y je zavisna varijabla funkcije f $(y = f(x))$ i funkcija od t $(y : t \mapsto \psi(x))$. Stoga formulu (6.12) možemo pisati u obliku:

$$\boxed{y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}, \quad x_0 = x(t_0).} \tag{6.13}$$

Pri tome treba znati da y na lijevoj i desnoj strani predstavlja različite funkcije. Kod $y'(x_0)$, y označava funkciju f $(y : x \mapsto f(x))$ dok y kod $y'(t_0)$ označava funkciju od t $(y : t \mapsto \psi(t))$.

Primjer 6.30 *Odredimo derivaciju parametarski zadanih funkcija:*

a) $x(t) = 2\cos t - \cos 2t, \quad y(t) = 2\sin t - \sin 2t, \quad t \in < 0, \pi/6 > .$

b) $x(t) = \dfrac{1-t}{1+t}, \quad y(t) = \dfrac{2t}{1+t}, \quad t \in [-1, \infty > .$

c) $x(t) = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$

a) Zamijetite:

$$x'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos(3t/2)\cdot\sin(t/2),$$
$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin(3t/2)\cdot\sin(t/2).$$

Prema formuli (6.12) dobivamo parametarske jednadžbe prve derivacije:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \mathrm{tg}(3t/2), \quad x(t) = 2\cos t - \cos 2t.$$

b) Prema (6.12) za prvu derivaciju dobivamo $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\frac{2}{(1+t)^2}}{\frac{-2}{(1+t)^2}} = -1.$

c) Budući da je $x'(t) = -3\sin t$, $y'(t) = 3\cos t$, to je:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3\cos t}{-3\sin t} = \frac{3\cos t}{-3\sqrt{1-\cos^2 t}} = \frac{x}{-3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Pod b) i c) dobili smo eksplicitne formule za prvu derivaciju y'. Pronađite eksplicitnu formulu za funkciju y.

Primjer 6.31 *Kod kosog hica u vakuumu koordinate težišta tijela zadane su u parametarskom obliku (vidi Primjer 2.65):*

$$x = (v_0\cos\alpha)\,t, \;\; y = (v_0\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2,$$

gdje su v_0 početna brzina tijela, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ izlazni kut, g ubrzanje sile teže i t vrijeme. Odredimo $y'(x)$.

Budući da je $x'(t) = v_0 \cos\alpha \neq 0$, prema (6.12) dobivamo:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{v_0 \sin\alpha - g\,t}{v_0 \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g\,t}{v_0 \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g\,t\,v_0 \cos\alpha}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Jasno, isti rezultat dobiva se i iz formule $y = x \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$ (vidi *Primjer 2.65*).

Zadaci za vježbu 6.5–6.6

1. Za sljedeće implicitno zadane funkcije u okolini točke (x_0, y_0) pronađite $y'(x_0)$ na dva načina: prvo rješavanjem jednadžbe po y, a zatim implicitnim deriviranjem.

   a) $xy = 4$, $(x_0, y_0) = (1, 4)$
   b) $x^2y + xy^2 = 12$, $(x_0, y_0) = (3, 1)$
   c) $x^2 - y^2 = 16$, $(x_0, y_0) = (5, -3)$
   d) $xy^2 - 3x^2y + 4 = 0$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$
   e) $(3x+2y)^{1/2}(x-y) = 8$, $(x_0, y_0) = (4, 2)$
   f) $3x^2y^3 + 4xy^2 = 6 + \sqrt{y}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$

   Rješenje: a) -4, b) $-\frac{7}{15}$, c) $-\frac{5}{3}$, d) $\frac{7}{5}$, e) 2, f) $-\frac{20}{33}$.

2. Odredite jednadžbe tangente i normale na krivulju zadanu jednadžbom $y^2 = x^3 - 2x^2y + 1$ u točki $(2, 1)$.

   Rješenje: t: $5y - 2x = 1$, n: $2y + 5x = 12$.

3. Krivulja je zadana jednadžbom $x^2y - xy^2 = 16$. Odredite one njene točke u kojima je tangenta paralelna s y-osi. Uputa: Shvatite x implicitnom funkcijom od y i derivirajte jednadžbu po y. Da bi tangenta u točki (x_0, y_0) bila paralelna s y-osi mora biti $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}(y_0) = 0$.

   Rješenje: $(4, 2)$.

4. Funkcija $y = f$ zadana je u okolini točke $(2, 1)$ implicitno jednadžbom $y^3 - 3xy + 2x^2 = 8$. Aproksimirajte $f(1.98)$ pomoću diferencijala.

   Rješenje: $f(1.98) \approx \frac{29}{30}$.

5. Funkcija y implicitno je zadana u okolini točke $(2, -1)$ jednadžbom $y^3 - xy = 1$. Odredite $y''(2)$.

   Rješenje: $y''(2) = 4$.

6. Odredite jednadžbu tangente parametarski zadane funkcije: $x = 3t + 4$, $y = t^2 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$, u točki s apscisom $x = -5$.

   Rješenje: $3x + y = 3$.

7. Odredite jednadžbu normale parametarski zadane funkcije: $x = \sqrt{2t^2 + 1}$, $y = 4t - 5$, $t \geq 1$, u točki s ordinatom $y = 3$.

   Rješenje: $x + 3y = 12$.

6.7 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

U ovoj točki navodimo pet teorema (Fermatov, Rolleov, Lagrangeov, Cauchy-jev i Taylorov) i neke njihove posljedice u kojima su sadržane osnove za teorijski razvoj i praktičnu primjenu diferencijalnog računa.

Fermatov[2] teorem:

> Neka funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in < a, b >$ ima lokalni ekstrem. Ako je f derivabilna u točki x_0, onda je $f'(x_0) = 0$.

Dokaz. Zbog određenosti pretpostavimo da f u točki x_0 ima lokalni maksimum. Prema definiciji lokalnog maksimuma postoji $\delta > 0$ takav da je $f(x_0) \geq f(x)$ za svaki $x \in [a, b] \cap < x_0 - \delta, x_0 + \delta >$. Budući da je $x_0 \in < a, b >$, nadalje možemo pretpostaviti da je $< x_0 - \delta, x_0 + \delta > \subset < a, b >$, tako da za svaki $\Delta x \in < -\delta, \delta >$ vrijedi:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x). \tag{6.14}$$

Funkcija f je derivabilna u točki x_0 pa u toj točki ima derivaciju slijeva $f'_-(x_0)$ i derivaciju zdesna $f'_+(x_0)$ koje iznose $f'(x_0)$. Stoga je dovoljno pokazati da vrijede nejednakosti:

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0.$$

Krenimo redom. Neka je prvo $\Delta x \in < -\delta, 0 >$. Tada iz (6.14) dobivamo:

$$0 \leq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Prijelazom na limes imamo:

$$0 \leq \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0).$$

Neka je sada $\Delta x \in < 0, \delta >$. Tada prema (6.14) dobivamo nejednakost:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

odakle prijelazom na limes imamo:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Tako smo pokazali da je $f'(x_0) = 0$.

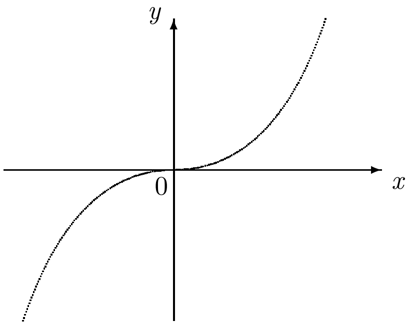
Ako funkcija f u točki x_0 ima lokalni minimum, onda funkcija $g = -f$ u točki x_0 ima lokalni maksimum i ispunjava sve pretpostavke teorema. Prema prvom dijelu dokaza, tada je $g'(x_0) = -f'(x_0) = 0$, odakle je $f'(x_0) = 0$.

[2] Pierre de Fermat, 1601–1665, francuski pravnik kome je matematika bila hobi.

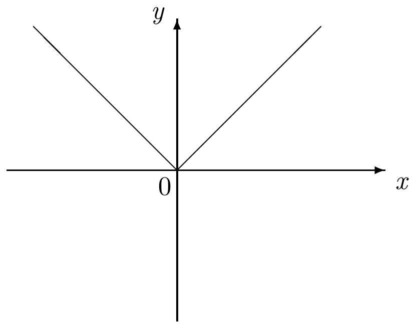
Fermatov teorem poznat je i kao **nužan uvjet** za postojanje lokalnog ekstrema za derivabilnu funkciju definiranu na intervalu.

Kažemo da je točka x_0 **stacionarna** za funkciju f, ako je f derivabilna u točki x_0 i ako je $f'(x_0) = 0$.

Primjedba 6.12 *Nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema derivabilne funkcije nije i dovoljan uvjet. Tako je npr. točka* $x_0 = 0$ *stacionarna točka derivabilne funkcije* $f : x \mapsto x^3$*, ali* f *nema lokalni ekstrem u nuli (vidi Sliku 6.7.a). S druge strane, funkcija* $g : x \mapsto | x |$ *u točki* $x_0 = 0$ *ima lokalni minimum, ali* x_0 *nije stacionarna točka funkcije* g *jer ona u nuli nije derivabilna (vidi Sliku 6.7.b).*



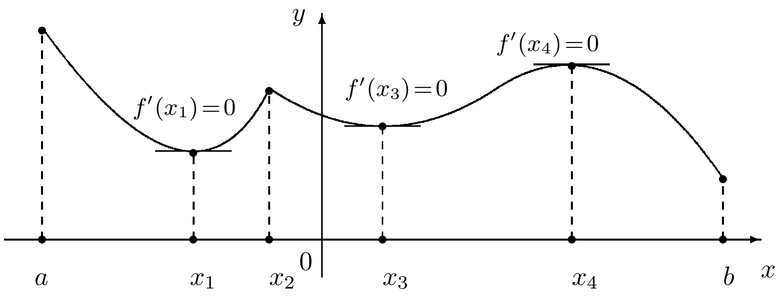
Slika 6.7.a. Graf funkcije $x \mapsto x^3$



Slika 6.7.b. Graf funkcije $x \mapsto | x |$

U sljedećoj točki navest ćemo dovoljne uvjete za postojanje lokalnog ekstrema u stacionarnoj točki neke funkcije.

Na *Slici 6.8* prikazan je graf jedne funkcije definirane na segmentu $[a, b]$ i derivabilne u svim točkama intervala $< a, b >$, osim u točki x_2.



Slika 6.8.

Ta funkcija u točkama a, x_2 i x_4 ima lokalne maksimume $f(a)$, $f(x_2)$ i $f(x_4)$, a u točkama x_1, x_3 i b lokalne minimume $f(x_1)$, $f(x_3)$ i $f(b)$. U točki a ima globalni maksimum $M = f(a)$, a u točki b globalni minimum $m = f(b)$. Njeni ekstremi (lokalni i globalni) javljaju se u rubnim točkama (a i b) segmenta $[a, b]$, u točki u kojoj nije derivabilna (x_2) i u točki gdje je derivacija jednaka nuli (x_1, x_3 i x_4).

Slijedeća tvrdnja govori nam u kojim točkama funkcija definirana na segmentu može imati lokalni ekstrem. Budući da je globalni ekstrem ujedno i lokalni ekstrem (vidi t.5.2), tvrdnja vrijedi i za globalne ekstreme.

Neka funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in [a, b]$ ima lokalni ekstrem. Tada vrijedi jedna i samo jedna od sljedećih tvrdnji:

(i) x_0 je rubna točka segmenta $[a, b]$, tj. $x_0 = a$ ili $x_0 = b$,

(ii) $x_0 \in < a, b >$ i funkcija f nije derivabilna u točki x_0, ili

(iii) $x_0 \in < a, b >$, funkcija f je derivabilna u točki x_0 i pri tome je $f'(x_0) = 0$.

Dokaz. Ako x_0 nije rubna točka i ako je f derivabilna u točki x_0, onda treba pokazati da je $f'(x_0) = 0$. Da je upravo tako slijedi iz Fermatovog teorema.

Stacionarne točke funkcije f i točke iz domene u kojima funkcija f nije derivabilna nazivamo zajedničkim imenom **kritičnim točkama** funkcije f.

Navedimo sada algoritam za nalaženje maksimalne vrijednosti M (globalni maksimum) i minimalne vrijednosti m (globalni minimum) funkcije f neprekidne na segmentu $[a, b]$.

Korak 1. Odrediti sve kritične točke funkcije f na intervalu $< a, b >$.

Korak 2. Izračunati $f(a)$ i $f(b)$. Ako postoje kritične točke $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, onda izračunati i vrijednosti $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.

Korak 3. Najveća vrijednost dobivena u **Koraku 2** je maksimalna vrijednost M, a najmanja vrijednost je minimalna vrijednost m funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Primjedba 6.13 *Zamijetite da se pomoću ovog algoritma može pronaći točka globalnog maksimuma, kao i točka globalnog minimuma neprekidne funkcije f na segmentu $[a, b]$. Osim toga, budući da je svaka točka lokalnog ekstrema ujedno i točka globalnog ekstrema na nekom podsegmentu $[a', b']$ segmenta $[a, b]$, ovaj algoritam može (ali ne mora) dati pozitivan odgovor na pitanje da li funkcija u stacionarnoj točki ima lokalni ekstrem ili ne. Da bi odgovor bio pozitivan dovoljno je pronaći takav podsegment $[a', b']$ na kome će stacionarna točka biti točka globalnog ekstrema.*

Primjer 6.32 *Odredimo točke globalnog ekstrema, maksimalnu (M) i minimalnu (m) vrijednost funkcije f na segmentu $[-2,2]$, definirane formulom $f(x)=x^3-3x$.*

Ova funkcija je polinom pa je stoga neprekidna na segmentu $[-2,2]$. Osim toga, ona je derivabilna na intervalu $<-2,2>$, pa osim stacionarnih točaka u intervalu $<-2,2>$ nema drugih kritičnih točaka. Da bi odredili njene stacionarne točke treba riješiti jednadžbu $f'(x)=0$, tj. jednadžbu $3x^2-3=0$. Dobivamo dva rješenja $x_1=-1$ i $x_2=1$. Dakle, stacionarne točke su $x_1=-1$ i $x_2=1$. Za vrijednosti funkcije f u stacionarnim i rubnim točkama dobivamo:

$$f(-2)=-2\,,\qquad f(-1)=2,\qquad f(1)=-2\,,\qquad f(2)=2.$$

Dakle, $M=f(-1)=f(2)=2$ i $m=f(-2)=f(1)=-2$. U točkama $x_1=-1$ i $b=2$ funkcija ima globalni maksimum, a u točkama $a=-2$ i $x_2=1$ globalni minimum na segmentu $[-2,2]$. Prema *Primjedbi 6.13* funkcija f u točki $x_1=-1$ ima lokalni maksimum, a u točki $x_2=1$ lokalni minimum.

Primjer 6.33 *Odredimo točke globalnog ekstrema, maksimalnu (M) i minimalnu (m) vrijednost funkcije f na segmentu $[-1,2]$, ako je $f(x)=2+2x-3x^{2/3}$.*

Funkcija je neprekidna na segmentu $[-1,2]$. Deriviranjem dobivamo $f'(x)=2-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$, odakle vidimo da prva derivacija f' nije definirana u nuli. Stoga je $x_1=0$ kritična točka funkcije f. Iz jednadžbe $f'(x)=0$, tj. iz $2-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}=0$ dobivamo jednadžbu $\sqrt[3]{x}=1$. Njeno jedino rješenje $x_2=1$ je stacionarna točka funkcije f. Za vrijednosti funkcije f u stacionarnim i rubnim točkama dobivamo:

$$f(-1)=-3\,,\qquad f(0)=2,\qquad f(1)=1\,,\qquad f(2)=6-\sqrt[3]{4}\approx 1.2378.$$

$M=f(0)=2$ i $m=f(-1)=-3$. Funkcija f u točki $x_1=0$ ima globalni maksimum, a u rubnoj točki $a=-1$ globalni minimum na segmentu $[-1,2]$.

Primjer 6.34 *Protok Q automobila na određenom dijelu ceste ovisi o brzini v automobila. Pretpostavimo da je brzina automobila zadana formulom:*

$$v(\rho)=\frac{100}{1+\left(\frac{\rho}{100}\right)^2}\ \text{km/h},\quad 0\le\rho\le 300,$$

gdje je ρ gustoća prometa (broj automobila po jednom kilometru). Odredimo gustoću prometa pri kojoj će protok automobila biti maksimalan.

Protok automobila zadan je formulom $Q(\rho)=\rho\cdot v(\rho)=\dfrac{100\rho}{1+\left(\frac{\rho}{100}\right)^2}$. Treba odrediti maksimalnu vrijednost funkcije Q na segmentu $[0,300]$. Deriviranjem dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,\rho}=\frac{100\left[1+\left(\frac{\rho}{100}\right)^2\right]-100\rho\left(\frac{2\rho}{100^2}\right)}{\left[1+\left(\frac{\rho}{100}\right)^2\right]^2}=\frac{100-100\left(\frac{\rho}{100}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\rho}{100}\right)^2\right]^2}.$$

Jednadžba $100 - 100\left(\frac{\rho}{100}\right)^2 = 0$, odnosno jednadžba $\left(\frac{\rho}{100}\right)^2 = 1$, ima dva rješenja: $\rho = -100$ i $\rho = 100$. Dakle, imamo jednu stacionarnu točku $\rho = 100$ iz segmenta $[0, 300]$. Za vrijednosti funkcije Q u stacionarnoj ($\rho = 100$) i rubnim točkama ($\rho = 0$ i $\rho = 300$) dobivamo:

$$Q(0) = \frac{100 \cdot 0}{1 + \frac{0}{100}} = 0, \quad Q(100) = \frac{100 \cdot 100}{1 + \frac{100}{100}} = 5000, \quad Q(300) = \frac{100 \cdot 300}{1 + \frac{300}{100}} = 3000.$$

Prema tome, funkcija Q u stacionarnoj točki $\rho = 100$ ima lokalni ekstrem (vidi *Primjedbu 6.13*) koji je ujedno i globalni ekstrem na segmentu $[0, 300]$. Maksimalan protok $Q(100) = 5000$ javlja se pri gustoći prometa od 100 automobila po kilometru i brzini $v(100) = 50\,\mathrm{km/h}$.

Rolleov[3] teorem:

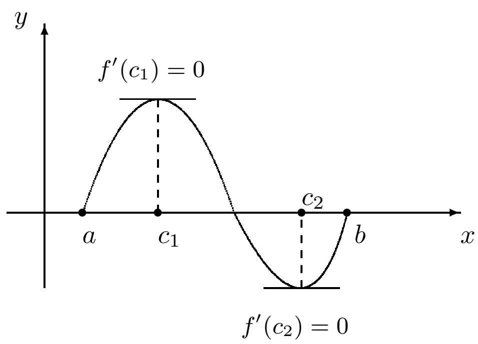
> Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $< a, b >$. Ako je $f(a) = f(b) = 0$, onda postoji točka $c \in < a, b >$ takva da je $f'(c) = 0$.

Dokaz. Ako je f konstanta na segmentu $[a, b]$, onda za točku c možemo uzeti bilo koju točku intervala $< a, b >$.

Ako f nije konstanta, onda je prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu (vidi t.5.2) slika od f, tj. skup $f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ također segment. Neka je $f([a, b]) = [A, B]$. Kako je $0 = f(a) = f(b) \in [A, B]$, to je $A \leq 0 \leq B$. Nadalje, barem jedan od brojeva A, B je različit od nule. U suprotnom bi f bila konstanta. Ako je $B > 0$, onda sa c označimo onu točku segmenta $[a, b]$ u kojoj f poprima globalni maksimum B. Kako je $f(c) = B > 0$ i $f(a) = f(b) = 0$ to je $c \in < a, b >$. Prema Fermatovom teoremu je $f'(c) = 0$. Ako je $B = 0$, onda je $A < 0$. Označimo u ovom slučaju sa c onu točku segmenta $[a, b]$ u kojoj f poprima globalni minimum A. Iz $f(c) = A < 0$ i $f(a) = f(b) = 0$ imamo da je $c \in < a, b >$. Prema Fermatovom teoremu je $f'(c) = 0$.

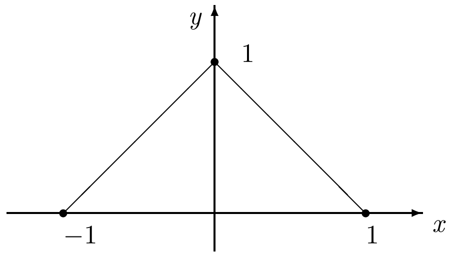
Primjedba 6.14 Geometrijska interpretacija Rolleova teorema. *Ako graf neprekidne funkcije siječe x- os u dvije točke i ako ima tangentu u svakoj točki između te dvije nul-točke, onda postoji barem jedna međutočka u kojoj je tangenta paralelna s x osi (Slika 6.9).*

[3] Michel Rolle, 1652–1719, francuski matematičar.



Slika 6.9.

Primjedba 6.15 *Uvjet derivabilnosti funkcije f na intervalu $< a, b >$ ne smije se ispustiti. On je nužan uvjet Rolleovog teorema. Ilustrirajmo primjerom. Funkcija f zadana formulom $f(x) = 1- \mid x \mid$ na segmentu $[-1, 1]$ udovoljava svim uvjetima Rolleova teorema, osim što nema prvu dervicaiju u nuli (Slika 6.10), tj. na graf te funkcije u točki s apscisom $x = 0$ ne možemo povući tangentu paralelnu s x-osi.*



Slika 6.10. Graf funkcije $f : x \mapsto 1- \mid x \mid$

Pomoću Rolleova teorema možemo dokazati Lagrangeov teorem ili teorem o srednjoj vrijednosti diferencijalnog računa.

Lagrangeov[4] teorem:

> Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $< a, b >$, onda postoji točka $c \in < a, b >$ takva da je
>
> $$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Dokaz. Definirajmo na segmentu $[a, b]$ funkciju g formulom:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

[4] J.L. Lagrange, 1736–1813, francuski matematičar.

Deriviranjem dobivamo:

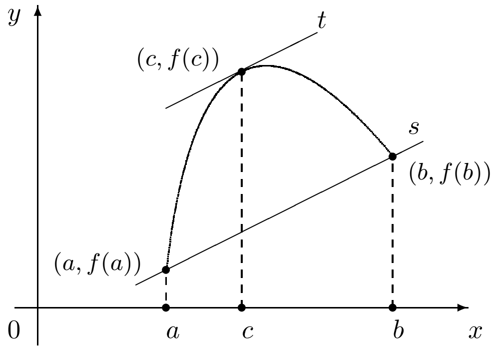
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Funkcija g na segmentu $[a, b]$ ispunjava sve uvjete Rolleova teorema (provjerite!). Stoga postoji točka $c \in < a, b >$ takva da je $g'(c) = 0$, tj.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

što povlači $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Primjedba 6.16 Geometrijska interpretacija Lagrangeova teorema. *Pomičemo li paralelno sekantu s određenu točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ dolazimo do tangente t u točki $(c, f(c))$ (Slika 6.11).*



Slika 6.11.

Primjedba 6.17 *Kao i kod Rolleova teorema, uvjet da je funkcija derivabilna na intervalu $< a, b >$ nužan je uvjet za Lagrangeov teorem. U to se lako možete uvjeriti na primjeru iz Primjedbe 6.15.*

Primjer 6.35 *Provjerimo Lagrangeov teorem za funkciju f definiranu na segmentu $[1, 3]$ formulom $f(x) = -x^2 + 6x - 6$.*

Funkcija f je restrikcija polinoma na segment $[1, 3]$, pa je stoga neprekidna na segmentu $[1, 3]$ i derivabilna na intervalu $< 1, 3 >$. Dakle, ispunjene su sve pretpostavke iz Lagrangeova teorema. Pronađimo točku $c \in < 1, 3 >$ za koju vrijedi:

$$f(3) - f(1) = f'(c)(3 - 1).$$

Budući da je $f'(c) = -2c + 6$ i $f(3) - f(1) = 4$, iz $4 = (-2c + 6)2$ dobivamo $c = 2$.

Pojam derivacije uveli smo za funkciju definiranu na otvorenom skupu. Na taj način su točke domene međusobno ravnopravne. Sada ćemo proširiti tu definiciju.

Neka je I jedan od sljedećih skupova: slijeva zatvoreni interval $[a, b >$ ili segment $[a, b]$. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je derivabilna u točki a ako je

ona derivabilna zdesna u točki a. Pri tome pod derivacijom funkcije f u točki a podrazumijevamo derivaciju zdesna funkcije f u točki a, tj. $f'(a) := f'_+(a)$.
Slično, ako je $I' =< a, b]$ ili $I' = [a, b]$, onda za funkciju $f : I' \to \mathbb{R}$ kažemo da je derivabilna u točki b ako je ona derivabilna slijeva u točki b. Pri tome realan broj $f'_-(b)$ nazivamo derivacijom funkcije f u točki b, tj. $f'(a) := f'_-(b)$.

Primjedba 6.18 *Može se pokazati da sva pravila deriviranja i tvrdnje koje smo dokazali za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilnu na otvorenom skupu Ω (ili u točki $x_0 \in \Omega$) vrijede i u slučaju kada se Ω zamijeni sa segmentom $[a, b]$, slijeva zatvorenim intervalom $[a, b >$ ili zdesna zatvorenim intervalom $< a, b]$.*

Tako naprimjer, ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in [a, b]$, onda je ona neprekidna u točki x_0.

Znamo da je derivacija konstante jednaka nuli. Prije nego što pokažemo da vrijedi obrat navedimo

Kao posljedicu Lagrangeova teorema dokažimo sljedeću tvrdnju:

> Neka je I jedan od skupova: segment $[a, b]$, interval $< a, b >$, s lijeva zatvoreni interval $[a, b >$ ili zdesna zatvoreni interval $< a, b]$. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na I i ako je $f'(x) = 0$ za svaki $x \in I$, onda je f konstanta na I.

Dokaz. Neka su x_1 i x_2 bilo koje dvije točke iz domene I i $x_1 < x_2$. Funkcija f je neprekidna na segmentu $[x_1, x_2]$ i derivabilna na intervalu $< x_1, x_2 >$. Prema Lagrangeovom teoremu postoji točka $c \in< x_1, x_2 >$ takva da je:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0,$$

odakle je $f(x_2) = f(x_1)$. Budući da su x_1 i x_2 bilo koje dvije točke domene I, funkcija f je konstanta.

> Neka je I jedan od skupova: segment $[a, b]$, interval $< a, b >$, s lijeva zatvoreni interval $[a, b >$ ili zdesna zatvoreni interval $< a, b]$. Ako su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabilne na I i ako je $f'(x) = g'(x)$ za svaki $x \in I$, onda postoji konstanta c takva da je $f = g + c$, tj.
>
> $$f(x) = g(x) + c \qquad \text{za svaki } x \in I.$$

Dokaz. Funkcija $f - g$ ispunjava sve uvjete prethode tvrdnje, iz čega slijedi navedena tvrdnja.

Neka je I jedan od skupova: segment $[a, b]$, interval $< a, b >$, s lijeva zatvoreni interval $[a, b>$ ili zdesna zatvoreni interval $<a, b]$. **Primitivnom**[5] **funkcijom** funkcije f na skupu I nazivamo svaku funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom:

$$F'(x) = f(x) \text{ za svaki } x \in I.$$

Skup svih primitivnih funkcija funkcije f označavamo s $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ i nazivamo **antiderivacijom** ili **neodređenim integralom** funkcije f.

Ako je F primitivna funkcija od f na skupu I i C bilo koja konstanta, onda je i funkcija $x \mapsto F(x) + C$ primitivna funkcija od f. Nadalje, prema prethodnoj tvrdnji, bilo koje dvije primitivne funkcije F i G od f na skupu I razlikuju se za neku konstantu C, tj. $G(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in I$. Dakle, da bi se našao neodređeni integral funkcije f na skupu I dovoljno naći jednu njenu primitivnu funkciju, recimo F, i tada je:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + C \,:\, C \in \mathbf{R}\},$$

što se kraće (ali nepreciznije) piše u obliku:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Pri tome funkciju f nazivamo **podintegralnom funkcijom**.

Više o neodređenom integralu bit će riječi u sljedećem poglavlju. Za sada navodimo samo nekoliko primjera.

Primjer 6.36 *Odredimo a)* $\int 2x\,\mathrm{d}x$, *b)* $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

a) Prema prethodnoj tvrdnji dovoljno je pronaći jednu funkciju čija derivacija u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$ iznosi $2x$. Neka to bude funkcija $x \mapsto x^2$. Dakle, $\int 2x\,\mathrm{d}\,x = x^2 + C$.

b) Budući da je $(\ln |\,x\,|)' = \frac{1}{x}$, prema prethodnoj tvrdnji je $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln |\,x\,| + C$.

Cauchyjev[6] **teorem:**

> Neka su f i g neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$ i derivabilnne na intervalu $<a, b>$. Ako je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in <a, b>$, onda postoji točka $c \in <a, b>$ takva da je
>
> $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[5] Lat. *primus*=prvi, onaj koji je bio prije
[6] A.L. Cauchy, 1789–1857, francuski matematičar

Dokaz. Budući da je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in < a, b >$, to je $g(b) \neq g(a)$. U suprotnom bi funkcija $\tilde{g}$ definirana formulom $\tilde{g}(x) = g(x) - g(b)$ na segmentu $[a, b]$ ispunjavala sve uvjete Rolleova teorema pa bi postojala točka $c \in < a, b >$ takva da je $\tilde{g}'(c) = g(c) = 0$.

Funkcija h definirana formulom:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$

na segmentu $[a, b]$ ispunjava sve uvjete Rolleova teorema (provjerite!). Stoga postoji točka $c \in < a, b >$ takva da je $h'(c) = 0$, tj.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Primjedba 6.19 *Ako je $g(x) = x$, onda iz Cauchyjeva teorema slijedi Lagrangeov teorem.*

Taylorov[7] teorem:

Neka je $< a, b >$ interval, $c \in < a, b >$, $f : < a, b > \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima $(n+1)$-vu derivaciju na intervalu $< a, b >$ i p bilo koji prirodan broj. Tada za svaki $x \in < a, b >$ postoji realan broj ξ_x ($c < \xi_x < x$ za $x > c$, odnosno $x < \xi_x < c$ za $x < c$), takav da vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x) = \; & f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x - c)^3 + \cdots \\ & + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(f, c; x) \ , \end{aligned} \tag{6.15}$$

gdje je $R_n(f, c; x) = \left(\frac{x - c}{x - \xi_x} \right)^p \cdot \frac{(x - \xi_x)^{n+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi_x)$.

Formulu (6.15) nazivamo **Taylorovom formulom** funkcije f u točki c, dok polinom:

$$T_n(f, c; x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x - c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n \tag{6.16}$$

nazivamo n-tim **Taylorovim polinomom** funkcije f u točki c. Za $R_n(f, c; x)$ kažemo da je n-ti **ostatak** funkcije f u točki c.

[7] Brook Taylor, 1685–1731, engleski matematičar.

Dokaz. Fiksirajmo $x \in <a,b>$. Radi određenosti neka je $c<x$. Uočite da je $R_n(f,c;x) = f(x) - T_n(f,c;x)$. Treba pokazati da postoji $\xi_x \in <a,b>$ takav da je

$$R_n(f,c;x) = \left(\frac{x-c}{x-\xi_x}\right)^p \cdot \frac{(x-\xi_x)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Označimo s t nezavisnu varijablu koja poprima vrijednosti iz segmenta $[c,x]$ i definirajmo na segmentu $[c,x]$ pomoćnu funkciju ϕ formulom:

$$\phi(t) = f(x) - T_n(f,t,x) - \frac{(x-t)^p}{(x-c)^p} R_n(f,c;x), \quad \text{tj.}$$

$$\phi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^p}{(x-c)^p} R_n(f,c;x).$$

Vidi se da je funkcija ϕ neprekidna i derivabilna na segmentu $[c,x]$ i da je $\phi(x) = 0$. Osim toga, iz definicione formule za funkciju ϕ dobivamo:

$$\phi(c) = f(x) - T_n(f,c,x) - R_n(f,c;x) = 0.$$

Dakle, na segmentu $[c,x]$ funkcija ϕ ispunjava sve uvjete za primjenu Rolleova teorema, pa unutar intervala $< c,x >$ postoji točka ξ_x za koju je $\phi'(\xi_x) = 0$. Deriviranjem (po t) funkcije ϕ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\phi'(t) = & -f'(t) + \left[\frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)\right] + \left[\frac{f^{(2)}(t)}{2!}2(x-t) - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\right] + \cdots \\
& + \left[\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(n-1)(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right] \\
& + \left[\frac{f^{(n)}(t)}{n!} n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-c)^p} R_n(f,c;x)
\end{aligned}$$

Zamijetite da se svi članovi (osim zadnja dva) međusobno pokrate. Dobivamo:

$$\phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-c)^p} R_n(f,c;x),$$

odakle za $t = \xi_x$ iz $\phi'(\xi_x) = 0$ slijedi:

$$R_n(f,c;x) = \left(\frac{x-c}{x-\xi_x}\right)^p \cdot \frac{(x-\xi_x)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Primjedba 6.20 *Ako je $c = 0$, onda formulu (6.15) često nazivamo* **Mac Laurinovom**[8] **formulom,** *a polinom (6.16) n-tim* **Mac Laurinovim polinomom**. *Dakle, n-ti Mac Laurinov polinom glasi:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

[8] C. Mac Laurin, 1698–1746, engleski matematičar.

Primjer 6.37 *Odredimo n-ti Mac Laurinov polinom funkcije f zadane formulom $f(x) = e^x$.*

Budući da je $f^{(k)}(x) = e^x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki $k \in \mathbb{N}$, to je $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Za n-ti Mac Laurinov polinom dobivamo:

$$T_n(f, 0; x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Razmotrimo ostatak $R_n(f, c; x)$ iz (6.15). Točka ξ_x leži između točaka c i x. To znači da postoji realan broj θ, $0 < \theta < 1$, takav da je $\xi_x = c + \theta(x - c)$. Sada je $\xi_x - c = \theta(x - c)$, odnosno $x - \xi_x = (x - c)(1 - \theta)$. Stoga n-ti ostatak $R_n(f, c; x)$ možemo pisati u obliku:

$$R_n(f, c; x) = \frac{(x-c)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}[c + \theta(x - c)].$$

Razmotrimo dva važna slučaja:

(a) Za $p = n + 1$ dobivamo **Lagrangeov oblik ostatka**:

$$R_n(f, c; x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[c + \theta(x - c)].$$

(b) Za $p = 1$ dobivamo **Cauchyjev oblik ostatka**:

$$R_n(f, c; x) = \frac{(x-c)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[c + \theta(x - c)].$$

Zamijetite da je u općem slučaju vrijednost broja θ u Lagrangeovom obliku različita od vrijednosti za θ u Cauchyjevom obliku.

Neka je $< a, b >$ interval i $c \in < a, b >$. Ako funkcija $f : < a, b > \to \mathbb{R}$ na intervalu $< a, b >$ ima derivaciju svakog reda, onda red potencija:

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \cdots \tag{6.17}$$

nazivamo **Taylorovim redom funkcije** f u točki c. Za $c = 0$ red (6.17) nazivamo **Mac Laurinovim redom**.

Primjedba 6.21 *Za $x = c$ Taylorov red (6.17) konvergira broju $f(c)$. Općenito, za $x \in < a, b > \setminus \{c\}$ Taylorov red ne mora konvergirati broju $f(x)$. Može se pokazati da funkcija f definirana formulom:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & za\ x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ima na $\mathbb{R}$ *derivaciju svakog reda i da je pri tome* $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Njen Taylorov red u točki* $c = 0$ *(Mac Laurinov red):*

$$0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n + \cdots,$$

predstavlja funkciju f *samo u točki* $x = 0$.

Prirodno se postavlja sljedeće pitanje:

Za koje vrijednosti od x *iz intervala* $< a, b >$ *red (6.17) konvergira broju* $f(x)$*?*

U vezi s tim imamo ovu tvrdnju.

> Taylorov red (6.17) konvergira broju $f(x)$, $x \in < a, b >$, onda i samo onda ako je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f, c; x) = 0$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Zamijetite da je n-ti Taylorov polinom $T_n(f, c; x)$ ujedno i n-ta parcijalna suma Taylorova reda (6.17). Iz (6.15) dobivamo:

$$f(x) - T_n(f, c; x) = R_n(f, c; x),$$

odakle slijedi da je $\mid f(x) - T_n(f, c; x) \mid < \varepsilon$ onda i samo onda ako je $\mid R_n(f, c; x) \mid < \varepsilon$, tj. da je $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(f, c; x) = f(x)$ onda i samo onda ako je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f, c; x) = 0$.

> Neka je $< a, b >$ interval, $c \in < a, b >$ i $f :< a, b > \to \mathbb{R}$ funkcija. Ako postoje realni brojevi $\delta > 0$ i $M > 0$ takvi da funkcija f na intervalu $< c - \delta, c + \delta >$ ima derivaciju svakog reda i da za sve $x \in < c - \delta, c + \delta >$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:
>
> $$\mid f^{(n)}(x) \mid \le M,$$
>
> onda je:
>
> $$\lim_{n\to\infty} R_n(f, c; x) = 0,$$
>
> tj. Taylorov red (6.17) konvergira broju $f(x)$ za svaki $x \in < c - \delta, c + \delta >$.

Dokaz. Iz Lagrangeova oblika ostatka imamo ocjenu:

$$0 \le \mid R_n(f, c; x) \mid = \left| \frac{(x - c)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}[c + \theta(x - c)] \right| \le \frac{\mid x - c \mid^{n+1}}{(n + 1)!} M.$$

Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mid x - c \mid^{n+1}}{(n+1)!} M = 0$, prijelazom na limes dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f, a; x) = 0$.

Primjer 6.38 *U Primjeru 6.37 pokazali smo da Mac Laurinov red funkcije* $f : x \mapsto e^x$ *glasi:*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Pokažimo da taj red za svaki $x \in \mathbb{R}$ *konvergira broju* e^x, *tj. da je*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Odaberimo takav $\delta > 0$ da je $x \in < -\delta, \delta >$. Zbog monotonosti funkcije $x \mapsto e^x$ vrijedi $e^{-\delta} < e^x < e^{\delta}$, odnosno $| e^x | < e^{\delta}$. Budući da je $f^{(n)}(x) = e^x$ ($n \in \mathbb{N}$), za M iz prethodne tvrdnje možemo uzeti e^{δ}.

Primjer 6.39 *Pokažimo da Mac Laurinov red funkcije* $x \mapsto \sin x$ *ima oblik:*

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

i da konvergira k $\sin x$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$, *odnosno da vrijedi:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Neka je $f(x) = \sin x$. Tada je $f'(x) = \cos x$, $f"(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ itd. Za $x = 0$ dobivamo $f'(0) = 1$, $f"(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, itd. Prema tome, Mac Laurinov red funkcije *sin* ima oblik:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Budući da je $| f^{(n)}(x) | \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, prema prethodnoj tvrdnji za svaki $\delta > 0$ i $M = 1$ Mac Laurinov red konvergira k $\sin x$ za svaki $x \in < -\delta, \delta >$. Kako je δ proizvoljno, red konvergira prema $\sin x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Primjer 6.40 *Postupajući slično kao kod prethodnog primjera nije teško provjeriti da Mac Laurinov red funkcije* cos *glasi:*

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

i konvergira prema $\cos x$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$. *Dakle:*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Za beskonačno puta derivabilnu funkciju f kažemo da je **analitička u točki** c ako postoji interval $< a, b >$ koji sadrži točku c takav da njen Taylorov red u točki c konvergira broju $f(x)$ za svaki $x \in < a, b >$. Funkciju koja je analitička u svakoj točki svoje domene nazivamo **analitičkom funkcijom.**

Zadaci za vježbu 6.7

1. Dokažite da polinom $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 3$ ima samo jednu realnu nulu.

   Rješenje: Budući da je u pitanju polinom neparnog stupnja, postoji barem jedna nula a. Kad bi polinom f imao drugu nulu b, onda bi prema Rolleovom teoremu postojao realan broj c (između a i b) takav da je $f'(c) = 0$. To nije moguće. Naime, jednadžba $f'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 0$ nema ralnih rješenja.

2. Pokažite da jednadžba $x^3 + ax^2 + c = 0$ $(a < 0, c > 0)$ ima točno jedno negativno rješenje.

   Uputa: Neka je $f(x) = x^3 + ax^2 + c$. Budući da je $f(0) = c > 0$ i $f(x) < 0$ za dovoljno malen x, jednadžba ima barem jedno negativno rješenje. Pokažite pomoću Rolleova teorema da ne mogu postojati dva negativna rješenja jednadžbe.

3. Pokažite da se kod Rolleova teorema uvjet $f(a) = f(b) = 0$ može zamijeniti uvjetom $f(a) = f(b) = A$.

   Uputa: Funkcija $x \mapsto f(x) - A$ ispunjava sve uvjete za primjenu Rolleova teorema.

4. Funkcija f zadana je formulom $f(x) = x^{2/3}$. a) Pokažite da je $f(-1) = f(1) = 0$, b) Da li postoji realan broj $c \in < -1, 1 >$ takav da je $f'(c) = 0$? c) Da li ova funkcija f obara tvrdnju Rolleova teorema? Zašto?

5. Automobil koji se giba po pravcu nakon t sekundi nalazi se na udaljenosti $s(t)$. Unutar vremenskog intervala $[t_1, t_2]$ automobil prevali udaljenost $s(t_2) - s(t_1)$ sa srednjom brzinom $\overline{v} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$. Dokažite pomoću Lagrangeova teorema da je srednja brzina $\overline{v}$ jednaka pravoj brzini $v(t)$ u nekom trenutku $t \in < t_1, t_2 >$.

6. Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $< a, b >$. Označimo s m minimalnu, a s M maksimalnu vrijednost funkcije f na segmentu $[a, b]$. Pomoću Lagrangeova teorema pokažite da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi:
$$f(a) + m(x - a) \leq f(x) \leq f(a) + M(x - a).$$

7. Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu $< a, b >$. Dokažite: Ako postoji realan broj M takav da je $| f'(x) | \leq M$ za svaki $x \in < a, b >$, onda je $| f(b) - f(a) | \leq M(b - a)$.

   Uputa: Primjenite Lagrangeov teorem.

8. Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi:
$$| \sin x - \sin y | \leq | x - y | \,.$$

   Uputa: Iskoristite prethodni zadatak.

9. Ako je f kvadratna funkcija i $[x_1, x_2]$ segment, onda za broj c iz Lagrangeova teorema možemo uzeti $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Dokažite!

10. Neka je $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija i $x_0, x_0 + \Delta x \in< a, b >$. Pokažite da postoji realan broj $\xi \in< x_0, x_0 + \Delta x >$ takav da greška aproksimacije broja $f(x_0 + \Delta x)$ formulom (6.9) iznosi $\frac{f''(\xi)}{2}(\Delta x)^2$.

    Uputa: Iskoristite Taylorovu formulu s Lagrangeovim oblikom ostatka.

11. Aproksimirajte broj e osmim Taylorovim polinomom u nuli i nađite maksimalnu grešku te aproksimacije.

    Uputa: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Upotijebite Lagrangeov oblik ostatka.

12. Pomoću kalkulatora pronađite najmanji prirodan broj n takav da za svaki $x \in [0, \pi]$ greška aproksimacije broja $\sin x$ brojem $T_n(\sin, 0; x)$ ne bude veća od 10^{-6}.

    Rješenje: $n = 9$.

13. Za sljedeće funkcije pronađite Taylorov red u zadanoj točki c i odredite vrijednosti od x za koje red konvergira broju $f(x)$:

    a) $f(x) = \ln(1 - x)$, $c = 0$ b) $f(x) = \ln(2 + x)$, $c = 0$

    c) $f(x) = \cos x$, $c = \pi/4$ d) $f(x) = 2^x$, $c = 0$

    Rješenje: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n+1}$, $x \in< -1, 1 >$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$, $x \in< -2, 2]$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}(-1)^{n(n+1)/2}(x-\frac{\pi}{4})^n}{2(n!)}$, $x \in \mathbb{R}$, d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln 2)^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

14. Da li je funkcija $x \mapsto \sqrt{x}$ analitička u nuli?

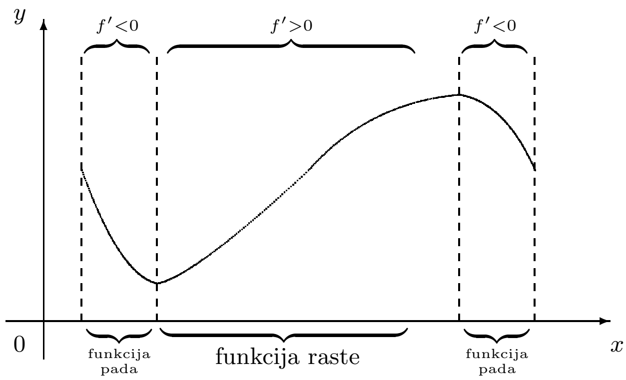
6.8 Primjene diferencijalnog računa

6.8.1 Monotonost i derivacija

Neka je I jedan od skupova: segment $[a, b]$, interval $< a, b >$, s lijeva zatvoreni interval $[a, b >$ ili zdesna zatvoreni interval $< a, b]$. Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu $< a, b >$, onda vrijedi:

a) Funkcija f raste na skupu I onda i samo onda ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in< a, b >$. Ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in< a, b >$, onda funkcija f strogo raste na skupu I.

b) Funkcija f pada na skupu I onda i samo onda ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in< a, b >$. Ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in< a, b >$, onda funkcija f strogo pada na skupu I.



Slika 6.12.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju a). Neka funkcija f raste na skupu I i neka je $x_0 \in< a, b >$ bilo koja točka. Treba pokazati da je $f'(x_0) \geq 0$. Budući da f raste na I, za svaki $x \neq x_0$ iz intervala $< a, b >$ vrijedi:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

odakle prijelazom na limes dobivamo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \text{tj. } f'(x_0) \geq 0.$$

Da bi dokazali obrat treba pokazati da je $f(x_1) \leq f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in I$ takve da je $x_1 < x_2$. Neka su x_1 i $x_2 \in I$ bilo koje dvije točke i $x_1 < x_2$. Prema Lagrangeovom teoremu postoji točka $c \in< x_1, x_2 >$ takva da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Ako je $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) > 0$] za svaki $x \in< a, b >$, onda je $f(x_2) \geq f(x_1)$ [$f(x_2) > f(x_1)$] tj. f je rastuća [strogo rastuća] na skupu I. Tvrdnje b) svodi se na tvrdnju a) promatranjem funkcije $x \mapsto -f(x)$.

Primjedba 6.22 *Ako derivabilna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ strogo raste na skupu I, onda je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in< a, b >$. Bilo bi pogrešno zaključiti da je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in< a, b >$. Tako npr. funkcija $f(x) = x^3$ strogo raste na $< -1, 1 >$, ali je $f'(0) = 0$.*

Primjer 6.41 *Odredimo intervale monotonosti (intervale rasta i intervale pada) funkcije f zadane formulom $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$:*

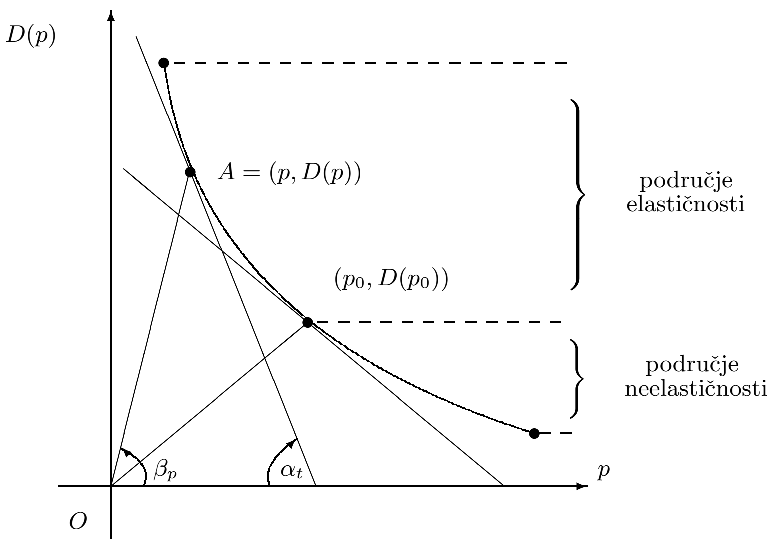
Iz $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ dobivamo $x < 0$, a iz $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} < 0$ dobivamo $x > 0$. Dakle, funkcija raste na intervalu $< -\infty, 0 >$, a pada na $< 0, \infty >$.

Primjer 6.42 Elastičnost funkcije potražnje. *U monopolističkoj situaciji potražnja robe opisuje se funkcijom potražnje D koja ovisi o cijeni p jedinice robe. Porastom cijene opada potražnja za robom, tj. D je padajuća funkcija.* **Elastičnost funkcije potražnje** *D u točki p označava se s $E_D(p)$ i definira formulom:*

$$E_D(p) = -\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\dfrac{D(p+\Delta p) - D(p)}{D(p)}}{\dfrac{\Delta p}{p}},$$

pod uvjetom da taj limes postoji. Ako je funkcija potražnje D derivabilna u točki p, onda je $E_D(p) = -\dfrac{pD'(p)}{D(p)}$. Negativan predznak u definicionoj formuli stavlja se radi toga da bi elastičnost $E_D(p)$ bila pozitivan broj (p i $D(p)$ su pozitivni, a $D'(p)$ je negativno jer potražnja opada s porastom cijene). Za krivulju potražnje (graf funkcije D) kažemo da je **elastična u točki** *$(p, D(p))$ ako je $E_D(p) > 1$. Ako je $E_D(p) < 1$, onda za krivulju potražnje kažemo da je* **neelastična u točki** *$(p, D(p))$.*

Interpretirajmo geometrijski elastičnost krivulje potražnje. Neka je $A(p, D(p))$ točka krivulje potražnje (vidi Sliku 6.13), β_p kut što ga dužina $\overline{OA}$ zatvara s pozitivnim smjerom x-osi i α_t kut što ga tangenta na krivulju u točki A zatvara s negativnim smjerom x-osi.



Slika 6.13.

Zamijetite da je $\operatorname{tg}\beta_p = \dfrac{D(p)}{p}$ *i* $D'(p) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha_t)$*. Iz formule* $\operatorname{tg}(\pi - \alpha_t) = -\operatorname{tg}\alpha_t$ *dobivamo:* $\operatorname{tg}\alpha_t = -D'(p)$*. Dakle, krivulja potražnje je elastična u točki* $(p, D(p))$

onda i samo onda ako je $\frac{\operatorname{tg}\alpha_t}{\operatorname{tg}\beta_p} > 1$, *tj. ako je* $\alpha_t > \beta_p$.

Ilustrirajmo primjerom. Funkcija potražnje zadana je formulom: $D(p) = 200 - p,\ 25 < p < 200$. *Odredimo interval cijena unutar koga je krivulja potražnje elastična.*

Budući da je $D'(p) = -1$, imamo $E_D(p) = \frac{-(-1)}{\left(\frac{200-p}{p}\right)} = \frac{p}{200-p}$. Nije teško provjeriti da je $E_D(p) < 1$ za $25 < p < 100$ i $E_D(p) > 1$ za $100 < p < 200$. Dakle, krivulja potražnje je elastična za $p \in <25, 100>$ i neelastična za $p \in <100, 200>$.

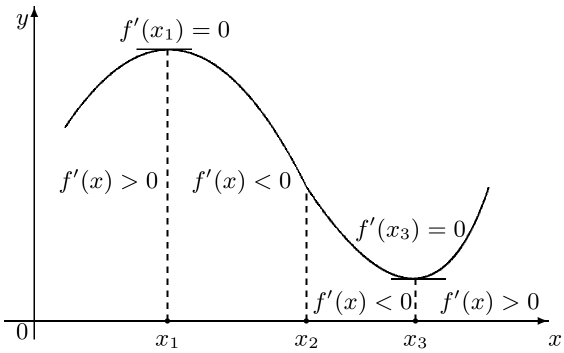
6.8.2 Lokalni ekstremi

Neka je funkcija $f : <a, b> \to \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu $<a, b>$ i $c \in <a, b>$ njena stacionarna točka.

a) Ako postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) > 0]$ za svaki $x \in <c - \delta, c>$ i $f'(x) \leq 0$ $[f'(x) < 0]$ za svaki $x \in <c, c + \delta>$, onda funkcija f u točki c ima lokalni maksimum [strogi lokalni maksimum].

b) Ako postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $f'(x) \leq 0$ $[f'(x) < 0]$ za svaki $x \in <c - \delta, c>$ i $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) > 0]$ za svaki $x \in <c, c + \delta>$, onda funkcija f u točki c ima lokalni minimum [strogi lokalni minimum].

c) Ako postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in <c - \delta, c + \delta> \setminus \{c\}$ ili $f'(x) < 0$ za svaki $x \in <c - \delta, c + \delta> \setminus \{c\}$, onda funkcija f nema lokalni ekstrem u točki c.



Slika 6.14. x_1-točka lokalnog maksimuma, x_3-točka lokalnog minimuma

Dokaz.

a) Da bi pokazali da funkcija f u stacionarnoj točki c ima lokalni maksimum [strogi lokalni maksimum] dovoljno je pokazati da je $f(x) \leq f(c)$ $[f(x) < f(c)]$ za svaki $x \in < c-\delta, c+\delta > \setminus \{c\}$. Neka je $x \in < c-\delta, c >$. Budući da je $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) > 0]$, prema prethodnoj tvrdnji dobivamo da funkcija f raste [strogo raste] na intervalu $< c-\delta, c >$. Dakle, $f(x) \leq f(c)$ $[f(x) < f(c)]$ za svaki $x \in < c-\delta, c >$. Slično, kako je $f'(x) \leq 0$ $[f'(x) < 0]$ za svaki $x \in < c, c+\delta >$, prema prethodnoj tvrdnji funkcija f pada [strogo pada] na intervalu $< c, c+\delta >$, tj. $f(x) \leq f(c)$ $[f(x) < f(c)]$ za svaki $x \in < c, c+\delta >$.

b) Slijedi iz prethodne tvrdnje promatranjem funkcije $x \mapsto -f(x)$.

c) Radi određenosti neka je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in < c-\delta, c+\delta > \setminus \{c\}$. Tada je funkcija f strogo rastuća na skupovima $x \in < c-\delta, c]$ i $[c, c+\delta >$ pa stoga u stacionarnoj točki c nema lokalni ekstrem. Slučaj $f'(x) < 0$, $x \in < c-\delta, c+\delta >$, dokazuje se na sličan način.

Primjer 6.43 *Pronađimo onaj pozitivan broj x za koji je suma tog broja i njegove recipročne vrijednosti minimalna:*

Neka je $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$. Tada je $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$. Točka $c = 1$ je jedina stacionarna točka funkcije f na intervalu $< 0, \infty >$. Provjerite:

$$\begin{array}{ll} f'(x) < 0, & x \in < 0, 1 > \\ f'(x) > 0, & x \in < 1, \infty > . \end{array}$$

Prema prethodnoj tvrdnji funkcija f u točki $c = 1$ ima strogi lokalni minimum. Budući da f strogo pada na $< 0, 1 >$ i strogo raste na $< 1, \infty >$, točka c je točka globalnog minimuma funkcije f na intervalu $< 0, \infty >$. Dakle, traženi broj je 1.

Lokalni ekstrem može se identificirati pomoću predznaka druge derivacije u stacionarnoj točki.

Neka je f dvaput derivabilna funkcija na nekoj okolini svoje stacionarne točke c.

a) Ako je $f''(c) < 0$, onda f ima strogi lokalni maksimum u točki c,

b) Ako je $f''(c) > 0$, onda f ima strogi lokalni minimumm u točki c.

Dokaz.

a) Ako je $f''(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$, onda postoji interval $< c-\delta, c+\delta >$ takav da je $\frac{f'(x)}{x - c} < 0$ za svaki $x \in < c-\delta, c+\delta > \setminus \{c\}$, odakle dobivamo:

$$\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{za svaki } x \in < c-\delta, c > \\ f'(x) < 0 & \text{za svaki } x \in < c, c+\delta > \end{array} .$$

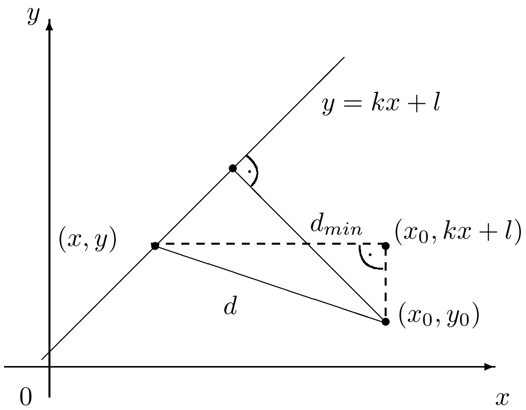
Prema prethodnoj tvrdnji funkcija f ima strogi lokalni maksimum u točki c.

b) Dokaz ove tvrdnje sličan je dokazu prve tvrdnje.

Primjer 6.44 *Pokažimo da je udaljenost točke* (x_0, y_0) *od pravca* $y = kx+l$ *zadana formulom:*

$$d_{min} = \frac{| \, y_0 - kx_0 - l \, |}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Neka je $(x, y) = (x, kx + l)$ bilo koja točka s pravca $y = kx + l$. Označimo s d njenu udaljenost od točke (x_0, y_0) (vidi *Sliku 6.15*).



Slika 6.15.

Primjenom Pitagorinog teorema na pravokutni trokut sa slike dobivamo:

$$d^2 := (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - x_0)^2 + (kx + l - y_0)^2 .$$

Treba odrediti onu točku $(c, kc + l)$ pravca $y = kx + l$ za koju je d najmanje. U tu svrhu dovoljno je naći minimum funkcije:

$$f(x) = d^2 = (x - x_0)^2 + (kx + l - y_0)^2 .$$

Rješavanjem jednadžbe:

$$f'(x) = 2 \, (x - x_0) + 2k \, (kx + l - y_0) = 0$$

dobivamo jednu stacionarnu točku $c = \frac{ky_0 - kl + x_0}{1+k^2}$. Budući da je $f''(x) = 2 + k^2 > 0$, zaključujemo da funkcija f u točki c ima strogi lokalni minimum. Pri tome je:

$$f(c) = (c - x_0)^2 + (kc + l - y_0)^2 = \left(\frac{ky_0 - kl + x_0}{1+k^2} - x_0\right)^2 + \left(k\frac{ky_0 - kl + x_0}{1+k^2} + l - y_0\right)^2 .$$

Nakon sređivanja dobivamo $f(c) = \dfrac{(y_0 - kx_0 - l)^2}{1+k^2}$, odakle je $d_{min} = \dfrac{| y_0 - kx_0 - l |}{\sqrt{1+k^2}}$.

Primjer 6.45 *Odredimo dimenzije valjka volumena* V_0 cm^2 *kome je oplošje minimalno:*

Neka je r polumjer baze, a h visina valjka. Oplošje S iznosi $S = 2\pi r^2 + 2r\pi h$. Iz formule $V_0 = \pi r^2 h$ dobivamo $h = V_0/\pi r^2$. Dakle, oplošje je funkcija polumjera r :

$$S = 2\pi r^2 + 2r\pi h = 2\pi r^2 + 2r\pi \frac{V_0}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V_0}{r}\right).$$

Deriviranjem po r dobivamo (provjerite!):

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\left(2\pi r - \frac{V_0}{r^2}\right).$$

Rješavanjem jednadžbe $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 0$ dobivamo stacionarnu točku $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$. Budući da je $\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}r^2} = 4\left(\pi + \frac{V_0}{r^3}\right) > 0$, polumjer baze treba biti $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$, a visina $h_0 = \dfrac{V_0}{\pi r_0^2} = 2r_0 \cdot \dfrac{V_0}{2\pi r_0^3} = 2r_0$.

6.8.3 Konveksne funkcije i derivacija

> Neka je f dva puta derivabilna funkcija f na intervalu $< a, b >$.
>
> a) Funkcija f je konveksna na $< a, b >$ onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$ za svako $x \in < a, b >$.
>
> b) Funkcija f je konkavna na $< a, b >$ onda i samo onda ako je $f''(x) \leq 0$ za svako $x \in < a, b >$.

Dokaz. Budući da je funkcija f konkavna na intervalu $< a, b >$ onda i samo onda ako je funkcija $-f$ konveksna na $< a, b >$, dovoljno je dokazati samo tvrdnju a). Neka je f konveksna funkcija na intervalu $< a, b >$. Treba pokazati da je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in < a, b >$, tj. da je prva derivacija f' rastuća funkcija na intervalu $< a, b >$, Neka su x_1 i x_2, $x_1 < x_2$, bilo koje dvije točke iz intervala $< a, b >$. Pokažimo da je $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Za svaki prirodan broj n neka je s:

$$\tilde{x_i} = x_1 + (i-1) \cdot h_n, \;\; h_n = \frac{x_2 - x_1}{n}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n+1$$

dana subdivizija segmenta $[a, b]$. Zamijetite da je $\tilde{x}_1 = x_1$ i $\tilde{x}_{n+1} = x_2$. Osim toga je $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Funkcija f je konveksna na $< a, b >$ pa za svaki $1 \leq i \leq n-1$ vrijedi $f(\tilde{x}_{i+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot (f(\tilde{x}_i) + f(\tilde{x}_{i+2}))$, odakle je:

$$f(\tilde{x}_{i+1}) - f(\tilde{x}_i) \leq f(\tilde{x}_{i+2}) - f(\tilde{x}_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Uzastopnom primjenom prethodne nejednakosti dobivamo:

$$f(\tilde{x}_2) - f(\tilde{x}_1) \leq f(\tilde{x}_3) - f(\tilde{x}_2) \leq f(\tilde{x}_4) - f(\tilde{x}_3) \leq \ldots \leq f(\tilde{x}_{n+1}) - f(\tilde{x}_n).$$

Dakle, $f(\tilde{x}_2) - f(\tilde{x}_1) \leq f(\tilde{x}_{n+1}) - f(\tilde{x}_n)$, tj.

$$f(x_1 + h_n) - f(x_1) \leq f(x_2) - f(x_2 - h_n).$$

Dijeljenjem posljednje nejednakosti s h_n i prijelazom na limes dobivamo:

$$f'(x_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1 + h_n) - f(x_1)}{h_n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_2 - h_n) - f(x_2)}{-h_n} = f'(x_2).$$

Naime, funkcija f je derivabilna u točkama x_1 i x_2 pa iz definicije derivacije funkcije u točki i Heinove definicije limesa funkcije dobivamo:

$$f'(x_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1 + h_n) - f(x_1)}{h_n}, \quad f'(x_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_2 - h_n) - f(x_2)}{-h_n}.$$

Tako smo pokazali da je $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Dokažimo obrat. Neka su x_1 i x_2 bilo koje dvije točke intervala $< a, b >$ i $x_1 < x_2$. Prema Lagrangeovom teoremu postoje točke $c_1 \in < x_1, \frac{x_1 + x_2}{2} >$ i $c_2 \in < \frac{x_1 + x_2}{2}, x_2 >$ takve da je:

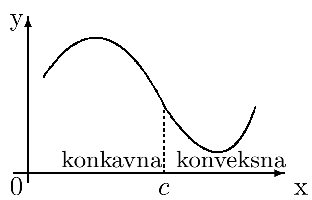
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1) = f'(c_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} \quad \text{i} \quad f(x_2) - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f'(c_2) \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}.$$

Budući da je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in < x_1, x_2 >$, prva derivacija f' je rastuća funkcija na segmentu $[x_1, x_2]$, pa je $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. Dakle

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1) \leq f(x_2) - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

odakle slijedi: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right).$

Pri skiciranju grafa funkcije važne su točke u kojima se „mijenja konveksnost". To su tzv. točke infleksije. Navedimo preciznu definiciju. Točku c iz domene funkcije f nazivamo **točkom infleksije** funkcije f ako postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je f strogo konveksna na $< c - \delta, c >$ i strogo konkavna na $< c, c + \delta >$ ili da je f strogo konkavna na $< c - \delta, c >$ i strogo konveksna na $< c, c + \delta >$.



Slika 6.16.

Na slici 6.16 prikazan je graf jedne funkcije kojoj je c točka infleksije: lijevo od točke c funkcija je konkavna, a desno od c funkcija je konveksna.

Slijedeća tvrdnja govori da su točke infleksije dvaput derivabilne funkcije f ujedno strogi lokalni ekstremi njene prve derivacije f'.

Neka je f dvaput derivabilna funkcija na intervalu $< a, b >$. Točka $c \in < a, b >$ je točka infleksije funkcije f onda i samo onda ako funkcija f' ima strogi lokalni ekstrem u c.

Dokaz. Funkcija f' ima strogi lokalni ekstrem u točki c onda i samo onda ako postoji $\delta > 0$ takav da je $f''(x) > 0$ za $x \in < c - \delta, c >$ i $f''(x) < 0$ za $x \in < c, c + \delta >$ ili $f''(x) < 0$ za $x \in < c - \delta, c >$ i $f''(x) > 0$ za $x \in < c, c + \delta >$, tj. ako je f strogo konveksna na $< c - \delta, c >$ i strogo konkavna na $< c, c + \delta >$ ili ako je f strogo konkavna na $< c - \delta, c >$ i strogo konveksna na $< c, c + \delta >$.

Primjer 6.46 *Odredimo intervale konveksnosti, intervale konkavnosti i točke infleksije funkcije f zadane formulom $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{2x}$.*

Budući da je $f''(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3}$ dobivamo (provjerite!):

$$\begin{aligned} &f''(x) > 0, \ x \in < -\infty, -1 > \cup < 0, \infty > \\ &f''(x) < 0, \ x \in < -1, 0 >, \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f je strogo konveksna na $< -\infty, -1 >$ i na $< 0, \infty >$, a strogo konkavna na $< -1, 0 >$. Budući da funkcija f nije definirana u nuli, točka -1 je jedina točka infleksije.

6.8.4 L' Hospitalovo pravilo

Ovo pravilo je od izuzetnog značaja za računanje limesa funkcije kada se javljaju neodređeni oblici $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞ i ∞^0.

L' Hospitalovo[9] pravilo:

Neka su f i g bilo koje dvije funkcije takve da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Ako su ispunjene sljedeće pretpostavke:

(i) postoji realan broj $\delta > 0$ takav da su funkcije f i g derivabilne u svakoj točki intervala $< a-\delta, a+\delta >$, osim možda u točki a,

(ii) $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in < a-\delta, a+\delta > \setminus \{a\}$,

(iii) postoji $L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

onda je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.18}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su funkcije f i g neprekidne u točki a, tj. da je $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ i $g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. U suprotnom proširimo funkcije f i g po neprekidnosti u točki a, tj. zamijenimo $f(a)$ s $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ i $g(a)$ s $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (vidi t.5.2.1). Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Prema (iii) je $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ pa postoji $\delta_\varepsilon > 0$, $\delta_\varepsilon < \delta$, takav da

$$(x \neq a; x \in < a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon >) \Rightarrow \left(\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon \right). \tag{6.19}$$

Pokažimo da za svaki $x \in < a-\delta_\varepsilon, a >$ $[x \in < a, a+\delta_\varepsilon >]$ postoji točka $c \in < x, a >$ $[c \in < a, x >]$ takva da je:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{6.20}$$

Neka je $x \in < a-\delta_\varepsilon, a >$. Funkcije f i g su neprekidne na segmentu $[x, a]$ i derivabilne na intervalu $< x, a >$ pa prema Cauchyjevom teoremu postoji točka $c \in < x, a >$ takva da vrijedi (6.20). Slično se razmatra slučaj $x \in < a, a+\delta_\varepsilon >$. Budući da je $c \in < a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon >$, iz (6.19) i (6.20) dobivamo:

$$(x \neq a; x \in < a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon >) \Rightarrow \left(\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon \right).$$

Dakle, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Primjedba 6.23 *Pretpostavka* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *može se zamijeniti s pretpostavkom:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ *ili* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$. *Nadalje može se uzeti da* x *konvergira točki* a *samo slijeva ili samo zdesna.*

[9] G. F. A. de L' Hospital, 1661–1704, francuski matematičar.

Da bi formula (6.18) vrijedila za limes kada $x \to \infty$ [kada $x \to -\infty$] potrebno je pretpostavke (i) i (ii) zamijeniti s pretpostavkama:

(i') postoji realan broj $M > 0$ [$m < 0$] takav da su funkcije f i g derivabilne na intervalu $< M, \infty >$ [$< -\infty, m >$],

(ii') $g'(x) \neq 0$ za svaki $x > M$ [$x < m$].

Primjer 6.47 *Odredimo limese: a)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{x}{e^{-1/x}}$.

a) Ovdje je $f(x) = (1+x)^n - 1$, $g(x) = x$. Budući da je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, u pitanju je neodređeni oblik $\frac{0}{0}$. Primjenom L' Hospitalova pravila dobivamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{n(1+x)^{n-1}}{1} = n \lim_{x\to 0} (1+x)^{n-1} = n.$$

b) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. U pitanju je neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$. Primjenom L' Hospitalova pravila dobivamo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

c) Neka je $f(x) = x$, $g(x) = e^{-1/x}$. Ovdje se radi o neodređenom obliku $\frac{0}{0}$. Uzastopnom primjenom L' Hospitalova pravila dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{x}{e^{-1/x}} &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^{-1/x}(1/x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{e^{-1/x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2x}{e^{-1/x}(1/x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x^3}{e^{-1/x}} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2\cdot 3x^2}{e^{-1/x}(1/x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\cdot 3x^4}{e^{-1/x}} = \ldots = \lim_{x\to 0+} \frac{(n-1)!\, x^n}{e^{-1/x}},\end{aligned}$$

odakle vidimo da „idemo pogrešnim putem". Zapišemo li $\frac{x}{e^{-1/x}}$ u obliku $\frac{e^{1/x}}{1/x}$, tj. pretvorimo li neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ u neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$, primjenom L' Hospitalova pravila dobivamo:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} e^{1/x} = \infty.$$

Primjedba 6.24 *Neodređeni oblici $0\cdot\infty$ i $\infty - \infty$ mogu se rješavati tako da se zadana funkcija prikaže u obliku kvocijenta s neodređenim oblikom $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, a zatim primjeni L' Hospitalovo pravilo.*

Ako produkt $f \cdot g$ u limesu daje neodređeni oblik $0 \cdot \infty$, onda kvocijent $\dfrac{f}{1/g}$ daje neodređeni oblik $\frac{0}{0}$, a kvocijent $\dfrac{g}{1/f}$ daje neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$. Pomoću izraza $f - g = \dfrac{1/g - 1/f}{1/fg}$ pretvaramo neodređeni oblik $\infty - \infty$ u neodređeni oblik $\frac{0}{0}$.

Primjer 6.48 *Odredimo* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

U pitanju je neodređeni oblik $\infty-\infty$ koji ćemo prvo pretvoriti u neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ i zatim dva puta uzastopno primjeniti L' Hospitalovo pravilo. Dobivamo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(x+2)}=\frac{1}{2}.$$

Primjedba 6.25 *Neodređeni oblici* 0^0, 1^∞ *i* ∞^0 *mogu se rješavajti tako da se zadana funkcija prvo logaritmira, a zatim rezultat zapiše u obliku kvocijenta i onda primjene L' Hospitalovo pravilo i formula* $\lim_{x\to a}(\ln y)=\ln\lim_{x\to a}y$ *(vidi t.5.2.1).*

Primjer 6.49 *Odredimo* $\lim_{x\to\infty}x^{1/x}$.

Ovdje se radi o neodređenom obliku ∞^0. Neka je $y=x^{1/x}$. Tada je $\ln y=\frac{\ln x}{x}$. Prvo odredimo L' Hospitalovim pravilom $\lim_{x\to\infty}\ln y$:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

Budući da je $\lim_{x\to a}(\ln y)=\ln\lim_{x\to a}y$, imamo $\ln(\lim_{x\to\infty}y)=0$, odakle antilogaritmiranjem dobivamo: $\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}x^{1/x}=1$.

6.8.5 Ispitivanje tijeka funkcije

Pod ispitivanjem „tijeka” funkcije f podrazumijevamo određivanje:

a) područja definicije funkcije f, ukoliko je funkcija f zadana formulom,

b) nul točaka funkcije f,

c) točaka u kojima funkcija f ima prekid,

d) asimptota funkcije f (vertikalnih, horizontalnih i kosih),

e) intervala gdje funkcija f raste odnosno pada,

f) ekstremnih vrijednosti funkcije f,

g) intervala u kojima je funkcija f konveksna odnosno konkavna,

h) točaka infleksije funkcije f.

Da bi skiciranje grafa funkcije f bilo lakše dobro je ispitati još:

i) parnost funkcije f i

j) periodičnost funkcije f.

Kod ispitivanja tijeka funkcije f od velike koristi je sljedeća tvrdnja:

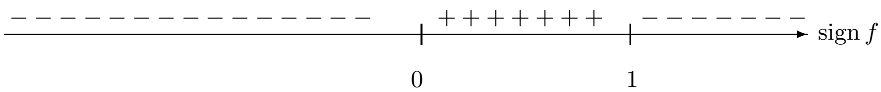
> Neka je funkcija $f\colon <a,b> \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu $<a,b>$. Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in <a,b>$, onda funkcija f ne mijenja predznak na $<a,b>$, tj. $\operatorname{sign} f(x_1) = \operatorname{sign} f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in <a,b>$.

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in <a,b>$ bilo koje dvije točke. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $x_1 < x_2$. Budući da je funkcija f neprekidna na segmentu $[x_1, x_2]$, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu o neprekidnim funkcijama na segmentu (vidi t.5.2) skup $f([x_1, x_2]) = \{f(x) \mid x \in [x_1, x_2]\}$ je segment. Neka je $f([x_1, x_2]) = [A, B]$. Kako funkcija f nema nul točaka na segmentu $[x_1, x_2]$ to su $A, B > 0$ ili $A, B < 0$. Dakle, $\operatorname{sign} f(x_1) = \operatorname{sign} f(x_2)$.

Primjer 6.50 *Ispitajmo tijek i skicirajmo graf funkcije f zadane formulom* $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-x}$.

a) Domena funkcije f je skup $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$ dobivamo da je $x = 0$ jedina nul točka funkcije f. Odredimo predznake funkcije f. Funkcija f je neprekidna na intervalima $< -\infty, 0 >$, $< 0, 1 >$ i $< 1, \infty >$ i unutar njih nema nul točaka. Prema prethodnoj tvrdnji, da bismo odredili predznak funkcije f na nekom od tih intervala dovoljno je odrediti predznak funkcije f samo u jednoj točki tog intervala. Odaberemo li točke $x = -8$, $x = \frac{1}{8}$ i $x = 8$ dobivamo $f(-8) = -\frac{2}{9}$, $f(\frac{1}{8}) = \frac{4}{7}$ i $f(8) = -\frac{2}{7}$.



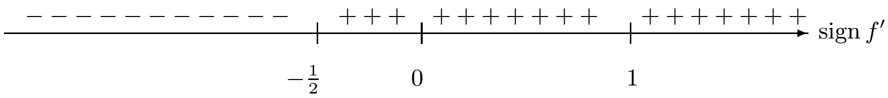
Slika 6.17. Predznaci funkcije f

c) Funkcija f je neprekidna na skupu $D(f)$

d) Budući da je funkcija f neprekidna na $D(f)$, pravac $x = a$, $a \neq 1$, ne može biti vertikalna asiptota (vidi t.5.1.1 i 5.2). Kada $x \to 1+$ brojnik $\sqrt[3]{x} \to 1$, a nazivnik $1 - x$ je negativan i konvergira nuli. Stoga je $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-x} = -\infty$. Slično se pokaže da je $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-x} = \infty$. Tako smo pokazali da je pravac $x = 1$ vertikalna asimptota (vidi t.5.1.1). Funkcija f nema kosih asimptota jer je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^{2/3}(1-x)} = 0$. Pravac $y = 0$ (x-os) je horizontalna asimptota (vidi *Primjedbu 5.11*).

Deriviranjem dobivamo (provjerite!): $f'(x) = \dfrac{1+2x}{3x^{2/3}(1-x)^2}$, odakle zaključujemo da funkcija f nije derivabilna u točkama $x = 0$ i $x = 1$. Rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$ dobivamo da je $x = -\dfrac{1}{2}$ stacionarna točka.

e) Prva derivacija f' je neprekidna na svakom od intervala $< -\infty, -\frac{1}{2} >$, $< -\frac{1}{2}, 0 >$, $< 0, 1 >$ i $< 1, \infty >$ i unutar njih nema nul točaka. Njeni predznaci prikazni su na *Slici 6.18.*



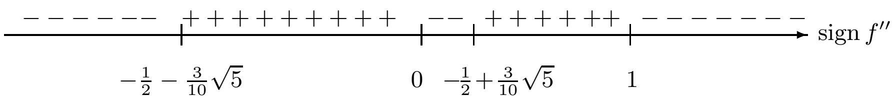
Slika 6.18. Predznaci prve derivacije f'

Dakle, funkcija f strogo pada na intervalu $< -\infty, -\frac{1}{2} >$ i strogo raste na intervalima $< -\frac{1}{2}, 0 >$, $< 0, 1 >$ i $< 1, \infty >$.

f) Budući da lijevo od stacionarne točke $x = -\frac{1}{2}$ funkcija f pada, a desno od $-\frac{1}{2}$ raste, funkcija f u točki $x = -\frac{1}{2}$ ima lokalni minumum $f(-\frac{1}{2}) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}} \approx -0.53$. Funkcija f nema drugih ekstrema.

Druga derivacija $f''(x) = \dfrac{2(5x^2 + 5x - 1)}{9x^{5/3}(1 - x)^3}$ nije definirana u točkama $x = 0$ i $x = 1$. Njene nul točke dobivamo rješavanjem kvadratne jednadžbe $5x^2 + 5x - 1 = 0$. Rješenja su $x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5} \approx -1.17$ i $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5} \approx 0.17$.

g) Da bi odredili intervale konveksnosti i konkavnosti moramo naći predznak druge derivacije na intervalima određenim točkama $x = 0$, $x = 1$ (f'' nije definirana) i $x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}$, $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}$ (nul točke od f'').



Slika 6.19. Predznaci druge derivacije f''

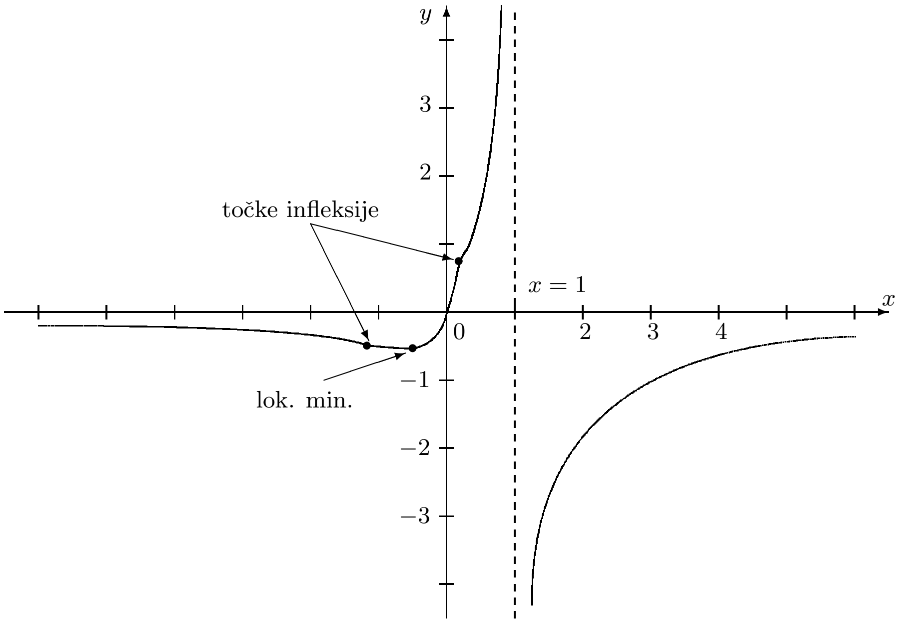
Na intervalima $\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}, 0\right)$ i $\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}, 1\right)$ funkcija f je konveksna, a na intervalima $\left(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)$ i $(1, \infty)$ je konkavna.

h) Točke infleksije funkcije f su: $x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}$, $x = 0$ i $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}$. Zašto $x = 1$ nije točka infleksije?

i) Funkcija f nije parna niti je neparna.

j) Funkcija f nije periodička.

Graf funkcije f prikazan je na *Slici 6.20.*



Slika 6.20. Graf funkcije $x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-x}$

Zadaci za vježbu 6.8

1. Odredite intervale monotonosti funkcije:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$	b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$	c) $f(x) = 8 + 12x - x^3$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$	e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$	f) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$
g) $f(x) = \sin(\cos x)$	h) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{e^x}$	i) $f(x) = \dfrac{\ln x - x}{x}$.

Rješenje:

a) strogo raste na $< 3, \infty >$ i strogo pada na $< -\infty, 3 >$, b) stogo pada na $< -3, 1 >$ i strogo raste na $< -\infty, -3 > \cup < 1, \infty >$, c) strogo pada na $< -2, 2 >$ i strogo raste na $< -\infty, -2 > \cup < 2, \infty >$, d) strogo pada na $< -\infty, -2 > \cup < -2, 2 > \cup < 2, \infty >$, e) strogo pada na $< -\infty, -1 > \cup < -1, 1 > \cup < 1, \infty >$, f) $f'(x) = -2\sin(4x)$. Raste na intervalima: $< \pi/8 + k\pi/2, 3\pi/8 + k\pi/2 >, k \in \mathbf{Z}$, i pada na intervalima: $< -\pi/8 + k\pi/2, \pi/8 + k\pi/2 >, k \in \mathbf{Z}$ g) $f'(x) = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$. Funkcija strogo raste na intervalima: $< \pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi >$, $k \in \mathbf{Z}$, i strogo pada na intervalima: $< -\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi >, k \in \mathbf{Z}$, h) Funkcija strogo raste na $< -\infty, 0 > \cup < 1, 4 >$ i strogo pada na $< 0, 1 > \cup < 4, \infty >$, i) Funkcija strogo raste na $< 0, e > \cup < 1, 4 >$ i strogo pada na $< e, \infty >$.

2. Psiholozi su pronašli da u prvih t sati učenja stranog jezika studenti prosječno usvoje

$w(t) = 10 + \dfrac{100t^2}{t^2+27}$, $1 \le t \le 8$, novih riječi. Pokažite da je w rastuća funkcija na intervalu $< 1, 8 >$. Odredite vremenski interval unutar koga brzina učenja raste.

Uputa: Brzina učenja mjeri se prvom derivacijom $w'(t) = \dfrac{5400\,t}{(t^2+27)^2}$. Pokažite da w' raste na intervalu $< 1, 3 >$ i pada na intervalu $< 3, 8 >$.

3. Koje su od navedenih tvrdnji istinite:

   (a) Ako je x_0 kritična točka funkcije f, onda je $f'(x_0) = 0$.

   (b) Ako je $f'(x_0) = 0$, onda je x_0 kritična točka funkcije f.

   (c) Ako je $f'(x_0) = 0$, onda funkcija f u točki x_0 ima lokalni ekstram.

   (d) Ako je funkcija f derivabilna na intervalu $< a, b >$ i u točki $x_0 \in < a, b >$ ima lokalni maksimum, onda je $f'(x_0) = 0$.

   (e) Ako funkcija f u točki $x_0 \in < a, b >$ ima lokalni minimumm, onda je ona derivabilna u točki x_0 i pri tome je $f'(x_0) = 0$.

   Rješenje: b) i d)

4. Odredit maksimalnu (M) i minimalnu (m) vrijednost funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2+1}$ na segmentu: a) $[-3, -2]$, b) $[-2, 0]$, c) $[0, 2]$, d) $[-2, 2]$.

   Rješenje: a) $M = \frac{7}{5}$, $m = \frac{13}{10}$ b) $M = \frac{3}{2}$, $m = 1$ c) $M = 1$, $m = \frac{1}{2}$ d) $M = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$.

5. Odredit maksimalnu (M) i minimalnu (m) vrijednost funkcije $f(x) = \sin x + \cos x$ na segmentu: a) $[0, \pi/2]$, b) $[-\pi/2, \pi/2]$, c) $[0, \pi]$, d) $[\pi/2, 2\pi]$.

   Rješenje: a) $M = \sqrt{2}$, $m = 1$ b) $M = \sqrt{2}$, $m = -1$ c) $M = \sqrt{2}$, $m = -1$ d) $M = 1$, $m = -\sqrt{2}$.

6. Odredite točke lokalnih ekstrema funkcije:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$

   d) $f(x) =\mid \cos x \mid$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+2}$ f) $f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3} + 3$

   Rješenje: a) Lokalni maksimum u stacionarnoj točki $x = 0$, b) Lokalni maksimum u stacionarnoj točki $x = -1$; lokalni minimum u stacionarnoj točki $x = 1$, c) Lokalni maksimum u stacionarnim točkama $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$; lokalni minimum u stacionarnim točkama $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, d) Lokalni maksimum u stacionarnim točkama $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$; lokalni minimum u stacionarnim točkama $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, e) Stacionarne točke: $x = -2$ i $x = 2$. Funkcija nema lokalnih ekstrema, f) Lokalni maksimum u stacionarnoj točki $x = 0$; lokalni minimum u stacionarnoj točki $x = 2$.

7. Zadana je funkcija $f(x) = x^3 + ax + 7$. Odredite parametar a tako da točka $x = 0$ bude stacionarna.

   Rješenje: $a = 0$.

8. Zadana je polinomijalna fumkcija: $f(x) = ax^2 + bx + 24$.

   (a) Odredite kvocijent $\frac{b}{a}$ tako da u točki $x = 2$ bude lokalni minimum,

   (b) Odredite a i b tako da u točki lokalnog minimuma $x = 2$ vrijednost funkcije bude $f(2) = 12$,

   (c) Da li postoje a i b takvi da funkcija f u točki $x = 2$ ima lokalni maksimum $f(2) = 12$?

   Rješenje: a) $\frac{b}{a} = -4$, b) $a = 3; b = -12$, c) Ne.

9. Prikažite broj 36 u obliku umnoška dvaju brojeva, kojima je zbroj kvadrata minimalan.

   Rješenje: $36 = x \cdot y$. Treba naći minimum funkcije $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + \dfrac{36^2}{x^2}$. Dobiva se $x = y = 6$.

10. U skupu svih uspravnih stožaca upisanih u kuglu polumjera r, odredite visinu onog s najvećim volumenom.

    Rješenje: $h = 4r/3$.

11. Od svih pravokutnih trokuta kojima jedna kateta leži na pozitivnom dijelu x-osi a druga na pozitivnom dijelu y-osi i kojima hipotenuza sadrži točku $(1, 1)$, odredite onaj čija je površina najmanja.

    Rješenje: Neka hipotenuza trokuta leži na pravcu $y = kx + l$, $k < 0$. Vrhovi tog trokuta su točke: $A = (-\frac{l}{k}, 0)$, $B = (0, l)$ i $C = (0, 0)$, a njegova površina je $P = -\dfrac{l^2}{2k}$. Budući da je $1 = k+l$ (zašto?), za površinu dobivamo: $P = P(k) = -\dfrac{(1-k)^2}{2k}$. Nije teško pokazati da je $\dfrac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k^2} - 1\right)$ i $\dfrac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\,k^2} = -\dfrac{1}{k^3} > 0$, odakle dobivamo da su $k = -1$ i $k = 1$ stacionarne točke funkcije P. Budući da mora biti $k < 0$, hipotenuza trokuta s najmanjom površinom $P(-1) = 2$ leži na pravcu $y = -x + 2$. Njegovi vrhovi su točke $A = (2, 0)$, $B = (0, 2)$ i $C = (0, 0)$.

12. Neka avio-kompanija na određenoj liniji godišnje prevozi 8 000 putnika uz cijenu karte od 500 NJ. Služba za marketing procjenjuje da se svakim povećanjem cijene karte za 1 NJ broj putnika smanji za 10. Odredite cijenu karte pri kojoj će prihod avio-kompanije biti maksimalan.

    Rješenje: Neka je p cijena jedne karte i n broj putnika. Treba pronaći maksimum funkcije $R = n \cdot p$. Budući da je $n = 8\ 000 - (p - 500)10 = 13\ 000 - 10\,p$, dobivamo $R = 13\ 000p - 10\,p^2$. Funkcija R ima lokalni maksimum u točki $p = 650$. Dakle, maksimalni profit javlja se pri cijeni karte $p = 650$ NJ.

13. Ukupni troškovi tiskanja x $(x > 150)$ knjiga iznose $C(x) = 1\ 000 + 71\,x$ NJ. Broj prodanih knjiga ovisi o prodajnoj cijeni p jedne knjige. Izdavač procjenjuje da će se po cijeni p, $p \geq 80$, prodati $[x]$ knjiga (najveće cijelo od x), gdje je $x = 500 + 300\left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Po kojoj cijeni (zaokruženoj na dva decimalna mjesta) treba prodavati knjigu da bi profit bio maksimalan?

Rješenje: Profit ostvaren prodajom x knjiga iznosi:

$$P(x) = x \cdot p(x) - C(x) = x \cdot \frac{800 - x}{3} - (1\,000 + 71\,x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{587}{3}\,x - 1000.$$

Pokažite da profit P strogo raste na intervalu $< 250, 293.5 >$ i strogo pada na intervalu $< 293.5, \infty >$, odakle zaključujemo da će biti maksimalan za $x = 293.5$, što odgovara prodajnoj cijeni $p = p(293.5) \approx 168.83\,\mathrm{NJ}$.

14. Ukupni troškovi proizvodnje x jedinica robe iznose $C(x)$, gdje je C derivabilna funkcija na intervalu $< 0, \infty >$. Prosječni ukupni troškovi proizvodnje x jedinica robe iznose $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. Dokažite: ako funkcija prosječnih troškova $\overline{C}$ ima minimum u točki $x_0 \in < 0, \infty >$, onda je $\overline{C}(x_0) = C'(x_0)$. Dakle, minimalni prosječni troškovi $\overline{C}(x_0)$ jednaki su marginalnim troškovima $C'(x_0)$.

    Uputa: Neka je x_0 točka lokalnog minimuma funkcije $\overline{C}$. Treba pokazati da je $\overline{C}(x_0) = C'(x_0)$. Iskoristite Fermatov teorem (nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema derivabilne funkcije).

15. Pokažite da se maksimalan profit javlja na proizvodnom nivou na kome je marginalni prihod jednak marginalnim troškovima.

    Uputa: $P(x) = R(x) - C(x)$, gdje su: $P(x)$ profit, $R(x)$ ukupni prihod i $C(x)$ ukupni troškovi pri proizvodnji x jedinica robe.

16. Odredite točke infleksije, intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije:

    a) $f(x) = (x+2)^{1/3}$ b) $f(x) = \sin^2 x$ c) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1-x}$.

    Rješenje: a) funkcija je konveksna na $< -\infty, -2 >$, konkavna na $< -2, \infty >$; $x = -2$ je točka infleksije. b) intervali konveksnosti: $\left\langle \frac{4k+3}{4}\,\pi, \frac{4k+5}{4}\,\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$, intervali konkavnosti: $\left\langle \frac{4k+1}{4}\,\pi, \frac{4k+3}{4}\,\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$; točke infleksije: $x = \frac{2k+1}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. c) intervali konveksnosti: $\left\langle \frac{-5-3\sqrt{5}}{10}, 0 \right\rangle$ i $\left\langle \frac{-5+3\sqrt{5}}{10}, 1 \right\rangle$, intervali konkavnosti: $\left\langle -\infty, \frac{-5-3\sqrt{5}}{10} \right\rangle$ i $\left\langle 0, \frac{-5+3\sqrt{5}}{10} \right\rangle$ i $< 1, \infty >$; točke infleksije: $x = \frac{-5-3\sqrt{5}}{10}$, $x = \frac{-5+3\sqrt{5}}{10}$ i $x = 0$.

17. Koji uvjet mora biti ispunjen da bi kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$,$a \neq 0$, bila a) konveksna na $\mathbb{R}$, b) konkavna na $\mathbb{R}$?

    Rješenje: a) $a > 0$, b) $a < 0$.

18. Koliko najviše točaka infleksije može imati polinom n-tog stupnja?

    Rješenje: Točke infleksije su lokalni ekstremi prve derivacije (polinoma stupnja $(n-1)$), a njih može biti najviše $n-2$ (Zašto?).

19. Primjenom L' Hospitalova pravila izračunajte limese:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$ e) $\lim\limits_{x\to\pi/2+}\dfrac{\operatorname{tg}(x/2)-1}{x-\pi/2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^2}{x-\sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-e^{-x}}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{\cos^2 x-1}$ l) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{(x-\pi)^2}$

m) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)+}\cos x\cdot\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ n) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^x)^{3/x}$ o) $\lim\limits_{x\to 0+} x^3e^{1/x}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ q) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$ r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

Rješenje: a) 0, b) 2, c) 1/2, d) 1/2, e) 1, f) $+\infty$, g) $+\infty$, h) 0, i) 0, j) 1/2, k) -1, l) 1 m) 0, n) e^3, o) $+\infty$, p) e^2, q) 1, r) $+\infty$.

20. Ispitati tijek i skicirati graf funkcija:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$ c) $f(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{x(x+6)^2}$ e) $f(x)=\sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$

g) $f(x)=(2x+3)e^{-2(x+1)}$ h) $f(x)=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$ i) $f(x)=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$

j) $f(x)=e^{\sin x+\cos x}$ k) $f(x)=e^{\sin x-\cos x}$ l) $f(x)=e^{-\sqrt{2}\cos x}$

7. INTEGRALNI RAČUN

Problem računanja površine ravninskih likova star je više od 4 000 godina. Egipćani (2 000 − 1 800 god.pr.n.e.) su poznavali pravila za računanje površine i volumena jednostavnijih objekata. Znali su točne formule za površinu pravokutnika, trokuta i trapeza. Površinu kruga radijusa r aproksimirali su izrazom $\left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$, tj. broj π aproksimirali su s brojem $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.16$. Znali su odrediti volumen kocke i valjka, a pretpostavlja se da su znali izračunati i volumen piramide s kvadratnom bazom. Ta pravila preuzeli su stari Grci i počevši od Talesa (585 god.pr.n.e.) Grci sistematski i logički izvode te formule. Od svih Grka, modernom konceptu traženja površine najviše se približio Arhimed (250 god.pr.n.e). U svojim radovima koristio je tzv. metodu ekshaustije („iscrpljivanja"): da bi odredio površinu nekog lika on ga prekriva skupom pravokutnika ili u lik upisuje pravokutnike, a površinu lika aproksimira zbrojem površina pravokutnika. Na toj ideji Riemann[1] je zasnovao pojam određenog integrala.

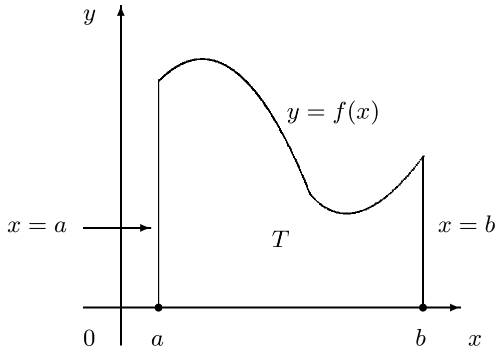
7.1 Problem površine i volumena.

Iz osnovne škole znamo kako izračunati površinu jednostavnijih likova, kao npr. pravokutnika, trokuta ili poligona.

Problem površine: Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna i omeđena na segmentu $[a, b]$, tj. neka postoje realni brojevi $m \geq 0$ i $M \geq 0$ takvi da je $m \leq f(x) \leq M$ za svaki $x \in [a, b]$. Označimo s T skup točaka ravnine koji je omeđen grafom funkcije f, pravcima $x = a$ i $x = b$ i x-osi (*Slika 7.1*). Uobičajeno je takav skup T nazivati **pseudotrapezom** ili **krivolinijskim trapezom**. Kako izračunati površinu pseudotrapeza T?

[1] G. F. B. Riemann, 1 826–1 866, njemački matematičar

Iz osnovne škole znamo da ako je T mnogokut treba ga rastaviti na pravokutnike, odnosno na trokute, da bi odredili njegovu površinu. To nismo u stanju učiniti sa skupom na *Slici 7.1*, jer graf funkcije f nije ravna crta. Kako onda definirati površinu[2] $A(T)$ skupa T?



Slika 7.1.

Neka je $I = [a, b]$ segment realnih brojeva. Konačan skup točaka $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ za koje je:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

nazivamo **subdivizijom** ili **particijom** segmenta I. **Dijametrom subdivizije** P nazivamo realan broj:

$$\delta(P) = \max\{\, |\, x_i - x_{i-1}\,| : \, i = 1, \dots, n\,\}.$$

Za subdiviziju P' kažemo da je **profinjenje** subdivizije P ako je $P \subseteq P'$.

Primjer 7.1 *Neka je* $I = [a, b]$ *segment i* $n \in \mathbb{N}$ *. Za subdiviziju* $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ *definiranu s:*

$$x_i = a + i \cdot h, \;\; h = \frac{b-a}{n}, \;\; i = 0, 1, \dots, n$$

kažemo da je **ekvidistantna**. *Zamijetite da je* $\delta(P_n) = h$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0.$

Da bi se definirala površina skupa T, prirodno se postupa na sljedeći način:

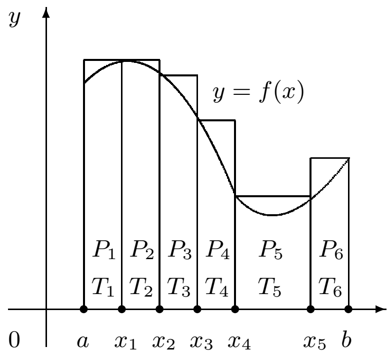
Neka je n prirodan broj i $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ particja segmenta $[a, b]$. Pravcima: $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2, \dots, x = x_{n-1}$, $x = x_n$ podijelimo pseudotrapez T na pseudotrapeze $T_1, \dots, T_n$, tako da je $[x_{i-1}, x_i]$ baza pseudotrapeza T_i. Budući da je

[2] engl *area=površina.*

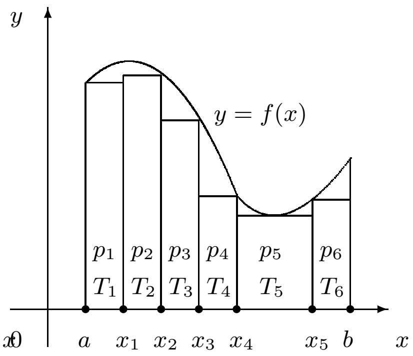
funkcija f omeđena na segmentu $[a, b]$, ona je omeđena i na $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pa na tom segmentu ima supremum M_i i infimum m_i (vidi t.1.5.2):

$$M_i = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Pravokutnik P_i visine M_i i duljine baze $x_i - x_{i-1}$ opisan je pseudotrapezu T_i, a pravokutnik p_i visine m_i i duljine baze $x_i - x_{i-1}$ je upisan u T_i. Na *Slikama 7.2.a* i 7.2.b prikazan je slučaj $n = 6$.



Slika 7.2.a.



Slika 7.2.b.

Zamijetite da je $p_i \subseteq T_i \subseteq P_i$, $i = 1, \ldots, n$. Stoga, ako pojam površine pseudotrapeza ima smisla, onda zbog monotonosti površine vrijedi:

$$A(p_i) \leq A(T_i) \leq A(P_i), \text{ tj.}$$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq A(T_i) \leq M_i(x_i - x_{i-1}). \tag{7.1}$$

Skupovi $P_o = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ i $P_u = p_1 \cup p_2 \cup \ldots \cup p_n$ su unije pravokutnika. Nadalje, skup P_o je opisan, a skup P_u je upisan pseudotrapezu T pa vrijedi:

$$P_u \subseteq T \subseteq P_o,$$

odakle zbog aditivnosti površine dobivamo:

$$A(P_u) \leq A(T) \leq A(P_o), \text{ tj.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq A(T) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Prema tome, površinu pseudotrapeza $A(T)$ možemo odozdo aproksimirati brojem $A(P_u)$, a odozgo brojem $A(P_o)$. Pri tome apsolutna greška te aproksimacije ne prelazi broj:

$$A(P_o) - A(P_u) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Iz gornjih razmatranja zaključujemo da o površini pseudotrapeza T ima smisla govoriti samo onda ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n i subdivizija $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ takva da je:

$$A(P_o) - A(P_u) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon,$$

tj. ako se graf funkcije f može prekriti sitnim pravokutnicima $[x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$, $i = 1, \ldots, n$, čija je ukupna površina manja od ε.

Problem volumena: Tijelo koje nastaje rotacijom oko x-osi pseudotrapeza T određenog grafom omeđene i nenegativne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pravcima $x = a$, $x = b$ i x-osi nazivamo **rotacionim tijelom** (*Slika 7.3*). Pri toj rotaciji svaka točka $(x, f(x))$ opisuje kružnicu radijusa $r = f(x)$. Prirodno se postavlja sljedeće pitanje:

Kada i kako definirati volumen V rotacionog tijela?

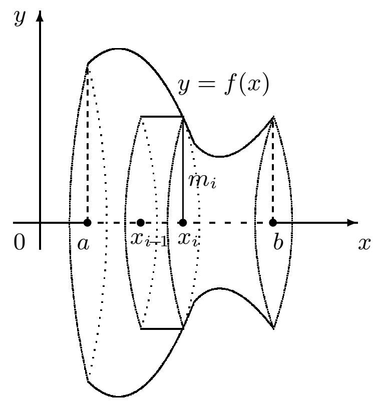
Postupimo slično kao kod problema površine:

Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ particija segmenta $[a, b]$. Budući da je funkcija f omeđena na segmentu $[a, b]$, ona je omeđena i na svakom podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, pa postoje realni brojevi:

$$M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Nadalje, zbog nenegativnosti funkcije f vrijedi:

$$M_i^2 = \sup \{f^2(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i^2 = \inf \{f^2(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$



Slika 7.3. Rotaciono tijelo

Paralelne ravnine: $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_{n-1}$, $x = x_n$ dijele rotaciono tijelo na n manjih rotacionih tijela. Svakom od njih ćemo upisati disk visine $(x_i - x_{i-1})$ i radijusa baze m_i i opisati disk visine $(x_i - x_{i-1})$ i radijusa baze M_i. (na *Slici 7.3* prikazan je i-ti upisani disk). Volumen tako dobivenog i-tog upisanog diska iznosi $\underline{V_i} = \pi m_i^2(x_i - x_{i-1})$, dok volumen i-tog opisanog diska iznosi $\overline{V}_i = \pi M_i^2(x_i - x_{i-1})$. Neka je $V_u = \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{V_i}$ zbroj volumena svih upisanih diskova, a $V_o = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{V}_i$ zbroj volumena svih opisanih diskova. Ako pojam volumena ima uopće smisla, onda većem skupu pripada veći volumen, tj. mora vrijediti:

$$V_u \leq V \leq V_o.$$

Ako volumen V aproksimiramo s V_u ili V_o, onda apsolutna greška te aproksimacije nije veća od $V_o - V_u$. Ako je ta apsolutna greška velika, onda se segment $[a, b]$ dijeli na manje podsegmente i postupa na prethodno opisani način.

Iz prethodnog razmatranja proizlazi da o volumenu rotacionog tijela ima smisla govoriti samo onda ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n i subdivizija $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ takva da je:

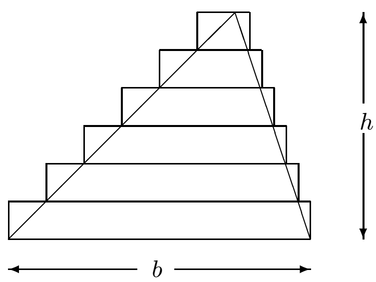
$$V_o - V_u = \pi \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon,$$

tj. ako razliku $V_o - V_u$ možemo učiniti proizvoljno malom.

Više o površini i volumenu bit će riječi u sljedećoj točki.

Zadaci za vježbu 7.1

1. Trokut s osnovicom duljine b, visinom duljine h i površinom $A = \frac{1}{2}bh$ prekriven je s n pravokutnika visine $\frac{h}{n}$.



a) Pokažite, ako površinu trokuta aproksimiramo s površinom pravokutnika, dobivamo:

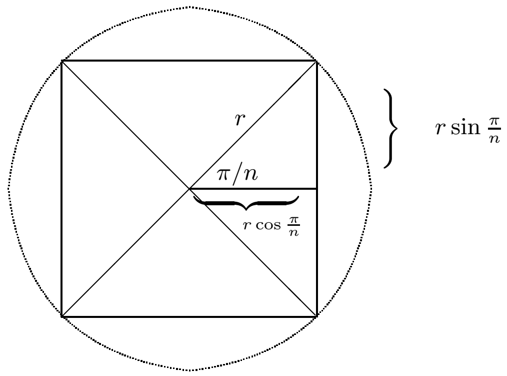
$$A \approx \frac{bh}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n).$$

b) Pomoću formule za zbroj prvih n prirodnih brojeva pokažite da je $A \approx \frac{1}{2}bh + \frac{bh}{2n}$.

c) Pokažite da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}bh + \frac{bh}{2n}\right) = \frac{1}{2}bh = A$.

Uputa: Površina od vrha k-tog pravokutnika iznosi $A_k = \frac{h}{n} \cdot \frac{kb}{n}$.

2. U krug radijusa r upisan je pravilni n-terokut. Spojnice vrhova sa središtem kružnice dijele n-terokut na n sukladnih trokuta. Na slici je prikazan slučaj $n = 4$.



a) Pokažite da svaki tako dobiveni trokut ima površinu $\frac{r^2}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

b) Neka je A površina kruga. Dokažite aproksimacionu formulu:

$$A \approx \frac{nr^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

tako da površinu kruga aproksimirate s površinom n-terokuta.

c) Pokažite da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{nr^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] = r^2\pi$. Uputa: Uvedite supstituciju $x = \frac{2\pi}{n}$.

3. Neka su a i b duljine osnovica trapeza, h duljina visine i $m = \frac{1}{2}(a+b)$ duljina srednjice. Postupite slično kao u prethodnim zadacima i pokažite da je površina trapeza zadana formulom:

$$A = \frac{1}{2}(a+b)h = mh.$$

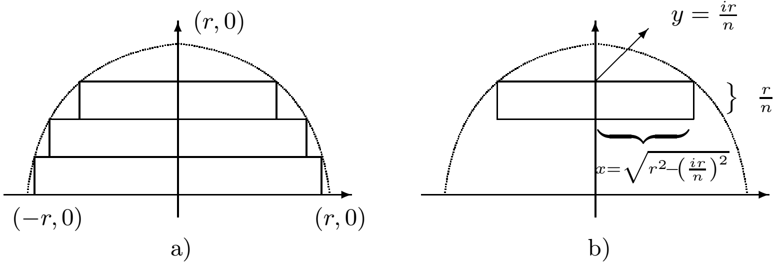
4. Lik je omeđen grafom funkcije $y = 4 - x^2$ i x-osi. Pokažite da njegova površina iznosi $\frac{16}{3}$.

Uputa: Zbog simetrije lika s obzirom na y-os, dovoljno je izračunati površinu onog dijela lika koji se nalazi nad segmentom $[0, 2]$. To možete učiniti tako da taj dio lika prekrijte s n pravokutnika iste duljine osnovice $\frac{2}{n}$, zatim površinu tog dijela lika aproksimirat s površinom A_n tih pravokutnika i nađete limes $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

5. Aproksimirajte površinu lika omeđenog segmentom $[-2, 0]$ i grafom funkcije $y = x^3$, tako da u njega upisujete pravokutnike.

   Rješenje: ≈ 4.

6. U polukuglu radijusa r upisano je n diskova visine $\frac{r}{n}$. Slike prikazuju poprečni presjek.



a) Pokažite da volumen i-tog diska (vidi sliku b)) iznosi $V_i = \pi\frac{r}{n}\, x^2 = \pi\frac{r}{n}\left[r^2 - \left(\frac{ir}{n}\right)^2\right]$

b) Neka je V volumen kugle. Pokažite, ako se volumen polukugle aproksimira s volumenom diskova dobiva se aproksimaciona formula:

$$V \approx 2r^3\pi\left[1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right],$$

koja u limesu daje volumen kugle $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

7.2 Određeni integral

Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ omeđena na segmentu $I = [a, b]$, tj. neka postoje realni brojevi M i m (vidi *Sliku 7.4*) takvi da je:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{za svaki } x \in [a, b]$$

i neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bilo koja subdivizija segmenta I. Tada za svaki $i = 1, 2, \dots, n$ postoje brojevi (vidi t.1.5.2):

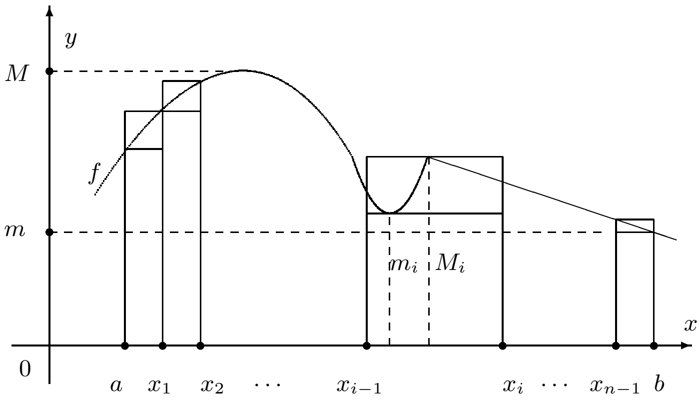
$$M_i = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

i pri tome je:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M.$$

Na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, odaberimo bilo koju točku ξ_i. Prema definiciji supremuma M_i i infimuma m_i je $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ pa iz prethodnih nejednakosti dobivamo:

$$m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M. \tag{7.2}$$



Slika 7.4.

Određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ bit će definiran pomoću sljedećih suma funkcije f vezanih uz subdiviziju P :

1. **donja Darbouxova suma** $s(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$,
2. **gornja Darbouxova suma** $S(f, P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$,

3. **integralna suma** $\sigma(f,P,\{\xi_1,\ldots,\xi_n\})=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

Množenjem nejednakosti (7.2) s (x_i-x_{i-1}) i sumiranjem po i od 1 do n dobivamo:

$$m(b-a)\le s(f,P)\le \sigma(f,P,\{\xi_1,\ldots,\xi_n\})\le S(f,P)\le M(b-a) \tag{7.3}$$

Primjedba 7.1 *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nenegativna i omeđena funkcija, a T pseudotrapez omeđen grafom funkcije f, x-osi i pravcima $x=a$ i $x=b$ (Slika 7.4). Tada donja Darbouxova suma predstavlja ukupnu površinu pravokutnika upisanih pseudotrapezu T. Slično, gornja Darbouxova suma predstavlja ukupnu površinu pravokutnika opisanih pseudotrapezu.*

Primjer 7.2 *Neka je funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definirana formulom $f(x)=x$. Za svaki prirodan broj n definirajmo ekvidistantnu subdiviziju $P_n=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ segmenta $[a,b]$:*

$$x_i=a+ih,\ \ h=\frac{b-a}{n},\ \ i=0,1,\ldots,n.$$

Funkcija f je neprekidna i strogo rastuća na segmentu $[a,b]$ pa je:

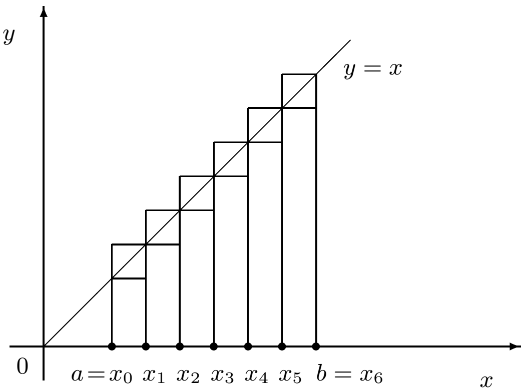
$$\begin{aligned} m_i&=\inf\{f(x)\,:\,x\in[x_{i-1},x_i]\}=f(x_{i-1})=x_{i-1},\\ M_i&=\sup\{f(x)\,:\,x\in[x_{i-1},x_i]\}=f(x_i)=x_i,\\ &\qquad i=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Odgovarajuće Darbouxove sume glase:

$$\begin{aligned} s(f,P_n)&=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}h=\sum_{i=1}^{n}[a+(i-1)h]\,h=\sum_{i=1}^{n}\left[ah+(i-1)h^2\right]\\ &= ahn+\frac12(n-1)nh^2=a(b-a)+\frac12(n-1)(b-a)h=(b-a)(a+\frac12 nh)\\ &\quad -\frac12(b-a)h=(b-a)(a+\frac{b-a}{2})-\frac{(b-a)^2}{2n}=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}-\frac{(b-a)^2}{2n},\\ S(f,P_n)&=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} x_ih=\sum_{i=1}^{n}(a+ih)h=\sum_{i=1}^{n}\left(ah+ih^2\right)\\ &= ahn+\frac12(n+1)nh^2=a(b-a)+\frac12(n+1)(b-a)h=(b-a)(a+\frac12 nh)\\ &\quad +\frac12(b-a)h=(b-a)(a+\frac{b-a}{2})+\frac{(b-a)^2}{2n}=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{2n}.\end{aligned}$$

U računu treba iskoristiti formulu za zbroj prvih k prirodnih brojeva (vidi Primjer 1.1): $\sum\limits_{i=1}^{k} i=\dfrac{k(k+1)}{2}$ i to za $k=n-1$ i $k=n$.

Na Slici 7.5 prikazani su graf funkcije f i odgovarajući upisani i opisani pravokutnici za ekvidistantnu particiju P_6.



Slika 7.5.

Zamijetite da je $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, *što je upravo površina trapeza omeđenog grafom funkcije* f, *segmentom* $[a,b]$ *i pravcima* $x = a$ *i* $x = b$. *Taj smo rezultat mogli i očekivat. Naime, što je dijametar subdivizije* $\delta(P_n)$ *manji to se Darbouxove sume* $s(f,P_n)$ *i* $S(f,P_n)$ *sve manje razlikuju od površine trapeza.*

Ako pomoću točaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots,n$, *napravimo odgovarajuću integralnu sumu* $\sigma(f, P_n, \{\xi_1,\dots,\xi_n\})$, *onda iz (7.3) dobivamo:*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \{\xi_1,\dots,\xi_n\}) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih subdivizija segmenta $[a,b]$. Nejednakost (7.3) vrijedi za svaku subdiviziju P i govori nam da je skup $\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$ omeđen odozgo, a skup $\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$ omeđen odozdo. Tada postoje brojevi (vidi t.1.5.2):

$$I_\star(f,[a,b]) = \sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}\}$$

$$I^\star(f,[a,b]) = \inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Broj $I_\star(f,[a,b])$ *nazivamo* **donjim Riemannovim integralom**, *a broj* $I^\star(f,[a,b])$ **gornjim Riemannovim integralom** *funkcije* f *na segmentu* $[a,b]$.

Iz (7.3) dobivamo da za svaku subdiviziju $P \in \mathcal{P}$ vrijedi:

$$m(b-a) \le s(f,P) \le I_\star(f,[a,b]) \quad \text{i} \quad I^\star(f,[a,b]) \le S(f,P) \le M(b-a) \tag{7.4}$$

Pokazat ćemo da je $I_\star(f,[a,b]) \le I^\star(f,[a,b])$. Prvo dokažimo sljedeća dva osnovna svojstva Darbouxovih suma:

Dva osnovna svojstva Darbouxovih suma:

a) Za bilo koje dvije subdivizije P i P' segmenta $[a,b]$ takve da je $P \subseteq P'$ vrijedi:

$$s(f,P) \leq s(f,P') \ \text{ i } \ S(f,P) \geq S(f,P'),$$

tj. ako neku subdiviziju profinimo s konačno mnogo točaka onda se gornja Darbouxova suma neće povećati, a donja Darbouxova suma se neće smanjiti.

b) Za bilo koje dvije subdivizije P_1 i P_2 segmenta $[a,b]$ vrijedi:

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2),$$

tj. bilo koja donja Darbouxova suma nije veća od bilo koje gornje Darbouxove sume.

Dokaz.

a) Neka su P i P' bilo koje dvije subdivizije segmenta $[a,b]$, takve da je $P \subset P'$. Zamijetite da je tvrdnju dovoljno dokazati za slučaj kada je $P' \backslash P$ jednočlani skup. Neka je nadalje $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, i $P' \backslash P = \{x'\}$. Tada postoji $i \in \{1,\ldots,n\}$ takav da je $x_{i-1} < x' < x_i$. Suma $S(f,P')$ nastaje iz sume $S(f,P)$ tako da se sumand $M_i(x_i - x_{i-1})$ zamijeni s $M_k'(x' - x_{i-1}) + M_k''(x_i - x')$, gdje je M_i' supremum funkcije f na $[x_{i-1}, x']$, a M_i'' supremum funkcije f na $[x', x_i]$. Budući da je $M_i' \leq M_i$ i $M_i'' \leq M_i$ dobivamo:

$$M_i'(x' - x_{i-1}) + M_i''(x_i - x') \leq M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Iz posljednje nejednakosti slijedi da je $S(f,P') \leq S(f,P)$. Slično se pokaže da je $s(f,P') \geq s(f,P)$.

b) Neka su P_1 i P_2 bilo koje dvije subdivizije segmenta $[a,b]$. Označimo s P subdiviziju $P_1 \cup P_2$. Prema tvrdnji a) je $s(f,P_1) \leq s(f,P)$ i $S(f,P) \leq S(f,P_2)$. Budući da je $s(f,P) \leq S(f,P)$, dobivamo $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$.

Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena na segmentu $[a,b]$, onda je

$$I_\star(f,[a,b]) \leq I^\star(f,[a,b]).$$

Dokaz. Neka su P_1 i P_2 bilo koje dvije subdivizije segmenta $[a,b]$. Prema svojstvu b) Darbouxovih suma je $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$, odakle zaključujemo da je $S(f,P_2)$ gornja međa skupa $\{s(f, P_1) : P_1 \in \mathcal{P}\}$. Prema tome , za svaki $P_2 \in \mathcal{P}$ vrijedi $I_\star(f, [a, b]) \leq S(f, P_2)$. Iz posljednje nejednakosti dobivamo da je $I_\star(f, [a, b])$ donja međa skupa $\{S(f, P_2) : P_2 \in \mathcal{P}\}$ pa je $I_\star(f, [a, b]) \leq I^\star(f, [a, b])$.

Iz (7.4) i prethodne tvrdnje dobivamo:

$$m(b - a) \leq s(f, P) \leq I_\star(f, [a, b]) \leq I^\star(f, [a, b]) \leq S(f, P) \leq M(b - a). \tag{7.5}$$

Neka je $[a, b]$ segment realnih brojeva i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija na $[a, b]$. Ako je $I_\star(f, [a, b]) = I^\star(f, [a, b])$, onda za funkciju f kažemo da je **integrabilna u Riemannovom smislu** ili kraće **integrabilna** na segmentu $[a, b]$, a realan broj:

$$I(f, [a, b]) = I_\star(f, [a, b]) = I^\star(f, [a, b]).$$

nazivamo **određenim integralom** funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označavamo s:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pri tome kažemo da je f **podintegralna funkcija**, segment $[a, b]$ **područje integracije** i x varijabla po kojoj se integrira. Često se kaže da je točka a **donja granica**, a točka b **gornja granica integracije**.

Po definiciji uzimamo da je $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Primjedba 7.2 *Određeni integral* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *je broj koji ne ovisi o varijabli* x *i stoga integracionu varijablu možemo označiti bilo kojim simbolom. Tako npr. možemo pisati:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Uočite razliku između određenog i neodređenog integrala: određeni integral je realan broj, a neodređeni integral je skup funkcija.

Znak integrala ($\int$ *)dolazi od izduženog slova S, prvog slova znaka sume (* $\sum$ *).*

Određeni integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ možemo aproksimirati donjom $s(f,P)$ ili gornjom $S(f,P)$ Darbouxovom sumom. Prema (7.5) je:

$$s(f,P) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f,P),$$

odakle možemo zaključiti da apsolutna greška te aproksimacije nije veća od broja $S(f,P)-s(f,P)$. Slično, aproksimiramo li određeni integral nekom integralnom sumom $\sigma(f,P,\{\xi_1,\ldots,\xi_n\})$, onda apsolutna greška aproksimacije neće biti veća od $S(f,P)-s(f,P)$ jer je $s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}) \leq S(f,P)$. Sljedeća tvrdnja govori nam da se ta aproksimacija može učiniti dovoljno točno. Osim toga, tu tvrdnju koristit ćemo u dokazu drugih tvrdnji.

> Omeđena funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je integrabilna na segmentu $[a,b]$ onda i samo onda ako za svaki realan broj $\varepsilon>0$ postoji subdivizija P segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$.

Dokaz. Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon>0$ postoji subdivizija P takva da je $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$. Prema (7.5) je $s(f,P)\leq I_\star(f,[a,b])$ i $I^\star(f,[a,b])\leq S(f,P)$, zbog čega je:

$$I^\star(f,[a,b])-I_\star(f,[a,b]) \leq S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon>0$ je $I^\star(f,[a,b])-I_\star(f,[a,b])\leq 0$. Budući da je $I_\star(f,[a,b])\leq I^\star(f,[a,b])$, to je $I_\star(f,[a,b])=I^\star(f,[a,b])$.

Obratno, neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ i $\varepsilon>0$ bilo koji realan broj. Budući da je po definiciji:

$$I_\star(f,[a,b])=\sup\{s(f,P)\,:\,P\in\mathcal{P}\},\quad I^\star(f,[a,b])=\inf\{S(f,P)\,:\,P\in\mathcal{P}\},$$

postoje subdivizije P_1 i P_2 segmenta $[a,b]$ takve da je (vidi definiciju supremuma i infimuma u t.1.5.2):

$$I_\star(f,[a,b])-\varepsilon/2<s(f,P_1)\ \text{ i }\ S(f,P_2)<I^\star(f,[a,b])+\varepsilon/2. \tag{7.6}$$

Neka je $P=P_1\cup P_2$. Prema svojstvu a) Darbouxovih suma je:

$$s(f,P_1)\leq s(f,P),\quad S(f,P)\leq S(f,P_2).$$

Sada iz (7.6) dobivamo:

$$I_\star(f,[a,b])-\varepsilon/2<s(f,P_1)\leq s(f,P)\quad \text{i}\quad S(f,P)\leq S(f,P_2)<I^\star(f,[a,b])+\varepsilon/2,$$

odakle je:

$$S(f,P)-s(f,P)<[I^\star(f,[a,b])+\varepsilon/2]-[I_\star(f,[a,b])-\varepsilon/2]=I^\star(f,[a,b])-I_\star(f,[a,b])+\varepsilon.$$

Funkcija f je integrabilna pa je $I_\star(f,[a,b]) = I^\star(f,[a,b])$ i $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Površinu pseudotrapeza i volumen rotacionog tijela definiramo pomoću određenog integrala.

Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena i nenegativna na segmentu $[a,b]$, a T pseudotrapez omeđen grafom funkcije f, x-osi i pravcima $x = a$ i $x = b$. U prethodnoj točki zaključili smo da o površini pseudotrapeza T ima smisla govoriti samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija P segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$, tj. ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$. Kažemo da pseudotrapez ima **površinu** jedino u slučaju kada je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$. U tom slučaju **površinom** $A(T)$ pseudotrapeza T nazivamo broj:

Površina pseudotrapeza:

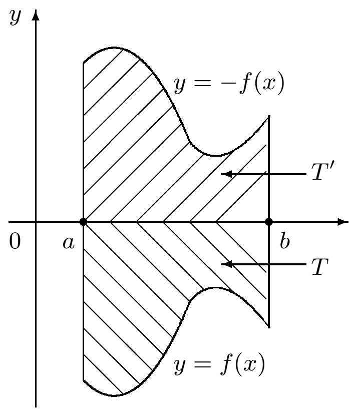
$$\boxed{A(T) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

U prethodnoj točki vidjeli smo da o volumenu rotacionog tijela ima smisla govoriti samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija P segmenta $[a,b]$ takva da je $V_o - V_u < \varepsilon$. Budući da je $V_o = S(\pi f^2, P)$ (gornja Darbouxova suma funkcije πf^2) i $V_u = s(\pi f^2, P)$ (donja Darbouxova suma funkcije πf^2), to znači da o volumenu ima smisla govoriti samo onda ako je funkcija f^2 integrabilna na segmentu $[a,b]$. U tom slučaju **volumenom** V nazivamo broj:

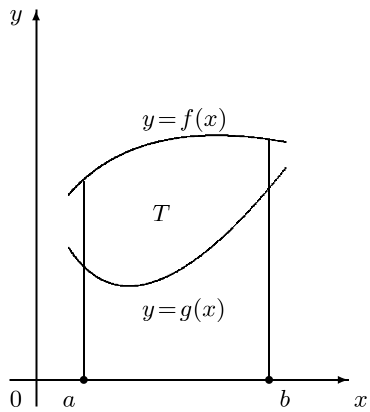
Volumen rotacionog tijela:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Primjedba 7.3 *Površina općenitijeg skupa od pseudotrapeza svodi se na površinu trapeza. Tako je npr. površina $A(T)$ skupa T prikazanog na* Slici 7.6.a *jednaka površini $A(T')$ skupa T', tj.* $A(T) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Slika 7.6.a.



Slika 7.6.b.

Zamijetite da površina $A(T)$ skupa T prikazanog na Slici 7.6.b *iznosi*

$$A(T) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Riemannov teorem:

> Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b]$, onda je ona i integrabilna na $[a,b]$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Treba pokazati da postoji subdivizija P segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Svaka neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ je i uniformno neprekidna na $[a,b]$ (vidi t.5.2) pa postoji $\delta > 0$ takav da je $|\ f(x) - f(y)\ | < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ za sve $x, y \in [a,b]$ za koje je $|\ x - y\ | < \delta$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bilo koja subdivizija segmenta $[a,b]$ čiji je dijametar $\delta(P)$ manji od δ. Budući da neprekidna funkcija preslikava segment na segment (Bolzano-Weierstrassovov teorem o neprekidnim funkcijama), postoje točke $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, takve da je $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ za svaki $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Pri tome je:

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x') \quad \text{i} \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x'').$$

Zamijetite da je $M_i - m_i = |\ f(x'') - f(x')\ |$. Kako je $|\ x'' - x'\ | \leq \delta(P) < \delta$, zbog uniformne neprekidnost funkcije f je $M_i - m_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Sada je:

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Teorem srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije:

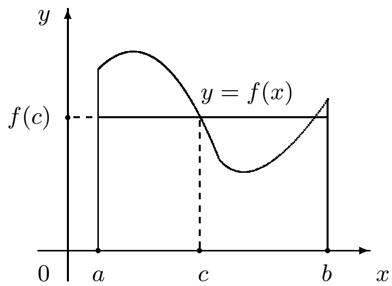
> Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b]$. Tada postoji točka $c \in [a,b]$ takva da je:
>
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Dokaz. Funkcija f je neprekidna pa i integrabilna na segmentu $[a,b]$. Iz (7.5) dobivamo:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a),$$

odakle zaključujemo da postoji realan broj $\nu \in [m,M]$ takav da je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \nu(b-a)$. Budući da neprekidna funkcija preslikava segment na segment (Bolzano-Weierstrassov teorem), postoji točka $c \in [a,b]$ takva da je $\nu = f(c)$.

Primjedba 7.4 *Geometrijsko značenje teorema srednje vrijednosti za integral neprekidne funkcije sastoji se u tome da je moguće pronaći takav broj $c \in [a,b]$ da površina pseudotrapeza ispod grafa funkcije bude jednaka površini pravokutnika s bazom $(b-a)$ i visinom $f(c)$.*



Slika 7.7.

Iz tog razloga za broj $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *kažemo da je* **srednja vrijednost** *funkcije f na segmentu $[a,b]$.*

Darbouxov teorem:

> Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija i (P_n) bilo koji niz subdivizija segmenta $[a, b]$ sa svojstvom da $\delta(P_n) \to 0$ kada $n \to \infty$. Tada su nizovi Darbouxovih suma $(S(f, P_n))$ i $(s(f, P_n))$ konvergentni i pri tome vrijedi:
>
> $$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = I^\star(f, [a, b]), \qquad \lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = I_\star(f, [a, b]).$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati samo za gornje Darbouxove sume. Na sličan način može se pokazati tvrdnja za donje Darbouxove sume.

Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Treba pokazati da postoji prirodan broj n_0 takav da je $\mid S(f, P_n) - I^\star(f, [a, b]) \mid= S(f, P_n) - I^\star(f, [a, b]) < \varepsilon$ za svaki $n > n_0$.

Gornji Riemannov integral je infimum svih gornjih Darbouxovih suma pa postoji subdivizija $\overline{P} = \{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$ segmenta $[a, b]$ takva da je:

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = b \quad \text{i} \quad S(\overline{P}) < I^\star(f, [a, b]) + \varepsilon/2.$$

Odaberimo $\delta > 0$ tako da je $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4(k-1)M}$, gdje je $M = \sup\{\mid f(x) \mid : x \in [a, b]\}$. Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$, postoji prirodan broj n_0 takav da je $\delta(P_n) < \delta$ za svaki $n > n_0$.

Neka je $n>n_0$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $P_n=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Ako interval $< x_{i-1}, x_i >$ sadrži točke $y_{i_1} < y_{i_2} < \ldots < y_{i_l}$ iz $\overline{P}$, onda u sumi $S(f, P_n)$ sumandu:

$$M_i(x_i - x_{i-1}) \tag{7.7}$$

u sumi $S(\overline{P} \cup P_n)$ odgovara broj:

$$M(x_{i-1}, y_{i_1})(y_{i_1} - x_{i-1}) + M(y_{i_1}, y_{i_2})(y_{i_2} - y_{i_1}) + \cdots + M(y_{i_l}, x_i)(x_i - y_{i_l}), \tag{7.8}$$

gdje su $M(\cdot, \cdot)$ supremumi funkcije f na odgovarajućim segmentima. Ocijenimo apsolutnu vrijednost razlike brojeva (7.8) i (7.7):

$$\begin{aligned}
&\mid M(x_{i-1}, y_{i_1})(y_{i_1} - x_{i-1}) + \cdots + M(y_{i_l}, x_i)(x_i - y_{i_l}) - M_i(x_i - x_{i-1}) \mid\leq \\
&\quad \mid M(x_{i-1}, y_{i_1}) \mid (y_{i_1} - x_{i-1}) + \cdots + \mid M(y_{i_l}, x_i) \mid (x_i - y_{i_l}) + \mid M_i \mid (x_i - x_{i-1}) \leq \\
&\quad M\,[(y_{i_1} - x_{i-1}) + (y_{i_2} - y_{i_1}) + \cdots + (x_i - y_{i_l})] + M(x_i - x_{i-1}) = 2M(x_i - x_{i-1}) \leq \\
&\quad 2M\delta(P_n) < 2M\delta.
\end{aligned}$$

Broj točaka u $\overline{P}$ je $k+1$ pa se takva mogućnost može pojaviti najviše $k-1$ puta. Prema tome je:

$$\mid S(\overline{P} \cup P_n) - S(f, P_n) \mid< (k-1) \cdot 2M\delta < \varepsilon/2.$$

Iz gornje nejednakosti dobivamo $S(f, P_n) < S(\overline{P} \cup P_n) + \varepsilon/2$. Subdivizija $\overline{P} \cup P_n$ je profinjenje subdivizije P_n pa je $S(\overline{P} \cup P_n) \leq S(\overline{P}) < I^\star(f, [a, b]) + \varepsilon/2$. Dakle,

$$S(f, P_n) < S(\overline{P} \cup P_n) + \varepsilon/2 < [\, I^\star(f, [a, b]) + \varepsilon/2\,] + \varepsilon/2 = I^\star(f, [a, b]) + \varepsilon,$$

odakle je $S(f, P_n) - I^\star(f, [a, b]) < \varepsilon$.

Primjedba 7.5 *Ako je funkcija f omeđena i integrabilna na segmentu $[a, b]$, onda je:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I^\star(f, [a, b]) = I_\star(f, [a, b]).$$

Prema Darbouxovom teoremu, za bilo koji niz (P_n) subdivizija segmenta $[a, b]$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$, vrijedi:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n).$$

Primjer 7.3 *Za funkciju f i niz subdivizija (P_n) iz* Primjera 7.2 *vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Prema tome je:

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

7.2.1 Svojstva određenog integrala

Iz srednje škole poznata su nam sljedeća pravila za konačne sume:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} c = nc$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{j} a_i + \sum\limits_{i=j+1}^{n} a_i \;\; (1 \leq j \leq n)$

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} ca_i = c \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

(5) $a_i \leq b_i \;\; (i = 1, \ldots, n) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

(6) $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mid a_i \mid .$

Određeni integral ima analogna svojstva:

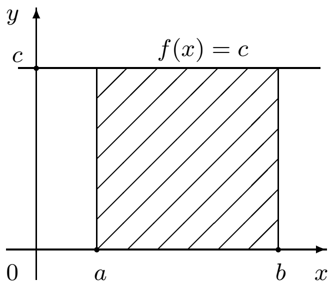
(1) Konstantna funkcija $x \mapsto c$ je integrabilna na svakom segmentu $[a, b]$ i pri tome je $\int\limits_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a)$ (vidi *Sliku 7.8.a*),

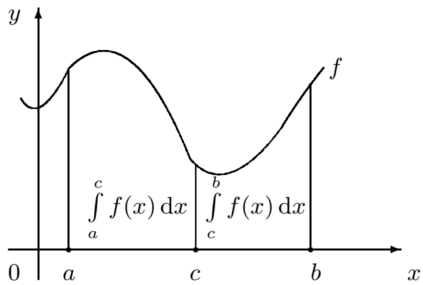
(2a) Ako je $c \in [a,b]$ i $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na $[a,b]$, onda je f integrabilna i na $[a,c]$ i na $[c,b]$. Pri tome je (vidi *Sliku 7.8.b*):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.9}$$

(2b) Ako je $c \in [a,b]$ i f integrabilna funkcija i na $[a,c]$ i na $[c,b]$, onda je f integrabilna na $[a,b]$ i vrijedi:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.10}$$





Slika 7.8.a. $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$ *Slika 7.8.b.* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(3) Ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ i c bilo koja konstanta, onda je funkcija $c \cdot f$ integrabilna na $[a,b]$ i vrijedi:

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.11}$$

(4) Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$, onda je i funkcija $f+g$ integrabilna na $[a,b]$ i vrijedi:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.12}$$

(5) Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$ i $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in [a,b]$, onda je:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.13}$$

(6) Ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$, onda je i funkcija $|\, f \,|$ integrabilna na $[a,b]$ i vrijedi:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |\, f(x) \,|\;\mathrm{d}x. \tag{7.14}$$

Dokaz.

(1) Ako je c konstantna funkcija, onda je $s(c,P) = S(c,P) = c(b-a)$ za bilo koju subdiviziju P segmenta $[a,b]$.

(2a) Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Funkcija f je integrabilna na segmentu $[a,b]$ pa postoji subdivizija P' segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P') - s(f,P') < \varepsilon$. Neka je $P = P' \cup \{c\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i $c = x_k$. Budući da P profinjuje P' to je $S(f,P) \leq S(f,P')$ i $s(f,P) \geq s(f,P')$. Dakle,

$$S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,P') - s(f,P') < \varepsilon.$$

Zamijetite da je $P_1 = (P \cap [a,c])$ subdivizija segmenta $[a,c]$, a $P_2 = (P \cap [c,b])$ subdivizija segmenta $[c,b]$. Neka je $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ i $P_2 = \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Sada je:

$$\begin{aligned}
S(f,P_1) - s(f,P_1) &= \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon, \\
S(f,P_2) - s(f,P_2) &= \sum_{i=k+1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je funkcija f integrabilna na segmentima $[a,c]$ i $[c,b]$. Neka je (P_n) bilo koji niz subdivizija segmenta $[a,b]$ sa svojstvom $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0$. Tada je $P_n' = P_n \cap [a,c]$ subdivizija segmenta $[a,c]$, a $P_n'' = P_n \cap [c,b]$ subdivizija od $[c,b]$. Osim toga je $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(P_n') = \lim\limits_{n\to\infty} \delta(P_n'') = 0$. Primjenom Darbouxova teorema dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \left(S(f,P_n') + S(f,P_n'') \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} S(f,P_n') + \lim_{n\to\infty} S(f,P_n'') \\
&= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(2b) Da bi pokazali da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ dovoljno je pokazati da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija P segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Funkcija f je integrabilna na segmentima $[a,c]$ i $[c,b]$ pa postoje subdivizije P' (segmenta $[a,c]$) i P'' (segmenta $[c,b]$) takve da je:

$$S(f,P') - s(f,P') < \varepsilon/2 \quad \text{i} \quad S(f,P'') - s(f,P'') < \varepsilon/2.$$

Tada za subdiviziju $P = P' \cup P''$ segmenta $[a,b]$ vrijedi:

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) = & \ (\,S(f,P') + S(f,P'')\,) - (\,s(f,P') + s(f,P'')\,) \\ = & \ (\,S(f,P') - s(f,P')\,) + (\,S(f,P'') - s(f,P'')\,) < \varepsilon, \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je f integrabilna na $[a,b]$. Formula (7.10) dokazana je pod (2a).

(3) Za $c = 0$ tvrdnja se svodi na tvrdnju (1). Neka je $c \neq 0$. Funkcija f je integrabilna na segmentu $[a,b]$ pa postoji subdivizija P segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon / \mid c \mid$.

Neka je prvo $c > 0$. Tada je $S(c \cdot f, P) = cS(f,P)$ i $s(c \cdot f, P) = cs(f,P)$, odakle dobivamo:

$$S(c \cdot f, P) - s(c \cdot f, P) = cS(f,P) - cs(f,P) = c(\,S(f,P) - s(f,p)\,) \leq c \cdot \varepsilon / c = \varepsilon.$$

Ako je $c < 0$, onda je $S(c \cdot f, P) = -cs(f,P)$ i $s(c \cdot f, P) = -cS(f,P)$. Prema tome je:

$$S(c \cdot f, P) - s(c \cdot f, P) = -cs(f,P) + cS(f,P) \leq \varepsilon.$$

Dokažite formulu (7.11) pomoću Darbouxova teorema.

(4) Pokažimo da je funkcija $f+g$ integrbilna na segmentu $[a,b]$. Neka je $\varepsilon > 0$. Dovoljno je pokazati da postoji subdivizija P segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f+g,P) - s(f+g,P) < \varepsilon$.

Funkcije f i g su integrabilne na $[a,b]$ pa postoje subdivizuje P_1 i P_2 segmenta $[a,b]$ takve da je: $S(f,P_1) - s(f,P_1) < \varepsilon/2$ i $S(g,P_2) - s(g,P_2) < \varepsilon/2$. Neka je $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Budući da subdivizija P profinjuje P_1 i P_2, vrijedi:

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon/2 \quad \text{i} \quad S(g,P) - s(g,P) < \varepsilon/2.$$

Neka je:

$$\begin{aligned} & m_i(f) = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}, && m_i(g) = \inf\{g(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ & M_i(f) = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}, && M_i(g) = \sup\{g(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ & m_i(f+g) = \inf\{f(x)+g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, && M_i(f+g) = \sup\{f(x)+g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Budući da je $m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f+g)$ i $M_i(f+g,P) \leq M_i(f) + M_i(g)$ (dokažite!) dobivamo:

$$s(f,P) + s(g,P) \leq s(f+g,P), \;\; S(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P),$$

odakle je $S(f+g,P) - s(f+g,P) < \varepsilon$.

Dokažite formulu (7.12) pomoću Darbouxova teorema.

(5) Ova tvrdnja se lako dokaže pomoću Darbouxova teorema.

(6) Definirajmo pomoćne funkcije f^+ i f^- formulama:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Lako se uočava da je $f = f^+ + f^-$ i $| f | = f^+ = f^-$.
Neka je P bilo koja subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da je $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Budući da je $f^+(x) \geq 0$ i $f^+(x) \geq f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$, to je

$$\begin{aligned} &M_i(f^+) = M_i(f) \quad \text{i} \quad m_i(f^+) \geq m_i(f) \\ &\text{ili } M_i(f^+) = m_i(f^+) = 0. \end{aligned}$$

U oba slučaja je $M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f)$. Prema tome je

$$S(f^+, P) - s(f^+, P) \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

odakle slijedi da je funkcija f^+ integrabilna na $[a, b]$. Funkcija f^- jednaka je razlici ($f^- = f - f^+$) integrabilnih funkcija pa je prema svojstvima (3) i (4) integrabilna na segmentu $[a, b]$. Kako je $-\mid f(x) \mid \leq f(x) \leq \mid f(x) \mid$ za svaki $x \in [a, b]$, primjenom svojstava (3) i (5) dobivamo:

$$-\int_a^b \mid f(x) \mid \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b \mid f(x) \mid \, \mathrm{d}x,$$

tj. $\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \mid f(x) \mid \, \mathrm{d}x.$

7.2.2 Određeni integral i primitivna funkcija

U ovoj točki pokazat ćemo da svaka na segmentu $[a, b]$ neprekidna funkcija ima primitivnu funkciju. Osim toga, dokazat ćemo osnovnu formulu integralnog računa, tzv. Newton–Leibnizovu formulu po kojoj se određeni integral računa pomoću primitivne funkcije.

Primitivnu funkciju definirali smo u točki 6.7. Zbog izuzetne važnosti tog pojma ponovo navodimo definiciju.

Primitivnom funkcijom funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazivamo svaku funkciju $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa svojstvom:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{za svaki } x \in [a, b].$$

Pri tome, pod derivacijom funkcije F u točki a podrazumjevamo njenu derivaciju zdesna u točki a, dok pod derivacijom u točki b podrazumjevamo njenu derivaciju slijeva u točki b. Vrijedi:

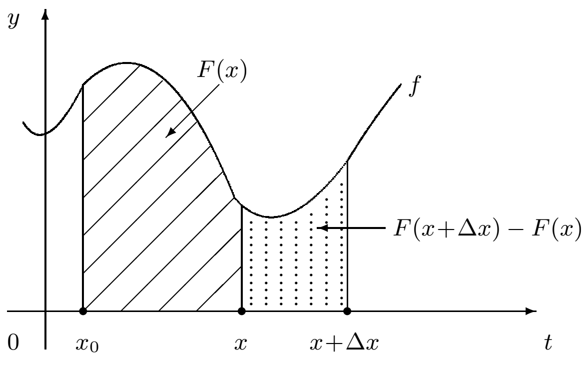
> Neka je $[a,b]$ segment i $x_0 \in [a,b]$. Ako je funkcija $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$, onda je funkcija $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definirana formulom:
>
> $$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
>
> primitivna funkcija funkcije f, tj. $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in [a,b]$.

Dokaz. Neka je $x \in [\,a,b\,]$, $\Delta x \neq 0$ i $x + \Delta x \in [\,a,b\,]$. Treba pokazati da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Definicija funkcije F i svojstvo (2a) određenog integrala daju (vidi *Sliku 7.9*):

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Slika 7.9.

Po teoremu srednje vrijednosti za određeni integral postoji točka c ($c \in< x, x+\Delta x >$ za $\Delta x > 0$, odnosno $c \in< x+\Delta x, x >$ za $\Delta x < 0$) takva da je $\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\Delta x$. Dakle,

$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(c)$. Zbog neprekidnosti funkcije f je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$, pa prijelazom na limes dobivamo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$.

Primjedba 7.6 *Određivanje primitivne funkcije za zadanu funkciju je težak posao. Tako su npr. funkcije:*

$$f(x) = e^{-x^2}, \; f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

neprekidne na $\mathbb{R}$ *pa prema prethodnoj tvrdnji imaju primitivnu funkciju na* $\mathbb{R}$. *Moglo bi se pokazati da te primitivne funkcije nisu elementarne funkcije.*

Newton–Leibnizova formula:

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Ako je F bilo koja primitivna funkcija od f na $[a, b]$, onda je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Realan broj $F(b) - F(a)$ kraće se označava s $F(x)\,\big|_a^b$.

Dokaz. Ako su F i Φ primitivne funkcija od f na $[a, b]$, onda postoji konstanta C takva da je $\Phi(x) = F(x) + C$ za svaki $x \in [a, b]$(vidi t.6.7). Budući da je

$$\Phi(b) - \Phi(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a),$$

u daljnjem možemo pretpostaviti da je $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, gdje je $x_0 \in [a, b]$. Dobivamo:

$$F(b) - F(a) = \int_{x_0}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Primjedba 7.7 *Može se pokazati (ali ne jednostavno) da na segmentu* $[a, b]$ *postoji derivabilna funkcija* F *za koju je funkcija* $f := F'$ *omeđena na* $[a, b]$, *ali nije integrabilna na* $[a, b]$. *To znači da egzistencija primitivne funkcije ne povlači integrabilnost. U tom slučaju Newton-Leibnizova formula nema smisla. Dakle, uvjet neprekidnosti ne smije se izostaviti.*

Primjer 7.4

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \,|_0^1 = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Zadaci za vježbu 7.2

1. Ekvidistantna subdivizija P_n segmenta $[0, 2]$ zadana je točkama:

$$x_i = \frac{2i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Za funkciju $f(x) = 3x + 2$ odredite: a) donju Darbouxovu sumu $s(f, P_n)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, P_n)$, c) Gonju Darbouxovu sumu $S(f, P_n)$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, P_n)$.

Rješenje: a) $10 - \frac{6}{n}$, b) 10, c) $10 + \frac{6}{n}$, d) 10.

2. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona i omeđena funkcija. Dokažite da je f integrabilna na $[a, b]$.

Uputa: Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da je $S - s < \varepsilon$, gdje su S i s toj subdiviziji pripadajuća gornja i donja Darbouxova suma.

Pretpostavite prvo da f raste na $[a, b]$ i podijelite segment $[a, b]$ točkama $x_0 = a$, $x_1, \ldots,$ $x_n = b$ na n jednakih dijelova duljine $\frac{b-a}{n}$. Zatim izvedite formule za pripadne Darbouxove sume:

$$s_n = [f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]\,\frac{b-a}{n}, \quad S_n = [f(x_1) + \cdots + f(x_n)]\,\frac{b-a}{n}.$$

Odakle je $S_n - s_n = [f(x_n) - f(x_0)]\frac{b-a}{n} = [f(b) - f(a)]\frac{b-a}{n}$. Sada za dani $\varepsilon > 0$ odaberite n, tako da je $S_n - s_n < \varepsilon$.

U slučaju da f pada na $[a, b]$ dobiva se: $S_n - s_n = [f(a) - f(b)]\frac{b-a}{n}$.

3. Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = x^2$ je neprekidna na $[a, b]$ pa i integrabilna (vidi Riemannov teorem).

a) Podijelite segment $[a, b]$ na n jednakih dijelova duljine $\frac{b-a}{n}$. Koristeći formulu:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1),\ k \in \mathbb{N}$$

dokažite da pripadna donja Darbouxove suma iznosi:

$$s_n = \frac{(b-a)^3}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) + a(b-a)^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + a^2(b-a).$$

b) Dokažite da je $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$, tako da nađete $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (vidi *Primjedbu 7.5*).
c) Odredite površinu lika omeđenog grafom funkcije f, pravcem $x = 5$ i x-osi.
d) Pokažite da srednja vrijednost funkcije f na segmentu $[0, 2]$ iznosi $\frac{4}{3}$.

4. Odredite realan broj $c > 0$ tako da na segmentu $[-c, c]$ srednja vrijednost funkcije $x \mapsto x^4 - 1$ bude jednaka nuli. Uputa: $(x^5/5 - x)' = x^4 - 1$.

   Rješenje: $c = 5^{1/4}$.

5. Odredite površinu A lika omeđenog parabolom $y = 2x - x^2$ i segmentom $[0, 2]$.

   Rješenje: Parabola siječe x-os u točkama $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Nad segmentom $[0, 2]$ funkcija je pozitivna i $A = \int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x$. Budući da je funkcija $x \mapsto x^2 - \frac{x^3}{3}$ primitivna funkcija za podintegralnu funkciju, prema Newton-Leibnizovoj formuli dobivamo:

$$A = \int\limits_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = (x^2 - x^3/3)\mid_0^2 = (2^2 - 2^3/3) - (0^2 - 0^3/3) = \frac{4}{3}.$$

6. Nađite površinu lika omeđenog grafom parabole $y = x^2 - 2x + 2$ i pravcem $y = x + 2$.

   Uputa: Prvo skicirajte traženi lik, a zatim pokažite da pravac siječe parbolu u točkama $(0, 2)$ i $(3, 5)$. Sa slike zaključite da je

$$A = \int\limits_0^3 (x + 2)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{d}x = (x^2/2 + 2x)\mid_0^3 - (x^3/3 - x^2 + 2x)\mid_0^3 = \frac{9}{2}.$$

7. Odredite površinu lika omeđenog grafom parabole $y = x^2 - 4$ i pravcem $y = -x + 2$.

   Uputa: Pravac siječe parbolu u točkama $(-3, 1)$ i $(2, 0)$. Površina je jednaka vrijednosti određenog integrala $\int_{-2}^2 [(-x + 2) - (x^2 - 4)]\mathrm{d}x$ (vidi *Primjedbu 7.3*). Upotrijebite Newton-Leibnizovu formulu, pri čemu za primitivnu funkciju možete uzeti funkciju $x \mapsto -x^3/3 - x^2/2 + 2x$.

8. Nađite volumen tijela koje nastaje rotacijom oko x-osi pseudotrapeza omeđenog grafom funkcije $f(x) = \sin x$ i segmentom $[0, \pi/4]$.

   Rješenje: $V = \frac{\pi - 1}{4}$.

9. Pokažite da volumen stošca visine v i polumjera baze r iznosi $V = \frac{1}{3} r^2 \pi v$.

   Uputa: Stošac nastaje rotacijom oko x-osi pseudotrapeza omeđenog grafom funkcije $f(x) = \frac{r}{v}\,x$, pravcem $x = v$ i x-osi.

10. Funkcija F zadana je formulom $F(x) = \int_0^x t^2\sqrt{1 + t}\,\mathrm{d}t$. a) Odredite domenu funkcije F b) Odredite $F'(x)$.

    Rješenje: a) Funkcija je definirana za svaki $x \geq 0$. b) $F'(x) = x^2\sqrt{1 + x}$.

11. Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na segmentu $[a, b]$.

    a) Provjerite da funkcija $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ na $[a, b]$ ispunjava sve potrebne uvjete za primjenu Lagrangeova teorema srednje vrijednosti

    b) Pomoću Lagrangeova teorema dokažite teorem srednje vrijednosti za integral funkcije f.

    Uputa: b) $F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $F(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

12. Koje su od navedenih izjava istinite:

    a) Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, onda postoji točka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) = 0$.

    b) Ako je parna funkcija f integrabilna na $\mathbb{R}$, onda je $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

    c) Ako je neparna funkcija f integrabilna na $\mathbb{R}$, onda je $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

    d) Ako je neparna funkcija f integrabilna na $\mathbb{R}$, onda je $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

    Rješenje: a), b) i d)

7.3 Neodređeni integral

Pojam neodređenog integrala uveli smo u t.6.7. Ukratko ponovimo osnovna svojstva.

Neka je I jedan od sljedećih skupova: interval $< a, b >$, s lijeva zatvoreni interval $[a, b >$, zdesna zatvoreni interval $< a, b]$ ili segment $[a, b]$. **Primitivnom funkcijom** funkcije f na skupu I nazivamo svaku funkciju F sa svojstvom:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{za svaki } x \in I.$$

Za funkciju f kažemo da je **integrabilna** na I, ako ona na I ima primitivnu funkciju. Skup svih primitivnih funkcija funkcije f označavamo s $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ i nazivamo **neodređenim integralom** ili **antiderivacijom** funkcije f, a postupak traženja neodređenog integrala **integriranjem.** Da bi se našao neodređeni integral funkcije f na skupu I dovoljno je naći jednu njenu primitivnu funkciju (vidi t.6.7), recimo F, i tada je:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Na određeni način, integriranje je inverzna operacija od deriviranja, kao što je npr. izračunavanje drugog korijena inverzna operacija od kvadriranja. Stoga se rezultat integriranja uvijek može provjeriti deriviranjem.

Iz definicije neodređenog integrala i svojstava derivacije lako se mogu provjeriti sljedeća svojstva.

Neka je I jedan od sljedećih skupova: $< a, b >$, $[a, b >$, $< a, b]$ ili $[a, b]$. Tada vrijedi:

(a) Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na I, onda je:

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

(b) Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I, onda je:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x),$$

tj. derivacija bilo koje primitivne funkcije jednaka je funkciji f.

(c) Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I i λ bilo koji realan broj, onda je funkcija $\lambda \cdot f$ integrabilna na I i pri tome je:

$$\int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(d) Ako su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrabilne na I, onda je i funkcija $f + g$ integrabilna na I i pri tome je:

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Svojstvo (c) nazivamo **homogenost** neodređenog integrala, a svojstvo (d) **aditivnost** neodređenog integrala.

Primjedba 7.8 *Može se pokazati da su svojstva (c) i (d) ekvivalentna svojstvu:*

$$\int [\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{za sve } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ovo svojstvo pokazuje nam da je neodređeni integral „linearna operacija”, tj. ima svojstvo linearne funkcije $h : x \mapsto ax$. Naime, za linearnu funkciju vrijedi:

$$h(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2) \qquad \textit{za sve } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Opća metoda integriranja sastoji se u tome da se podintegralna funkcija dovede u vezu s funkcijama za koje su primitivne funkcije navedene u *Tablici 7.1.* Pri tome se koriste navedena svojstva neodređenog integrala.

Tablica neodređenih integrala:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c\,x)\,,\quad c\in\mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$\int c\,\mathrm{d}x = cx + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = x^{\alpha},\quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\Rightarrow$	$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln\mid x\mid) = \frac{1}{x}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\mid x\mid + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x,\ (a>0\ \text{ i }\ a\neq 1)$	$\Rightarrow$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$	$\Rightarrow$	$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cos x) = \sin x$	$\Rightarrow$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\mathrm{ctg}\,x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln\mid\sin x\mid) = \mathrm{ctg}\,x$	$\Rightarrow$	$\int \mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{d}x = \ln\mid\sin x\mid + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln\mid\cos x\mid) = \mathrm{tg}\,x$	$\Rightarrow$	$\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = -\ln\mid\cos x\mid + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1^2-x^2}} = \arcsin x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{arc\,tg}\,x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|\right) = \frac{1}{x^2-1}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\|\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\| + C$

Tablica 7.1.

7.4 Metode integracije

U ovoj točki navodimo osnovne metode integracije. Da bi se one savladale nužno je dobro poznavati tablicu neodređenih integrala (*Tablica 7.1*) i svojstva neodređenog integrala.

7.4.1 Direktna integracija

Ova metoda sastoji se u tome da se zadana podintegralna funkcija tako transformira, da se raspadne na nekoliko elementarnih funkcija, koje zatim integriramo prema formulama iz *Tablice 7.1.* Jasno, pri tome koristimo pravila integriranja.

Primjer 7.5 *Izračunajmo integrale: a)* $\int (x^2+4)^3\,\mathrm{d}x$, *b)* $\int \frac{x^2-5x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, *c)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$, *d)* $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$,

a) Budući da je $(x^2+4)^3 = x^6+12x^4+48x^2+64$, dobivamo:

$$\int (x^2+4)^3\mathrm{d}x = \int (x^6+12x^4+48x^2+64)\mathrm{d}x = \int x^6\,\mathrm{d}x + 12\int x^4\,\mathrm{d}x + 48\int x^2\mathrm{d}x + 64\int \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^7}{7} + 12\cdot\frac{x^5}{5} + 48\cdot\frac{x^3}{3} + 64x + C = \frac{x^7}{7} + \frac{12}{5}x^5 + 16x^3 + 64x + C.$$

b) Prvo ćemo podintegralnu funkciju zapisati u obliku podesnom za integriranje, a zatim integrirati:

$$\int \frac{x^2-5x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int (x^{3/2}-5x^{1/2}+x^{-1/2})\,\mathrm{d}x = \int x^{3/2}\,\mathrm{d}x - 5\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x + \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} - 5\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{5x}{3} + 1\right) + C.$$

c) Transformirajmo podintegralnu funkciju na sljedeći način:

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Dakle,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x + C.$$

d) Pomoću formuule $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ dobivamo:

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x - x + C.$$

Deriviranjem desne strane lako je provjeriti sljedeće pravilo za računanje integrala:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln \mid f(x) \mid +C.$$

Riječima: *Ako se u brojniku podintegralne funkcije nalazi derivacija nazivnika, onda je integral jednak prirodnom logaritmu apsolutne vrijednosti nazivnika.*

Primjer 7.6 *Ilustrirajmo navedeno pravilo na primjerima:*

$$\begin{array}{l}
a)\ \int \frac{1}{x \pm a}\,\mathrm{d}x = \ln \mid x \pm a \mid +C,\\
b)\ \int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln \mid \cos x \mid +C\\
c)\ \int \mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln \mid \sin x \mid +C\\
d)\ \int \frac{x+1}{x^2+2x-7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln \mid x^2+2x-7 \mid +C
\end{array}$$

Primjer 7.7 *Izračunajmo: a)* $\int \frac{e^x+2x}{e^x+x^2+1}\,\mathrm{d}x$, *b)* $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ *i c)* $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$:

a) $$\int \frac{e^x+2x}{e^x+x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(e^x+x^2+1)+C$$

b) $$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}}{\mathrm{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x.$$

Budući da se u brojniku nalazi derivacija nazivnika, dobivamo:

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

c) $$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Zadaci za vježbu 7.4.1

Primjenom osnovnih pravila i formula za integriranje (*Tablica 7.1*), izračunajte integrale:

1. a) $\int(2x-1)\,\mathrm{d}x$ b) $\int\left(\frac{1}{x^3}-2x\right)\mathrm{d}x$ c) $\int\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-1\right)\mathrm{d}x$
   d) $\int\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ e) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x$ f) $\int\sqrt{5}\,\mathrm{d}x$.

   Rješenje: a) x^2-x+C, b) $-\frac{1}{2x^2}-\frac{x^2}{2}+C$, c) $\frac{1}{3}\sqrt[2]{x^3}-x+C$, d) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$, e) $\frac{2}{5}x^{3/2}+x+C$, e) $\sqrt{5}\,x+C$.

2. a) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)(x^2-\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

c) $\int\left(\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}} - \frac{2}{x^{3/2}} + \frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}\right)\mathrm{d}x$ d) $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x\,.$

Rješenje: a) $\arcsin x - \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$, b) $\frac{x^2}{2}-x+C$, c) $-\frac{2}{3}x^{3/2}+4x^{-1/2}+C$, d) $2x^{1/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}+C$.

Uputa: a) $\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, b) $\frac{(\sqrt{x}+1)(x^2-\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} = x-1$, c) $\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}} - \frac{2}{x^{3/2}} + \frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}} = -x^{1/2}-2x^{-3/2}$,
d) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) = x^{-1/2}-x^{1/2}$.

3. a) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x^3}{3-x^4}\,\mathrm{d}x$
e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

Rješenje: a) $-\ln(e^{-x}+1)+C$, b) $-\ln(e^{-x}+1)+C$, c) $\ln\mid 3+x\ln x\mid +C$, d) $-\frac{1}{4}\ln\mid 3-x^4\mid +C$, e) $\ln\mid\arcsin x\mid +C$ f) $-\ln(\cos^2 x)+C$, g) $\ln\mid 1+\cos x\mid +C$, h) $\ln\mid\ln x\mid +C$.

Uputa: Podintegralnu funkciju zapišite tako da se u brojniku nađe derivacija nazivnika: a) $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = -\left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)$, b) $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$, d) $\frac{x^3}{3-x^4} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{-4x^3}{3-x^4}$, e) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}$, f) $\frac{\sin 2x}{\cos^2 x} = -\frac{-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}$, h) $\frac{1}{x\ln x} = \frac{1/x}{\ln x}$.

7.4.2 Metoda supstitucije

Često primitivnu funkciju ne možemo pronaći direktno. U takvim situacijama možemo pokušati primjeniti metodu supstitucije (uvođenja nove varijable). Pri tome se podintegralna funkcija dovodi u vezu s kompozicijom funkcija. O tome govori sljedeća tvrdnja.

Neka su $[A,B]$ i $[a,b]$ segmenti, ϕ derivabilna funkcija na $[a,b]$, ϕ' neprekidna funkcija na $[a,b]$ i f neprekidna funkcija na $[A,B]$. Ako je $\phi([a,b]) \subseteq [A,B]$ tako da je na $[a,b]$ definirana kompozicija $f \circ \phi$, onda vrijedi:

a) Funkcija $x \mapsto f[\phi(x)]\phi'(x)$ na segmentu $[a,b]$ ima primitivnu funkciju. Pri tome je

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F[\phi(x)] + C, \tag{7.15}$$

gdje je F primitivna funkcija od f.

b) Za sve $\alpha, \beta \in [a,b]$ vrijedi:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.16}$$

Dokaz. Zamijetite da je funkcija $x \mapsto f[\phi(x)]\phi'(x)$ neprekidna pa stoga i integrabilna na $[a,b]$, a funkcija f integrabilna na $[A,B]$.

Dokažimo tvrdnju a). Neka je F primitivna funkcija od f na $[A,B]$. Budući da je $\phi([a,b]) \subseteq [A,B]$, kompozicija $F \circ \phi$ je derivabilna na $[a,b]$. Primjenom pravila za deriviranje kompozicije funkcija dobivamo:

$$(F \circ \phi)'(x) = F'[\phi(x)]\phi'(x) = f[\phi(x)]\phi'(x).$$

Dakle, $\int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F[\phi(x)] + C$.

Tvrdnja b) slijedi iz Newton-Leibnizove formule:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F[\phi(\beta)] - F[\phi(\alpha)] = \int\limits_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Primjedba 7.9 *Zahtjev neprekidnosti funkcije ϕ' na $[a,b]$ nije suvišan (vidi* Primjedbu 7.7*). On nam daje integrabilnost funkcije $x \mapsto f[\phi(x)]\phi'(x)$.*

U formuli (7.16) provedena je supstitucija $\phi(x) = t$. Pri tome diferencijal $\mathrm{d}\phi = \phi'(x)\mathrm{d}x$ prelazi u diferencijal $\mathrm{d}t$, a granice integracije α i β u nove granice $\phi(\alpha)$ i $\phi(\beta)$.

Primjer 7.8 *Odredimo* $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$:

Uvedimo supstituciju $\sin x = t$. Diferenciranjem dobivamo $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Za $x = 0$ je $t = \sin 0 = 0$, a za $x = \pi/2$ je $t = \sin(\pi/2) = 1$. Prema (7.16) dobivamo:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Primjer 7.9 *Izračunajmo* $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$:

$$\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 2-x=t \\ -\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int\limits_4^0 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^4 t^{1/2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{3}\cdot t^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2} - \left(\frac{2}{3}\cdot 0^{3/2}\right) = \frac{16}{3}.$$

Iz formule (7.15) dobivamo shemu po kojoj se može pronaći neodređeni integral $\int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \phi(x) = t \\ \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+C = F[\phi(x)]+C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta, a F primitivna funkcija od f.

Primjer 7.10 *Izračunajmo: a)* $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$, *b)* $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

a) $$\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

b) $$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 1+\ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\ln^2 x} + C.$$

Primjer 7.11 *Rješavajući složene integrale, često dolazimo do integrala sljedećih oblika:*

a) Integral tipa $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0$ i $b>0)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \frac{bx}{a}=t \\ \frac{b}{a}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{a\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{a}{b}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{b}\arcsin t + C = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + C$$

b) Integral tipa $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0$ i $b>0)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \frac{bx}{a}=t \\ \frac{b}{a}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{a\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{a}{b}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{b}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + C = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{bx}{a}+\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2+1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{b}\ln\left(\frac{bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right) + C = \frac{1}{b}\ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right) + C - \frac{\ln a}{b}$$

$$= \frac{1}{b}\ln\left(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2}\right) + C.$$

U zadnjem koraku ispustili smo konstantu $-\frac{\ln a}{b}$. To je dopušteno stoga što se dvije primitivne funkcije razlikuju za konstantu.

c) Integral tipa $\int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2-b^2}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0$ i $b>0)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2-b^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{b\sqrt{\left(\frac{ax}{b}\right)^2-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \frac{ax}{b}=t \\ \frac{a}{b}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{b\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{b}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) + C = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{ax}{b}+\sqrt{\left(\frac{ax}{b}\right)^2-1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left(\frac{ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}}{b}\right) + C = \frac{1}{a}\ln\left(ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\right) + C - \frac{\ln b}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left(ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\right) + C.$$

Kao i u prethodnom primjeru, u zadnjem smo koraku ispustili konstantu $-\frac{\ln b}{a}$.

Primjer 7.12 *Integral tipa* $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ *(* $a \neq 0$ *) možemo riješiti tako da prvo kvadratnu funkciju pod korijenom nadopunimo na potpuni kvadrat:*

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a},$$

a zatim uvedemo supstituciju $x+\dfrac{b}{2a}=t$. *Dobivamo jedan od tri tipa navedena u* Primjeru 7.11.

Primjera radi, riješimo integral $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+3x+1}}\,\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+3x+1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}}} = \left| \begin{array}{c} x+\frac{3}{4}=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(\sqrt{2})^2t^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$= (\text{Primjer 7.11.c}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2-1/8}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\sqrt{2}\left(x+\frac{3}{4}\right) + \sqrt{2x^2+3x+1}\right] + C.$$

Primjer 7.13 *Neka su* $p, q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Riješimo integrale: a)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{p^2x^2+q^2}$, *b)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{p^2x^2-q^2}$.

a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{p^2x^2+q^2} = \frac{1}{q^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{px}{q}\right)^2+1} = \left| \begin{array}{c} \frac{px}{q}=t \\ \frac{p}{q}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{qp}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{qp}\operatorname{arc\,tg} t + C$$

$$= \frac{1}{qp}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{px}{q}\right) + C.$$

b) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{p^2x^2-q^2} = \frac{1}{q^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{px}{q}\right)^2-1} = \left| \begin{array}{c} \frac{px}{q}=t \\ \frac{p}{q}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{qp}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = (\textit{Tab. 7.1})$$

$$= \frac{1}{qp}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{2qp}\ln\left|\frac{q-px}{q+px}\right| + C.$$

Neka su $c, d \in [A, B]$. Ako je ϕ bijekcija sa $[a, b]$ na $[A, B]$ i $\psi = \phi^{-1}$ njena inverzna funkcija, onda postoje točke $\alpha, \beta \in [a, b]$ takve da je $c = \phi(\alpha)$ i $d = \phi(\beta)$. Nadalje, iz formule (7.16) dobivamo:

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.17}$$

U formuli (7.17) provedena je supstitucija $x = \phi(t)$. Pri tome treba obratiti pažnju na određivanje novih granica integracije $\psi(c)$ i $\psi(d)$. Na lijevoj strani formule (7.17) integrira se po podsegmentu $[c, d]$ segmenta $[a, b]$, a na desnoj strani po podsegmentu $[\psi(c), \psi(d)]$ segmenta $[A, B]$.

Neka je G primitivna funkcija funkcije $t \mapsto f[\phi(t)]\phi'(t)$. Zamijenimo li u formuli (7.17) gornju granicu integracije d s x, $x \in [a,b]$, dobivamo:

$$\int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t = G[\psi(x)] - G[\psi(\alpha)].$$

Budući je $F(x) = \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u$ primitivna funkcija od f, to je funkcija $x \mapsto G[\phi(x)]$ primitivna funkcija od f. Tako smo pronašli shemu po kojoj se može pronaći neodređeni integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \phi(t) \\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t)+C = G[\psi(x)]+C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta, a G primitivna funkcija od $(f \circ \phi) \cdot \phi'$.

Navedenu shemu koristimo samo onda kada je jednostavnije pronaći primitivnu funkciju G nego primitivnu funkciju F od f.

Primjer 7.14 *Riješimo određeni integral* $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$:

Funkcija $t \mapsto \phi(t) = 2\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, ispunjava sve potrebne uvjete za primjenu prethodne tvrdnje. Neka je stoga $x = 2\sin t$ i Tada je $\mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$. $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t$. Prema (7.17) dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\, 2\cos t\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t \\ &= 2(t + \tfrac{1}{2}\sin 2t)\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

Primjer 7.15 *Supstitucijom* $x = \operatorname{tg} t$ *izračunajmo integral* $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$:

Iskoristimo poznatu trigonometrijsku formulu: $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| &= \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \\ &= \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + C = \operatorname{tg} t\,\cos t + C = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$

Zadaci za vježbu 7.4.2

Uvođenjem nove varijable izračunajte:

1. a) $\int x\sqrt{x-5}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \sqrt[3]{1+\sin x}\,\cos x\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{arc\ cos}\,x)^5\,\sqrt{1-x^2}}$
d) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int x\,e^{3x^2-5}\,\mathrm{d}x$
g) $\int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$ h) $\int \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ i) $\int \frac{2^x}{1-4^x}\,\mathrm{d}x$.

Rješenje: a) $t=\sqrt{x-5}$, $\dfrac{2(x-5)^{5/2}}{5}+\dfrac{10(x-5)^{3/2}}{3}+C$; b) $t=1+\sin x$, $\dfrac{3(1+\sin x)^{4/3}}{4}+C$; c) $t=\mathrm{arc}\cos x$, $\dfrac{1}{4\,\mathrm{arc}\cos^4 x}+C$; d) $t=\sqrt{x}$, $-2\,\cos\sqrt{x}+C$; e) $t=\sin x$, $-\dfrac{1}{3\,\sin^3 x}+C$; f) $t=3x^2-5$, $\frac{1}{6}\,e^{3x^2-5}+C$; g) $x=t^6$, $6\left(\dfrac{x^{7/6}}{7}-\dfrac{x^{5/6}}{5}+\dfrac{x^{1/2}}{3}-x^{1/6}+\mathrm{arc\,tg}\,x^{1/6}\right)+C$; h) $1+e^x=t^2$, $2\sqrt{1+e^x}+\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C$; i) $t=2^x$, $\dfrac{1}{\ln 4}\,\ln\left|\dfrac{2^x+1}{2^x-1}\right|+C$.

2. a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$ b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+25}$ c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-9x^2}}$
e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x^2-4x}}$ f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+6x+1}}$ g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4-x^2-4x}$ h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+13}$

Rješenje: a) $\mathrm{arc\,tg}(x+2)+C$, b) $\dfrac{1}{10}\mathrm{arc\,tg}\dfrac{2x}{5}+C$, c) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$, d) $\frac{1}{3}\mathrm{arc}\sin\dfrac{3x}{2}+C$, e) $\mathrm{arc}\sin\dfrac{x+2}{3}+C$, f) $\ln\mid x+3+\sqrt{x^2+6x+1}\mid+C$, g) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{2\sqrt{2}+x+2}{2\sqrt{2}-(x+2)}\right|+C$, c) $\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{x-3}{2}+C$.

7.4.3 Parcijalna integracija

Iz pravila za deriviranje kompozicije funkcija dobili smo pravilo za integriranje supstitucijom. Slično, iz formule za deriviranje produkta dobivamo formulu za parcijalnu integraciju.

Ako su $u, v : I \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilne funkcije na intervalu I, onda su funkcije $u'v$ i uv' integrabilne na I i pri tome vrijedi:

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.18}$$

Dokaz. Prema pretpostavci funkcije u' i v' su neprekidne na I. Stoga su i funkcije $u'v$ i uv' neprekidne pa i integrabilne na I. Primjenom pravila za deriviranje produkta funkcija dobivamo $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, odnosno:

$$u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x).$$

Integriranjem dobivamo: $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = (uv)(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

Integraciju primjenom formule (7.18) nazivamo **parcijalnom integracijom**. Nadalje, iz formule (7.18) dobivamo odgovarajuću formulu za računanje određenog integrala:

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primjedba 7.10 *Kod parcijalne integracije podintegralnu funkciju treba prikazati u obliku produkta dviju funkcija u' i v. Pri tome funkciju u' treba odabrati tako da se lako može odrediti primitivna funkcija u od u', pri čemu treba paziti da računanje integrala $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ bude lakše od računanja integrala $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.*

Metodu parcijalne integracije često koristimo u slučaju ako je podintegralna funkcija produkt polinoma i trenscedentne funkcije ili produkt dviju transcedentnih funkcija.

Primjer 7.16 *Izračunajmo* $\int xe^x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \underbrace{x}_{v}\underbrace{e^x}_{u'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{1}_{v'}\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

Rezultat provjerite deriviranjem.

Ako bi stavili $u'(x) = x$, onda bi prema formuli (7.18) imali:

$$\int \underbrace{x}_{u'}\underbrace{e^x}_{v}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x\,\mathrm{d}x,$$

odakle vidimo da nas formula za parcijalnu integraciju vodi u pogrešnom smjeru. Naime, teže je izračunati integral $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$ od integrala $\int xe^x \,\mathrm{d}x$, jer se povećao eksponent od x.

Primjer 7.17 *Stavimo $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$ i izračunajmo $\int\limits_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$:*

$$\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x = \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\ln x}_{v} \,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\ln x}_{v} \Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \,\mathrm{d}x = x \,\ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = 1.$$

Primjer 7.18 *Ponekad je potrebno nekoliko puta redom parcijalno integrirati. Ilustrirajmo primjerom:*

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\cos x}_{u'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{x^2}_{v} - \int \underbrace{2x}_{v'} \underbrace{\sin x}_{u} \,\mathrm{d}x.$$

Zadani integral smo sveli na lakši, jer smo smanjili eksponent od x. Promijenimo li oznake, ponovnom parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin x}_{u'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{-\cos x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{1}_{v'} \underbrace{(-\cos x)}_{u} \,\mathrm{d}x = -x\,\cos x + \sin x + C.$$

Dakle, $\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x = x^2 \sin x + 2x\,\cos x - 2\,\sin x + C$.

Primjer 7.19 *Izračunajmo $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$:*

Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$(\star) \qquad \int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v} \,\mathrm{d}x = \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} \,\mathrm{d}x.$$

Primjenom iste metode imamo:

$$(\star\star) \qquad \int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\cos x}_{v} \,\mathrm{d}x = \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{(-\sin x)}_{v'} \,\mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Uvrštavanjem $(\star\star)$ u $(\star)$ dobivamo:

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x,$$

odakle je $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$.

Primjer 7.20 *Riješimo integral* $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, *gdje su* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha \neq 0$ *realan broj:*

Neka je $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zamijetite da je $I_1 = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha} + C$. Za $n \geq 2$ dobivamo:

$$(\star) \qquad I_n = \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{x^2 + \alpha^2 - x^2}{(x^2+\alpha^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^2}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^n}\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^n}\,\mathrm{d}x\right]$$

Metodom parcijalne integracije dobivamo:

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^n} = \int \overbrace{\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n}}^{u'} \cdot \overbrace{x}^{v}\,\mathrm{d}x = \overbrace{\frac{1}{2(1-n)}(x^2+\alpha^2)^{-n+1}}^{u} \cdot \overbrace{x}^{v}$$

$$- \int \overbrace{\frac{1}{2(1-n)}(x^2+\alpha^2)^{-n+1}}^{u} \cdot \overbrace{1}^{v'}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(1-n)}\left[(x^2+\alpha^2)^{-n+1}x - I_{n-1}\right].$$

Uvrštenje u $(\star)$ daje $I_n = \frac{1}{\alpha^2}\left[I_{n-1} - \frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right)\right]$, odakle dobivamo rekurzivnu formulu:

$$(\star\star) \qquad I_n = \frac{1}{2(n-1)\alpha^2}\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + \frac{2n-3}{2(n-1)\alpha^2} I_{n-1} \qquad (n \geq 2).$$

Pokažite da za integral $J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\alpha^2)^n}$ *vrijedi rekurzivna formula:*

$$(\star\star\star) \qquad J_n = \frac{1}{2(n-1)\alpha^2}\frac{x}{(x^2-\alpha^2)^n} + \frac{2n-3}{2(n-1)\alpha^2} J_{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

gdje je $J_1 = \frac{1}{2\alpha} \ln\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right| + C$ *(provjerite deriviranjem).*

Nemojte pamtiti rekurzivne formule $(\star\star)$ *i* $(\star\star\star)$, *nego na primjerima usvojite postupak njihova izvođenja.*

Primjedba 7.11 *Zamijetite da se svaki integral oblika:*

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x,$$

gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ *i* $n \in \mathbb{N}$, *može supstitucijom svesti na jedan od sljedeća dva oblika:*

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^n} \quad \textit{ili} \quad J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-\alpha^2)^n}.$$

Ilustrirajmo primjerom:

$$\int \frac{1}{-2x^2+3x-1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{2x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{3}{4})^2-\frac{1}{16}} = \left|\begin{array}{c} x-\frac{3}{4}=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right|$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1/16} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right| + C = -\ln\left|\frac{4t-1}{4t+1}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{4x-4}{4x-2}\right| + C = \ln\left|\frac{2x-1}{2x-2}\right| + C$$

Zadaci za vježbu 7.4.3

1. Metodom parcijalne integracije izračunajte sljedeće integrale:

   a) $\int e^{5x}\cos 4x\mathrm{d}x$ b) $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}[\ln(x^2+1)-2\ln x]}{x^4}\mathrm{d}x$
   d) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$ e) $\int \sqrt[3]{x}(\ln x)^2\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$
   g) $\int \frac{x\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$ h) $\int 3^x\cos x\,\mathrm{d}x$ i) $\int (1+x^2)^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

   Rješenje: a) $\frac{4}{41}e^{5x}\left(\sin 4x+\frac{5}{4}\cos 4x\right)+C$, b) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x}{2}+C$, c) $\frac{(x^2+1)^{3/2}}{9x^3}\left[2-3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]+C$, d) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$, e) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2-\frac{3}{2}\ln x+\frac{9}{8}\right]+C$, f) $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$, g) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg} x\right)+C$, h) $\frac{3^x(\sin x+\ln 3\cdot\cos x)}{1+(\ln 3)^2}+C$, i) $(x^4-10x^2+21)\sin x+x(4x^2-20)\cos x+C$.

   Uputa: b) Prvo transformirajte podintegralnu funkciju: $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\ln(x+1)-x\ln x$, a zatim parcijalno integrirajte, c) Prvo uvedite supstituciju $t=1+\frac{1}{x^2}$, a zatim parcijalno integrirajte,

2. Metodom parcijalne integracije izvedite sljedeće rekurzivne formule:

   (a) $I_n=\int(\ln x)^n\mathrm{d}x=x(\ln x)^n-nI_{n-1}$;

   (b) $I_n=\int x^\alpha(\ln x)^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}(\ln x)^n}{\alpha+1}-\dfrac{n}{\alpha+1}I_{n-1}\quad(\alpha\neq-1)$;

   (c) $I_n=\int x^ne^x\mathrm{d}x=x^ne^x-nI_{n-1}$;

   (d) $I_n=e^{\alpha x}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+n^2}\sin^{n-1}x(\alpha\sin x-n\cos x)+\dfrac{n(n-1)}{\alpha^2+n^2}I_{n-2}$;

7.5 Tehnika integriranja

Skup integrabilnih funkcija je bogat. U ovoj točki pokazat ćemo razne „trikove" pomoću kojih se mogu integrirati neke klase funkcija. Savjetujemo čitatelju da pažljivo prouči gradivo ove točke i da rješavanjem većeg broja zadataka usvoji te „trikove", umjesto da napamet nauči formule.

7.5.1 Integriranje racionalnih funkcija

Važnu klasu integrabilnih funkcija čine racionalne funkcije. Budući da svaku racionalnu funkciju možemo prikazati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije, problem integracije racionalne funkcije svodi se na problem integracije prave racionalne funkcije. Zahvaljujući prikazu prave racionalne funkcije u obliku zbroja parcijalnih razlomaka (vidi t.2.4), integracija prave racionalne funkcije svodi se na računanje integrala sljedeća četiri tipa:

$$I.\ \int\frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x,\quad II.\ \int\frac{A}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x,\quad III.\ \int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x,\quad IV.\ \int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x,$$

gdje su $m \geq 2$ i $n \geq 2$ prirodni brojevi; A, M, N, p i q realni brojevi, takvi da polinom $x^2 + px + q$ nema realnih nula, tj. da je $p^2 - 4q < 0$.

Pokažimo kako se mogu izračunati ti integrali.

Integral tipa I:

$$\int\frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x-a=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right| = A\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = A\ln|\,t\,|+C = A\ln|\,x-a\,|+C.$$

Integral tipa II:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c} x-a=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}\right|=A\int t^{-m}\mathrm{d}t=\frac{-A}{(m-1)t^{m-1}}+C=\frac{-A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+C.$$

Integral tipa III:

Nadopunimo kvadratnu funkciju do potpunog kvadrata:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Neka je $\alpha=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Supstitucijom $t=x+\frac{p}{2}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}t=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+\alpha^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha^2}\\
&=\frac{M}{2}\ln(t^2+\alpha^2)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\alpha}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t}{\alpha}\right)}{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1}\\
&=\frac{M}{2}\ln(t^2+\alpha^2)+\frac{2N-Mp}{2\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\alpha}+C\\
&=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.
\end{aligned}$$

Integral tipa IV:

Uz oznaku $\alpha=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ supstitucijom $t=x+\frac{p}{2}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+\alpha^2)^n}\,\mathrm{d}t=\frac{M}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2+\alpha^2)}{(t^2+\alpha^2)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}\\
&=\frac{-M}{2(n-1)(t^2+\alpha^2)^{n-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}
\end{aligned}$$

Integral $I_n=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}$ možemo izračunati po rekurzivnoj formuli ($\star\star$) iz *Primjera 7.20.*

Primjedba 7.12 *Zamijetite da su integrali tipa I i III transcedentne funkcije (sadrži logaritme i arkustangense). Integral tipa II je prava racionalna funkcija, kod koje stupanj polinoma u nazivniku iznosi* $(m-1)$. *Integral tipa IV (vidi rekurzivnu formulu (*$\star\star$*) iz* Primjera 7.20*) sastoji se od prave racionalne funkcije kod koje je polinoma u nazivniku stupnja* $2(n-1)$ *i transcedentnog dijela koji sadrži funkciju* arc tg. *Dakle, integral prave racionalne funkcije elementarna je funkcija, koja se može prikazati u obliku zbroja transcedentnog i pravog racionalnog dijela.*

Primjer 7.21 *Riješimo integral* $\int\frac{x^5-x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^4-x^3-x+1}\,\mathrm{d}x$:

Budući da je stupanj polinoma u brojniku veći od stupnja polinoma u nazivniku, prvo ćemo podijeliti brojnik s nazivnikom. Dobivamo (provjerite!):

$$\frac{x^5-x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^4-x^3-x+1}=x+\frac{2x^3+4x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1}=x+\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Rastav na parcijalne razlomke glasi (vidi *Primjer 2.45*):

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Integriranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5-x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^4-x^3-x+1}\,\mathrm{d}x&=\int\left[x+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}+3\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\\&=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x-1}+2\ln|\,x-1\,|+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Izračunajmo posljednji integral:

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1/2)^2+3/4}=\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\left|\begin{array}{l}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=t\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arct}\operatorname{tg}t+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Dakle,

$$\int\frac{x^5-x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^4-x^3-x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x-1}+2\ln|\,x-1\,|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Integral prave racionalne funkcije jednak je zbroju racionalnog i transcedentnog dijela (*Primjedba 7.12*). Racionalni dio možemo odrediti **metodom Ostrogradskog**[3] bez integriranja. Pri tome se računanje transcedentnog dijela svodi na računanje integrala prave racionalne funkcije s međusobno različitim faktorima na prvu potenciju u nazivniku. Dokaz metode Ostrogradskog bazira se na razmatranjima iz *Primjedbe 7.12*. Mi ćemo ga ispustiti i samo opisati metodu.

Nazivnik Q prave racionalne funkcije $\frac{P}{Q}$ rastavi se na dva faktora Q_1 i Q_2 (tj. $Q=Q_1\cdot Q_2$), gdje je Q_2 produkt svih faktora (uzetih jednostruko) koji se javljaju u Q. Integral tražimo u obliku (formula Ostrogradskog):

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

gdje su P_1 i P_2 polinomi s neodređenim koeficijentima kojima je stupanj za jedan manji od stupnja polinoma Q_1 i Q_2 ($\operatorname{st}P_1=\operatorname{st}Q_1-1$, $\operatorname{st}P_2=\operatorname{st}Q_2-1$). Deriviranjem formule Ostrogradskog dobivamo jednadžbu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]'+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

[3] M. V. Ostrogradski (1801–1861)-ruski matematičar.

iz koje metodom neodređenih koeficijenata određujemo koeficijente polinoma P_1 i P_2.

Primjer 7.22 *Izračunajmo metodom Ostrogradskog integral* $\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$:

U ovom primjeru je $Q(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2$, $Q_2(x) = x^2 - x + 1$, $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = x^2 - x + 1$. Integral tražimo u obliku:

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Deriviranjem dobivamo:

$$\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$

odakle imamo:

$$6 - 7x - x^2 = A(x^2 - x + 1) - (Ax + B)(2x - 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1).$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz iste potencije od x dobivamo sustav:

$$\begin{array}{rrrrcr} & & C & & = & 0 \\ -A & & -C & +D & = & -1 \\ & -2B & +C & -D & = & -7 \\ A & +B & & +D & = & 6 \end{array}$$

Za rješenje nalazimo (provjerite!): $A = 2$, $B = 3$, $C = 0$, $D = 1$. Dakle,

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}.$$

Budući da je:

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \left| \begin{array}{c} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} = t \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arct\,tg}\,t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

dobivamo:

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

7.5.2 Binomni integral

Integral oblika:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x,$$

gdje su $a \neq 0, b \neq 0$ realni brojevi; m, n i p racionalni brojevi, nazivamo binomnim integralom. Godine 1853. ruski matematičar P. L. Čebišev (1821–1894) dokazao je da se binomni integral može prikazati pomoću elementarnih funkcija samo u sljedeća tri slučaja:

a) ako je $p \in \mathbf{Z}$. U ovom slučaju izraz $(a+bx^n)^p$ treba razviti po binomnoj formuli, a zatim integrirati;

b) ako je $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$. U ovom slučaju supstitucijom $t^r = a+bx^n$, gdje je r nazivnik razlomka p (uzet s pozitivnim predznakom), integral svodimo na integral racionalne funkcije (provjerite!);

c) ako je $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$. U ovom slučaju transformacijom

$$x^m(a+bx^n)^p = x^m[x^n(b+ax^{-n})]^p = x^{m+np}(b+ax^{-n})^p$$

polazni integral prelazi u integral tipa b) (provjerite!) pa ga rješavamo supstitucijom $b+ax^{-n} = t^r$, gdje je r nazivnik razlomka p uzet s pozitivnim predznakom.

Primjer 7.23 *Riješimo binomni integral* $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$:

Zamijetite da integral možemo zapisati u obliku $\int x^{-2}(1+x^2)^{-1/2}\mathrm{d}x$, odakle vidimo da je $m=-2$, n=2, $p=-\frac{1}{2}$, $r=2$ i da se radi o c) slučaju. Svedimo ga na b) slučaj:

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-1/2}\mathrm{d}x = \int x^{-2}[x^2(x^{-2}+1)]^{-1/2}\mathrm{d}x = \int x^{-3}(1+x^{-2})^{-1/2}\mathrm{d}x.$$

Nove vrijednosti eksponenata su: $m'=-3$, $n'=-2$, $p'=-\frac{1}{2}$, $r'=2$. Budući da je $\frac{m'+1}{n'} = -1 \in \mathbf{Z}$ (b) slučaj), supstitucijom $t^2 = 1+x^{-2}$ dobivamo:

$$\int x^{-3}(1+x^{-2})^{-1/2}\mathrm{d}x = \int (1+x^{-2})^{-1/2}x^{-3}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^2 = 1+x^{-2} \\ t\,\mathrm{d}t = -x^3\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int t^{-1}t\mathrm{d}t$$

$$= -\int \mathrm{d}t = -t + C = -\sqrt{1+x^{-2}} + C.$$

Primjer 7.24 *Ako su* p *i* q *racionalni brojevi, onda integral:*

$$\int \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

supstitucijom $\sin x = t$ *prelazi u binomni integral:*

$$\int \sin^p x \cos^q x \,\mathrm{d}x = \int \sin^p x (\cos x)^{q-1} \cos x \,\mathrm{d}x = \int t^p (1-t^2)^{\frac{q-1}{2}} \,\mathrm{d}t.$$

Ilustrirajmo primjerom:

$$\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3 (1-t^2)^{-1/4} \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} 1-t^2 = u^4 \\ t\,\mathrm{d}t = -2u^3\,\mathrm{d}u \\ t^3 \mathrm{d}t = 2u^3(u^4-1)\,\mathrm{d}u \end{array} \right|$$

$$= 2\int (u^6 - u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{7}u^7 - \frac{2}{3}u^3 + C = \frac{2}{7}\sqrt[4]{(1-t^2)^7} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{(1-t^2)^3} + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} - \frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C.$$

7.5.3 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

A) Integral oblika:

$$\int R(x, x^{q_1}, x^{q_2}, \ldots, x^{q_n})\,\mathrm{d}x,$$

gdje je R racionalna funkcija svojih argumenata i $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$.

Supstitucijom $x = t^k$, gdje je k najmanji zajednički višekratnik od nazivnika brojeva $q_1, q_2, \ldots, q_n$, dobivamo integral racionalne funkcije.

Primjer 7.25

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = 6\int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1+t^2)}\,t^5 \mathrm{d}t = 6\int \left(t^3 + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}t^4 + 6\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[6]{x} + C.$$

B) Ima li integral oblik:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x,$$

gdje je R racionalna funkcija od x i $\frac{ax+b}{cx+d}$, možemo ga supstitucijom $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ svesti na integral racionalne funkcije.

Primjer 7.26

$$\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \frac{2-x}{2+x} = t^3, \quad x = \frac{2-t^2}{1+t^3} \\ 2-x = \frac{4t^3}{1+t^3}, \quad \mathrm{d}x = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{2(1+t^3)^2 t \cdot 12t^2}{16\,t^6(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{3}{2}\int t^{-3}\mathrm{d}t = \frac{3}{4t^2} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$$

C) Integral oblika:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x,$$

gdje je R racionalna funkcija od x i $\sqrt{ax^2+bx+c}$, pomoću Eulerovih supstitucija možemo svesti na integral racionalne funkcije.

Eulerove supstitucije:

a) Za $a > 0$ uzimamo supstituciju: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}\cdot x$. Kvadriranjem dobivamo $bx + c = t^2 + 2\sqrt{a}\,tx$, odakle je:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}, \quad \mathrm{d}x = \frac{-2\sqrt{a}\,t^2 + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Budući da je x racionalna funkcija od t, ovom supstitucijom polazni integral svodi se na integral racionalne funkcije.

b) Za $a < 0$ prvo odredimo nultočke x_1 i x_2 kvadratne funkcije $x \mapsto ax^2+bx+c$. Neka je $x_1 < x_2$. Uvedimo supstituciju:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t\cdot(x-x_1).$$

Kvadriranjem dobivamo $a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2$, odakle je:

$$x = \frac{x_1t^2 - ax_2}{t^2-a}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Kao i u prethodnom slučaju, x je funkcija od t pa se stoga polazni integral svodi na integral racionalne funkcije.

Primjer 7.27 *Riješimo integrale: a)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, *b)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$:

a) Neka je $\sqrt{x^2+x+1} = t + x$. Kvadriranjem dobivamo $x^2+x+1 = t^2+2tx+x^2$ ili $x = \frac{t^2-1}{1-2t}$. Diferenciranjem nalzimo (provjerite!): $\mathrm{d}x = -2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}$. Prema tome, imamo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = -2\int \frac{t^2-t+1}{t(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \left[\frac{-2}{t} + \frac{3}{(2t-1)} - \frac{3}{(2t-1)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -2\ln|\, t \,| + \frac{3}{2}\ln|\, 2t-1 \,| + \frac{3}{2(2t-1)} + C$$

$$= -2\ln|\, \sqrt{x^2+x+1} - x \,| + \frac{3}{2}\ln|\, 2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1 \,|$$

$$+ \frac{3}{2(2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1)} + C$$

b) U ovom primjeru javlja se b) slučaj. Provjerite da su $x_1 = -1-\sqrt{2}$ i $x_2 = -1+\sqrt{2}$ nultočke kvadratne funkcije $x \mapsto 1-2x-x^2$. Uvedimo Eulerovu supstituciju:

$$\sqrt{1-2x-x^2} = \sqrt{(-1)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})} = t(x+1+\sqrt{2}).$$

Kvadriranjem dobivamo $(-1)(x+1-\sqrt{2}) = t^2(x+1+\sqrt{2})$, odakle je:

$$x = \frac{-t^2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1}{t^2+1}, \quad \sqrt{1-2x^2-x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{t^2+1}\,t,$$

$$1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{4\sqrt{2}\,t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Konačno dobivamo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = -4\sqrt{2}\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}\,t+1)}$$

$$= \int \left[-\frac{2}{t^2+1} + \frac{4}{t+\sqrt{2}-1} - \frac{4}{t+\sqrt{2}+1}\right]\mathrm{d}t$$

$$= -2\operatorname{arc\,tg} t + 4\,\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}-1}{t+\sqrt{2}+1}\right| + C$$

$$= -2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+\sqrt{2}+1}\right) + 4\,\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}-1}{\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

D) Integral oblika:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

gdje je P_m polinom m-tog stupnja ($m \geq 1$), možemo riješiti metodom neodređenih koeficijenata. Opišimo ovu metodu:

Stavimo:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdje su P_{m-1} nepoznati polinom $(m-1)$-vog stupnja i K kostanta. Deriviranjem obje strane gornjeg identiteta dobivamo:

$$\frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P'_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{(2ax+b)\cdot P_{m-1}(x)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

odakle nakon množenja s $\sqrt{ax^2+bx+c}$ imamo:

$$P_m(x) = P'_{m-1}(x)\cdot(ax^2+bx+c) + \left(ax+\frac{b}{2}\right)P_{m-1}(x) + K.$$

Uspoređivajući koeficijente istih potencija od x dolazimo do sustava $(m+1)$ linearnih jednadžbi s $(m+1)$ nepoznanica, iz kojeg određujemo koeficijente polinoma P_{m-1} i konstantu K.

Primjer 7.28 *Riješimo metodom neodređenih koeficijenata integral* $\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$:

Integral treba potražiti u obliku:

$$\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + D\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Deriviranjem gornjeg identiteta dobivamo:

$$\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{(Ax^2+Bx+C)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{D}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

odakle je $x^3-x-1 = (2Ax+B)(x^2+2x+2)+(Ax^2+Bx+C)(x+1)+D$. Uspoređivanjem koeficijenata uz iste potencije od x dobivamo sustav:

$$\begin{array}{lllll} 3A & & & & = \ \ 1 \\ 4A & +3B & +C & & = \ -1 \\ 5A & +2B & & & = \ \ 0 \\ & \ \ 2B & +C & +D & = \ -1, \end{array}$$

čije je rješenje: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{5}{6}$, $C=\frac{1}{6}$, $D=\frac{1}{2}$. Dakle,

$$\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Budući da je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \left| \begin{array}{c} x+1=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= \ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+1}\right) + C,$$

dobivamo:

$$\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+1}\right) + C.$$

Primjedba 7.13 *Zamijetite da se integral oblika:*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \text{ gdje je } m \in \mathbb{N}\,,$$

supstitucijom $\frac{1}{x-x_1} = t$ *svodi na integral oblika D (dokažite!).*

7.5.4 Integriranje trigonometrijskih funkcija

A) Pokažimo kako se može izračunati integral oblika:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x, \quad \text{gdje su } m,n \in \mathbb{N}\,.$$

1) Ako je $n = 2k+1$ neparan broj, onda supstitucijom $t = \sin x$ dobivamo:

$$\int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^m (1-t^2)^k\,\mathrm{d}t.$$

Posljednji integral se lako rješava, jer je podintegralna funkcija polinom u varijabli t.

Slično, ako je m neparan, onda supstitucijom $t = \cos x$ polazni integral prelazi u integral polinoma.

2) Brojevi $m = 2k$ i $n = 2l$ su parni. Integral ovog tipa može se svesti na prvi slučaj. Prvo pomoću trigonometrijskih formula:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}, \end{aligned}$$

podintegralnu funkciju zapišemo u obliku:

$$\sin^m x \sin^n x = (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^l = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l,$$

a zatim, nakon potenciranja, tranformiramo sve dok ne dobijemo samo neparne potencije funkcije *cos*.

Primjer 7.29 *Riješimo integral* $\int \sin^4 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\tfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1+\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{8}\int (1-\ \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Budući da je $\int \cos 2x \,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 2x}{2} + C$, $\int \cos^2 2x \,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1+\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \dfrac{\sin 4x}{8} + C$ i $\int \cos^3 2x \,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin 2x = t \\ 2\cos 2x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int (1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{6} + C = \dfrac{\sin 2x}{2} - \dfrac{\sin^3 2x}{6} + C$, dobivamo:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = & \ \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 2x}{6}\right)\right] + C \\ = & \ \frac{1}{16}\left[x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{3}\right] + C \end{aligned}$$

B) Integrale oblika:

$$\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x,$$

gdje su α i β realni brojevi, možemo riješiti pomoću trigonometrijskih formula (vidi *Zadatke za vježbu 2.2–2.8*):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha x)\sin(\beta x) &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right], \\ \sin(\alpha x)\cos(\beta x) &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right], \\ \cos(\alpha x)\cos(\beta x) &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right] \end{aligned}$$

Pri tome je potrebno znati sljedeće integrale:

$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C \ \ (a \neq 0), \qquad \int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax) + C \ \ (a \neq 0),$$

koji se lako rješavaju supstitucijom $t = ax$.

Primjer 7.30 *Riješimo integral* $\int \sin 2x \, \cos 3x \,\mathrm{d}x$:

Pomoću prve navedene trigonometrijske formule nalazimo:

$$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}[\sin(-x) + \sin 5x] = \frac{1}{2}(-\sin x + \sin 5x).$$

Integriranjem dobivamo:

$$\int \sin 2x \, \cos 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (-\sin x + \sin 5x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.$$

C) Integral oblika:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$$

gdje je R racionalna funkcija svojih argumenata, možemo supstitucijom $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ svesti na integral racionalne funkcije.

Zamijetite da iz $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ slijedi $x = 2\operatorname{arc\,tg} t$, odakle diferenciranjem dobivamo:

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Nadalje, prema poznatim trigonometrijskim formulama (vidi *Zadatke za vježbu 2.2–2.8*) imamo:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Dakle,

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Primjer 7.31 *Izračunajmo integral* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$:

Supstitucijom $t = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$ dobivamo:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2\,t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4\,t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{t(t^2-4\,t+3)}.$$

Rastav na parcijalne razlomke glasi (provjerite!):

$$\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} = \frac{1}{3t} + \frac{5}{3(t-3)} - \frac{1}{t-1}.$$

Dakle,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)} = \int\left[\frac{1}{3t}+\frac{5}{3(t-3)}-\frac{1}{t-1}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln|\,t\,| + \frac{5}{3}\ln|\,t-3\,| - \ln|\,t-1\,| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right| + C.$$

Zadaci za vježbu 7.5

1. Izračunajte sljedeće integrale racionalnih funkcija:

a) $\int \frac{x-1}{x^2}\mathrm{d}x$	b) $\int \frac{x^3-2x}{x+1}\mathrm{d}x$	c) $\int \frac{x^3+2x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$
d) $\int \frac{3x+4}{x^3-2x^2-3x}\mathrm{d}x$	e) $\int \frac{x^3+4x^2-5x-4}{x^3+3x^2-x-3}\mathrm{d}x$	f) $\int \frac{2x^3+5x^2-2x+16}{x^4-2x^2-8}\mathrm{d}x$
g) $\int \frac{5x-4}{3x^2-4x+2}\mathrm{d}x$	h) $\int \frac{3x-1}{(x^2-2x+2)^2}\mathrm{d}x$	i) $\int \frac{x^3-x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}\mathrm{d}x.$

Rješenje: a) $\ln\mid x\mid+\frac{1}{x}+C$, b) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+\ln\mid x+1\mid+C$, c) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg}x+C$, d) $-\frac{4}{3}\ln\mid x\mid+\frac{13}{12}\ln\mid x-3\mid+\frac{1}{4}\ln\mid x+1\mid+C$, e) $x+\frac{5}{2}\ln\mid x+3\mid-\frac{1}{2}\mid x-1\mid-\ln\mid x+1\mid+C$, f) $\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x+2}\right|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$, g) $\frac{5}{6}\ln\mid 3x^2-4x+2\mid-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}\right)+C$, h) $\frac{2x+5}{2(x^2-2x+2)}+\operatorname{arc\,tg}(x-1)+C$,
i) $\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\ln\mid x^2-x+1\mid+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

2. Riješite binomne integrale:

   a) $\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}\mathrm{d}x$ b) $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$ c) $\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}\mathrm{d}x$
   d) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$ e) $\int x^3(1+x^2)^{1/2}\mathrm{d}x$ f) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

   Rješenje: a) $3\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C$, b) $2(1+x^{1/3})^{3/2}+C$, c) $\frac{2}{3}\left(2+x^{2/3}\right)^{9/4}-\frac{12}{5}\left(2+x^{2/3}\right)^{5/4}+C$, d) $3\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+C$, e) $\frac{(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)}{15}+C$, f) $\frac{\sqrt{1+x^2}(2x^2-1)}{3x^3}+C$.

3. Izračunajte integrale:

   a) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\mathrm{d}x$ b) $\int\frac{(2x-3)^{1/2}}{(2x-3)^{1/3}+1}\mathrm{d}x$ c) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}$.

   Rješenje: a) $4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\mid\sqrt[12]{x}-1\mid+C$,
   b) $3\left[\frac{1}{7}(2x-3)^{7/6}-\frac{1}{5}(2x-3)^{5/6}+\frac{1}{3}(2x-3)^{1/2}-(2x-3)^{1/6}+\operatorname{arc\,tg}(2x-3)^{1/6}\right]+C$,
   c) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{\sqrt[3]{(t+2)^4}}{\sqrt[3]{t-1}\sqrt{t^2+t+1}}\right|+C$, gdje je $t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$.

4. Eulerovim supstitucijama izračunajte integrale:

   a) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$ b) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}-1}$ c) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$.

   Rješenje:
   a) $2\ln\mid\sqrt{x^2+2x+4}-x\mid-\frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1)}-\frac{3}{2}\ln\mid\sqrt{x^2+2x+4}-x-1\mid+C$,
   b) $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$, c) $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C$.

5. Riješite integrale:

   a) $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\mathrm{d}x$ b) $\int\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}\mathrm{d}x$ c) $\int\frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\mathrm{d}x$.

   Rješenje: a) $\frac{1}{3}(x^2-14x+11)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\mid x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\mid+C$,
   b) $\frac{1}{64}(32x^2-20x-373)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln\mid 4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\mid+C$,
   c) $\frac{3x^2+x-1}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}+C$.

6. Riješite integrale:

a) $\int \sin^2 x \cos^3 x \mathrm{d}x$ b) $\int \sin^3 x \cos^4 x \mathrm{d}x$ c) $\int \cos^3 x \sin^3 x \mathrm{d}x$
d) $\int \sin^5 2x \mathrm{d}x$ e) $\int \mathrm{tg}^3 x \mathrm{d}x$ f) $\int \sin^3 x \mathrm{tg}^2 x \mathrm{d}x$.

Rješenje: a) $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$, b) $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$, c) $\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$, d) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \frac{2}{3}\cos^3 2x + \frac{1}{5}\cos^5 2x\right) + C$, e) $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C$, f) $\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos^3 x}{3} + 2\cos x + C$.

7. Dokažite rekurzivne formule:

   (a) $I_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

   (b) $I_n = \int \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

8. Riješite integrale:

   a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\cos x + 5\sin x + 1}$ b) $\int \frac{\sin x + 2\cos x}{1 + \cos x} \mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4\cos x + 3\sin x} \mathrm{d}x$

   Rješenje: a) $\frac{1}{7} \ln \left| \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3} \right| + C$, b) $2x - 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2\ln\left|\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\right| + C$, c) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2 - \mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$,

8. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Teorija diferencijalnih jednadžbi obično se obrađuje kao zaseban dio teorije infinitezimalnog računa. Dijeli se na teoriju običnih i teoriju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Nas će zanimati samo obične diferencijalne jednadžbe prvog reda. Navedimo definicije:

Svaku jednadžbu koja sadrži nezavisnu varijablu x, nepoznatu funkciju y i njene derivacije ili diferencijale nazivamo **običnom diferencijalnom jednadžbom** ili kraće **diferencijalnom jednadžbom.**

Redom diferencijalne jednadžbe nazivamo red najviše derivacije ili diferencijala u jednadžbi. Tako su npr. $y' = 2x$ i $\mathrm{d}y = \cos x \, \mathrm{d}x$ diferencijalne jednadžbe prvog reda, a $y'' - 2xy' = 5$ i $y'' = -\sin x$ diferencijalne jednadžbe drugog reda.

U najopćenitijem slučaju diferencijalnu jednadžbu prvog reda možemo zapisati u obliku:

$$\phi(y', y, x) = 0, \tag{8.1}$$

gdje je ϕ realna funkcija svojih argumenata.

Funkciju $y : I \to \mathbb{R}$ nazivamo **rješenjem** diferencijalne jednadžbe (9.1) na intervalu I, ako je $\phi(y', y, x) = 0$ za svaki $x \in I$. Riješiti diferencijalnu jednadžbu na intervalu I znači pronaći skup svih rješenja te jednadžbe. Jasno, kad god je moguće, dobro je pronaći rješenje na što većem intervalu.

Ako postoji funkcija F takva da se svako rješenje jednadžbe (9.1) može zapisati u obliku:

$$y = F(x, C) \tag{8.2}$$

za neku vrijednost konstante C, onda (9.2) nazivamo **općim rješenjem** ili **općim integralom** diferencijalne jednadžbe (9.1).

Geometrijski opće rješenje diferencijalne jednadžbe predstavlja familiju krivulja. Te krivulje nazivamo **integralnim krivuljama**. Različitim vrijednostima konstante C odgovaraju različite integralne krivulje. Tako su npr. na *Slici 8.1* prikazane integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $y' = 2x$.

Cauchyjev problem:

> Neka su $x_0 \in I$ i y_0 realni brojevi. Treba pronaći ono rješenje diferencijalne jednadžbe (9.1) koje zadovoljava početni uvjet: $y(x_0) = y_0$. Ako takvo rješenje postoji, nazivamo ga **posebnim** ili **partikularnim rješenjem**.

Prirodno se postavljaju sljedeći problemi:

a) *problem egzistencije* rješenja, tj. da li jednadžba (9.1) ima rješenje.

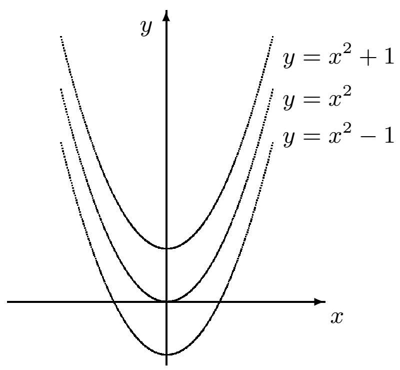
b) *problem jedinstvenosti* partikularnog rješenja, tj. koji su uvjeti potrebni da bi Cauchyjev problem imao jedinstveno rješenje.

c) *efektivno nalaženje* rješenja.

Odgovor na ova pitanja zahtijeva opsežniji pristup teoriji diferencijalnih jednadžbi od pristupa u ovoj knjizi. Mi ćemo obraditi samo nekoliko jednostavnijih tipova diferencijalnih jednadžbi, čija se rješenja mogu lako pronaći.

Primjer 8.1 *Riješimo diferencijalnu jednadžbu* $y' = 2x$:

U ovom primjeru radi se o diferencijalnoj jednadžbi prvog reda. Integriranjem dobivamo opće rješenje: $y = x^2 + C$. Geometrijski ovo opće rješenje predstavlja familiju parabola (*Slika 8.1*) koje se mogu dobiti translacijom jedne parabole uzduž y-osi.



Slika 8.1. Integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $y' = 2x$.

Tako npr. partikularno rješenje čiji graf prolazi točkom $(0, 1)$ dobivamo tako da u opće rješenje za konstantu C uvrstimo vrijednost $C = 1$.

Primjer 8.2 *Odredimo integralne krivulje diferencijalne jednadžbe* $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$:
Zamijetite da ovu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^2+y^2)=0,$$

odakle dobivamo:

$$x^2+y^2=C^2.$$

Dakle, integralne krivulje ove diferencijalne jednadžbe su koncentrične kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava u ravnini.

Za razliku od integralnih krivulja iz *Primjera 9.1* ove kružnice ne mogu se dobiti translacijom duž y-osi jedne kružnice.

8.1 Postavljanje diferencijalnih jednadžbi

Sa stajališta praktične primjene teorija diferencijalnih jednadžbi jedno je od najvažnijih grana matematike. Tako su npr. mnogi fizikalni zakoni iskazani upravo preko diferencijalnih jednadžbi. U posljednje vrijeme diferencijalne jednadžbe nalaze svoju primjenu i u drugim prirodnim (npr. kemija i biologija), kao i u društvenim znanostima (npr. ekonomija, psihologija i sociologija). Osnovni problem koji se ovdje javlja jeste kako postaviti odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu koja će opisivati neku pojavu ili proces.

Prilikom postavljanja diferencijalne jednadžbe prvog reda korisno je primjeniti tzv. **metodu diferencijala.** Ova metoda sastoji se u tome da se približni odnosi između neizmjerno malog prirasta Δx nezavisne varijable i neizmjerno malog prirasta Δy zavisne varijable, koji su točniji što su prirasti manji, zamijene pripadnim odnosima između njihovih diferencijala $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$.

Ilustrirajmo rečeno na primjerima.

Primjer 8.3 *Neka je $M(t)$ masa stabla u trenutku t. Nakon kratkog vremena Δt masa poraste za $\Delta M = M(t+\Delta t) - M(t)$. Pretpostavimo li da je taj prirast proporcionalan proteklom vremenu Δt i trenutnoj masi $M(t)$, dobivamo jednadžbu:*

$$\Delta M = k\,M(t)\,\Delta t,$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti, koji ovisi o vrsti drveta.

Prijelazom na diferencijale dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{d}M = k\,M\,\mathrm{d}t,$$

koja opisuje rast mase drveta.

Primjer 8.4 *U rezervoaru ima* 50 l *vodene otopine od* 5 kg *soli. U trenutku* $t = 0$ *otopina koncentracije* $c_u = 1$ kg/l *počne utjecati u rezervoar brzinom od* $v_u = 4$ l *u minuti, pri čemu se miješanjem otopina održava jednolika koncentracija smjese. U istom trenutku smjesa iz rezervoara počne istjecati brzinom od* $v_i = 2$ l *u minuti.*

Napišimo diferencijalnu jednadžbu koja će opisati količinu soli u ovisnosti o vremenu:

Neka je y količina soli (u kilogramima) koja se nalazi u rezervoaru nakon istjeka t minuta. Budući da otopina utječe brzinom $v_u = 4$ l/min, a smjesa istječe brzinom $v_i = 2$ l/min, rezervoar nakon t minuta sadrži $50 + 2t$ litara otopine koncentracije $c = \dfrac{y}{50+2t}$ kg/l. Dakle, koncentracija c mijenja se tijekom vremena. Što je vremenski razmak Δt manji to su manje i promjene u koncentraciji. Nakon kratkog vremena Δt količina soli u rezervoaru promijeni se za iznos $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$. Ako unutar vremenskog intervala $[t, t + \Delta t]$ koncentraciju smjese u rezervoaru aproksimiramo sa $c = \dfrac{y}{50+2t}$, onda dobivamo:

$$\Delta y \approx (v_u c_u - v_i c)\Delta t = \left(4 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{y}{50+2t}\right) \Delta t.$$

Prijelazom na diferencijale ta približna veza postaje točnom, tj. dobivamo:

$$\mathrm{d}y = \left(4 - \frac{y}{25+t}\right) \mathrm{d}t,$$

Ovu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{25+t} y = 4.$$

8.2 Osnovni tipovi diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Okvir ove knjige dopušta nam proučavanje samo nekih tipova diferencijalnih jednadžbi, čije rješenje možemo dobiti jednostavnim metodama svođenja na računanje neodređenog integrala.

8.2.1 Diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama

U ovaj tip ubrajamo one diferencijalne jednadžbe koje se nakon različitih transformacija mogu zapisati u obliku:

$$\boxed{P(x)\,\mathrm{d}x = Q(y)\,\mathrm{d}y.}$$

U toj jednadžbi varijable su **separirane** (razdvojene): sa svake strane jednadžbe stoji diferencijal jedne varijable i funkcija te varijable. Nakon separacije varijabli opće rješenje diferencijalne jednadžbe dobivamo integriranjem:

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \int Q(y)\,\mathrm{d}y + C$$

Primjer 8.5 *Riješimo diferencijalnu jednadžbu iz* Primjera 9.3*:*

Kada separiramo varijable dobivamo:

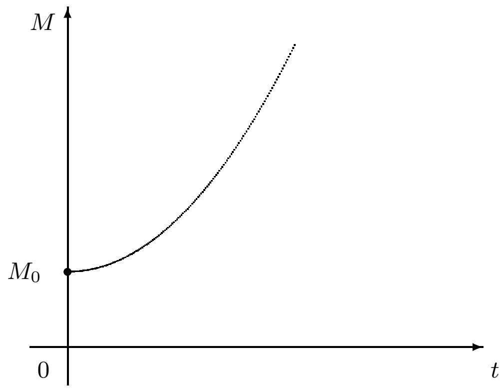
$$\frac{\mathrm{d}M}{M} = k\,\mathrm{d}t.$$

Integriranjem imamo $\ln M = k\,t + \ln C$, gdje je $\ln C$ konstanta integracije izražena pomoću logaritma. Antilogaritmiranjem prethodnog izraza dobivamo:

$$M = C \cdot e^{kt}.$$

Ako je u trenutku $t = 0$ masa bila M_0, onda iz gornje jednadžbe slijedi $C = M_0$. Dakle, uz navedene pretpostavke masa stabla eksponencijalno raste po zakonu:

$$M = M_0\, e^{kt}.$$



Slika 8.2. Graf funkcije $t \mapsto M_0 e^{kt}$ *($k > 0$)*

Budući da masa stabla postaje neizmjerno velika ($M \to \infty$ kada $t \to \infty$), ovaj model nije dobar za duže vremensko razdoblje. Jedna mogućnost „popravke" ovog modela dana je u sljedećem primjeru.

Primjer 8.6 *Malthusova teorija o neograničenom rastu populacije, zapisana u obliku diferencijalne jednadžbe, glasi:*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha y,\ \alpha > 0,$$

gdje su t *– vrijeme,* $y = y(t)$ *– veličina populacije u trenutku* t *i* α *– konstanta proporcionalnosti. Ta jednadžba kaže da je brzina rasta populacije u svakom trenutku* t *proporcionalna veličini populacije. Njeno opće rješenje glasi (vidi prethodni primjer):*

$$y = C \cdot \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Ako pretpostavimo ograničenost životnog prostora i izoliranost populacije, koja se snabdjeva hranom i ostalim potrebštinama samo sa te ograničene teritorije, onda populacija ne može rasti neizmjerno. Stoga Verhulst uzima drugu pretpostavku:

brzina rasta populacije u svakom trenutku t proporcionalna je veličini populacije $y(t)$ i još neiskorištenom životnom potencijalu $A - y(t)$, gdje je A razina zasićenja tj. maksimalna veličina populacije.

Verhulstovoj pretpostavci odgovara diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha\, y\,(A - y)\ , \alpha > 0.$$

Ovu diferencijalnu jednadžbu riješit ćemo separacijom varijabli:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(A-y)} = \alpha \mathrm{d}t.$$

Integriranjem lijeve strane dobivamo (bez konstante integracije):

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(A-y)} = \frac{1}{A} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-A} \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{y}{y-A} \right| ,$$

dok integral desne strane glasi:

$$\int \alpha\, \mathrm{d}t = \alpha\, t - \frac{\ln b}{A},$$

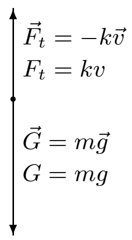
gdje je $\frac{\ln b}{A}$*,* $b > 0$*, integraciona konstanta. Dakle,* $\frac{1}{A} \ln \left| \frac{y}{y-A} \right| = \alpha t - \frac{\ln b}{A}$*. Budući da je prema pretpostavci* $0 < y < A$*, imamo* $\frac{1}{A} \ln \left(\frac{y}{A-y} \right) = \alpha t - \frac{\ln b}{A}$*, odakle uz oznaku* $c = \alpha\, A$ *antilogaritmiranjem dobivamo* $\frac{b\, y}{A-y} = e^{ct}$*. Konačno, rješavanjem po* y *dobivamo:*

$$y = \frac{A}{1 + b\, \mathrm{e}^{-ct}}.$$

To je dobro znana logistička funkcija (vidi Primjer 2.51*).*

Primjer 8.7 *Eksperimentalnim putem ustanovljeno je da je kod slobodnog pada na malim visinama od površine tla otpor zraka proporcionalan brzini tijela. Odredimo brzinu v tijela mase m koje je počelo slobodno padati u trenutku $t = 0$.*

Neka su $\vec{v}$ brzina tijela, $\vec{G} = m\vec{g}$ gravitaciona sila i $\vec{F}_t = k\vec{v}$ sila otpora zraka, gdje je $k > 0$ konstanta proporcionalnosti koja ovisi o tijelu. Brzina tijela i gravitaciona sila usmjereni su prema središtu Zemlje, dok je sila otpora zraka suprotnog smjera (*Slika 8.3*).



Slika 8.3.

Prema drugom Newtonovom zakonu mehanike, pisanom u skalarnom obliku, imamo diferencijalnu jednadžbu:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv,$$

gdje je $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ akceleracija tijela. Negativan predznak kod člana kv dolazi zbog toga što otpor zraka djeluje u suprotnom smjeru od smjera brzine kretanja tijela.

Separacijom varijabli dobivamo:

$$\frac{m\,\mathrm{d}v}{mg - kv} = \mathrm{d}t.$$

Nakon integriranja imamo:

$$-\frac{m}{k}\ln \mid mg - kv \mid = t + C.$$

Budući da je $v = 0$ u trenutku $t = 0$, dobivamo vrijednost integracione konstante: $C = -(m/k) \cdot \ln(mg)$. Dakle:

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{m}{k}\ln \mid mg - kv \mid = t - \tfrac{m}{k}\ln(mg),\\
&\ln \mid mg - kv \mid = -\tfrac{k}{m}t + \ln(mg),\\
&\mid mg - kv \mid = mge^{-kt/m}.
\end{aligned}$$

Iz fizikalnih razloga je $mg - kv \geq 0$ (u suprotnom bi se tijelo uspinjalo) pa možemo izostaviti znak apsolutne vrijednosti. Dobivamo $mg - kv = mge^{-kt/m}$, odnosno

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Zamijetite da $v \to \frac{mg}{k}$ kada $t \to \infty$. To znači da će od nekog dovoljno velikog trenutka t pa nadalje tijelo padati s brzinom $v \approx \frac{mg}{k}$.

Izvedite formulu u kojoj će se vidjeti ovisnost prijeđenog puta s o vremenu t.

8.2.2 Homogene diferencijalne jednadžbe

Svaku diferencijalnu jednadžbu prvog reda koju možemo zapisati u obliku:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

nazivamo **homogenom diferencijalnom jednadžbom prvog reda**.

Primjedba 8.1 *Funkcija ϕ definirana formulom $\phi(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ispunjava uvjet:*

$$\phi(tx, ty) = \phi(x, y) \qquad \text{(za svaki realan broj } t \neq 0\text{)},$$

koji je poznat pod nazivom **homogenost**. *Od tuda dolazi ime homogene diferencijalne jednadžbe.*

Stavimo li $y = z\,x$, gdje je z nova varijabla, i uzmemo li u obzir da je tada $y' = x\,z' + z$, polazna diferencijalna jednadžba prelazi u novu:

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z = f(z),$$

u kojoj možemo separirati varijable:

$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Za $f(z) - z = 0$ imamo diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{y}{x}$, čije opće rješenje glasi $y = Cx$.

Primjer 8.8 *Riješimo diferencijalne jednadžbe: a) $y' = \dfrac{y+x}{x}$, b) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.*

a) Supstitucijom $y = zx$, odnosno $z = \frac{y}{x}$ polaznu diferencijalnu jednadžbu svodimo na

$$z + xz' = z + 1, \text{ odnosno } \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Integriranjem dobivamo: $z = \ln \mid x \mid + \ln C$, gdje je $C > 0$. Dakle, opće rješenje glasi:

$$y = x \ln \mid Cx \mid .$$

b) Ako brojnik i nazivnik desne strane jednadžbe podijelimo s x, dobivamo:

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}},$$

odakle vidimo da se radi o homogenoj diferencijalnoj jednadžbi. Stoga uvodimo supstituciju $z = \frac{y}{x}$. Kao što smo pokazali, tada je $y' = z + xz'$. Zamijenimo lijevu strane jednadžbe s $z + xz'$, a desnu s $\frac{1+z}{1-z}$:

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z}.$$

Separacijom varijabli x i z dobivamo (provjerite!):

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1-z}{1+z^2}\mathrm{d}z.$$

Integriranjem nalazimo:

$$\ln |\, x \,| = \int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} - \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{1+z^2},$$

$$\ln |\, x \,| = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + \ln C, \quad C > 0,$$

odakle antilogaritmiranjem imamo:

$$|\, x \,| \sqrt{1+z^2} = C\, e^{\operatorname{arc\,tg} z}.$$

Uvrštenjem $z = \frac{y}{x}$ dobivamo traženo opće rješenje u implicitnom obliku:

$$\sqrt{x^2+y^2} = C\, e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}.$$

8.2.3 Linearne diferencijalne jednadžbe

Diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x),}$$

gdje su f i g neke funkcije, nazivamo **linearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda.** Nepoznata funkcija y i njena derivacija y' ulaze linearno, tj. s prvom potencijom.

Ako jednadžbu pomnožimo s $e^{\int f(x)dx}$ dobivamo:

$$[y' + f(x)y]\, e^{\int f(x)dx} = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

Budući da je $(y' + yf(x))e^{\int f(x)dx} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{\int f(x)dx}\right)$ možemo pisati:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{\int f(x)dx}\right) = g(x)e^{\int f(x)dx},$$

odakle integriranjem dobivamo:

$$ye^{\int f(x)dx} = \int g(x)e^{\int f(x)dx}\mathrm{d}x + C.$$

Dakle, opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe glasi:

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)e^{\int f(x)dx}\mathrm{d}x + C\right]$$

Primjer 8.9 *Riješimo diferencijalnu jednadžbu* $xy' + y = x\cos x^2$:
Ako jednadžbu podijelimo s x dobivamo:

$$y' + \frac{1}{x}y = \cos x^2.$$

U ovom primjeru je $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \cos x^2$. Nadalje je $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x$, $e^{\int f(x)dx} = e^{\ln x} = x$, i $e^{-\int f(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$. Uvrštenje tih vrijednosti u opće rješenje daje:

$$y = \frac{1}{x}\left[\int x\cos x^2\,\mathrm{d}x + C\right],$$

a kako je $\int x\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin x^2$, traženo opće rješenje glasi:

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{\sin x^2}{2} + C\right).$$

Primjer 8.10 *U* Primjeru 9.4 *treba pronaći količinu soli u rezervoaru nakon* $t = 25$ *minuta:*

Opće rješenje linearne diferancijalne jednadžbe dobivene u *Primjeu 9.4* glasi (provjerite):

$$y = \frac{1}{25+t}(100t + 2t^2 + C).$$

U trenutku $t = 0$ je $y = 5$ kg. Uvrštenjem tih vrijednosti u opće rješenje dobivamo $C = 125$. Dakle,

$$y = \frac{1}{25+t}(2t^2 + 100t + 125),$$

odakle za $t = 25$ dobivamo $y = 77.5\,\mathrm{kg}$.

Primjer 8.11 *Diferencijalnu jednadžbu prvog reda oblika:*

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

nazivamo **Bernoullijevom jednadžbom.** *Za* $\alpha = 0$ *ova jednadžba prelazi u linearnu, a za* $\alpha = 1$ *možemo je riješiti metodom separacije varijabli. Pokažimo da se ova jednadžba za* $\alpha \neq 0$ *i* $\alpha \neq 1$ *supstitucijom* $z = y^{1-\alpha}$ *svodi na linearnu jednadžbu.*

Neka je $z = y^{1-\alpha}$. Tada je $y = z^{1/(1-\alpha)}$ i $y' = \dfrac{1}{1-\alpha} z^{\alpha/(1-\alpha)} z'$. Uvrštavanjem ovih vrijednosti u Bernoullijevu jednadžbu dobivamo:

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\alpha/(1-\alpha)} z' + f(x) z^{1/(1-\alpha)} = g(x) z^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

Množenjem sa $z^{1/(1-\alpha)}$ dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$z' + (1-\alpha) f(x) z = (1-\alpha) g(x).$$

Zadaci za vježbu 8.1-8.2

1. Metodom separacije varijabli riješite diferencijalne jednadžbe:

   a) $y' = x^2 y^2$ b) $y' = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 x}$ c) $y' = x^2 + x^2 y^2$
   d) $xyy' = 1 - x^2$ e) $y\,dx = x\,dy$ f) $xy' - y = y^3$.

   Rješenje: a) $\dfrac{1}{y} = -\dfrac{x^3}{3} + C$ i $y = 0$, b) $-\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg} x + C$, c) $\operatorname{arc\,tg} y = \dfrac{1}{3}x^3 + C$, d) $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$, e) $x = Cy$, f) $x = \dfrac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$ i $y = 0$.

2. Riješite homogene diferencijalne jednadžbe:

   a) $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ b) $x\,dy = (x+y)dx$ c) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$
   d) $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ e) $y' = \frac{4x+y}{x+y}$ f) $\frac{xy'-y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

   Rješenje: a) $Cx\left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\right) = 1$, b) $y = x(\ln \mid x \mid + C)$, c) $y^2 = x^2(\ln x^2 + C)$, d) $e^{y/x} = \dfrac{-1}{\ln \mid x \mid + C}$, e) $3 \ln \mid y - 2x \mid + \ln \mid y + 2x \mid = C$, f) $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

3. Riješite linearne diferencijalne jednadžbe:

   a) $y' - xy = 0$ b) $y' + y = 3e^x$ c) $y' + 2y = xe^{-2x} + 3$
   d) $(x^2+x+1)y' + 2(2x+1)y = x$ e) $(x+x^3)y' + 4yx^2 = 2$ f) $xy' + y = \operatorname{ctg} x$.

   Rješenje: a) $y = Ce^{x^2/2}$, b) $y = Ce^{-x} + \dfrac{3}{2}e^x$, c) $y = Ce^{-2x} + \dfrac{x^2}{2}e^{-2x} + \dfrac{3}{2}$, d)$(x^2+x+1)^2 y = x^4/4 + x^3/3 + x^2/2 + C$, e) $(1+x^2)y - 2\ln \mid x \mid - y^2 = C$, f) $xy - \ln \mid \sin x \mid = C$.

4. Riješite Cauchyjev problem:

   a) $y' = \frac{x}{y}$, $y(2) = -3$ b) $y' = \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$, $y(\pi) = 0$ c) $x^2 y' - (x+1)y = x$, $y(1) = -2$.

   Rješenje: a) $y^2 = x^2 + 5$, b) $\dfrac{1}{\cos\frac{y}{x}} + \operatorname{tg}\frac{y}{x} = \dfrac{x}{\pi}$, c) $y = -x(1 + e^{1-1/x})$.

5. Riješite Bernoullijeve jednadžbe:

a) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ b) $xy' + y = 2xy^2$.

Rješenje: a) $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln \mid x \mid +C\right)^2$, b) $2xy(C - \ln \mid x \mid) = 1$.

6. Sila otpora zraka pri padanju tijela s padobranom proporcionalna je kvadratu brzine padanja. Nađite graničnu brzinu padanja.

   Uputa: Treba riješiti jednadžba gibanja $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$, uz početni uvjet $v(0) = 0$.

7. Pretpostavimo da broj stanovnika neke države, kao funkcija vremena, u nekom vremenskom intervalu $[0, T]$ raste po zakonu $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP + I$, pri čemu konstanta I predstavlja brzinu migracije (za $I < 0$ imamo emigraciju, a za $I > 0$ imigraciju) a konstanta r mjeri brzinu prirodnog prirasta. Riješite ovu diferencijalnu jednadžbu uz početni uvjet $P(0) = P_0$.

   Rješenje: Broj stanovnika raste eksponencijalno po formuli: $P(t) = \left(P_0 + \frac{I}{r}\right)e^{rt} - \frac{I}{r}$, $t \in [0, T]$.

Literatura:

[1] D. D. Berkey, *Single Variable Calculus,* CBS college Publishing, 1984.

[2] B. P. Demidovič, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1968.

[3] J. B. Fraleighh, *Calculus with Analytic Geometry,* Addison-Wesley, Reading, Mass. 1985.

[4] M. Golomb, M. Shanks,*Elements of Ordinary Differential Equations,*McGraw-Hill, New York, 1965.

[5] N. B. Haaser, J. P. LaSalle, J. A. Sullivan, *Intermediate Analysis I,II,* Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.

[6] S. O. Hockett, M. Sternstein, *Applied Calculus–a goals approach,* D. Van Nostrand, New York, 1979.

[7] L. D. Hoffmann, *Calculus for the Social, Managerial and Life Sciences,* McGraw-Hill, New York, 1980.

[8] P. Javor, *Uvod u matematičku analizu,* Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[9] S. Kurepa, *Matematička analiza I, II,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[10] S. Mardešić, *Matematička analiza u n- dimenzionalnom realnom prostoru I,* Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[11] L. A. Maron, *Problems in Calculus of One Variable,*, Mir, Moskva, 1988.

[12] A. Mizrahi, M. Sullivan, *Calculus with Applications to Business and Life Sciences,* John Wiley & Sons, New York, 1984.

[13] S. M. Nikolsky, *A Course of Mathematical Analysis,* Mir, Moskva, 1981.

[14] R. Scitovski, R. Galić, M. Šilac-Benšić, *Numerička matematika. Vjerojatnost i statistika,* Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1993.

[15] S. K. Stein, *Calculus and Analytic Geometry,* McGraw-Hill, New York, 1973.

[16] B. K. Youse, *Calculus for the Managerial, Social, and Life Sciences,* West Publishing Co., St. Paul, 1984.

Sadržaj:

9. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Teorija diferencijalnih jednadžbi obično se obrađuje kao zaseban dio teorije infinitezimalnog računa. Dijeli se na teoriju običnih i teoriju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Nas će zanimati samo obične diferencijalne jednadžbe prvog reda. Navedimo definicije:

Svaku jednadžbu koja sadrži nezavisnu varijablu x, nepoznatu funkciju y i njene derivacije ili diferencijale nazivamo **običnom diferencijalnom jednadžbom** ili kraće **diferencijalnom jednadžbom.**

Redom diferencijalne jednadžbe nazivamo red najviše derivacije ili diferencijala u jednadžbi. Tako su npr. $y' = 2x$ i $\mathrm{d}y = \cos x \, \mathrm{d}x$ diferencijalne jednadžbe prvog reda, a $y'' - 2xy' = 5$ i $y'' = -\sin x$ diferencijalne jednadžbe drugog reda.

U najopćenitijem slučaju diferencijalnu jednadžbu prvog reda možemo zapisati u obliku:

$$\phi(y', y, x) = 0, \tag{9.1}$$

gdje je ϕ realna funkcija svojih argumenata.

Funkciju $y : I \to \mathbb{R}$ nazivamo **rješenjem** diferencijalne jednadžbe (9.1) na intervalu I, ako je $\phi(y', y, x) = 0$ za svaki $x \in I$. Riješiti diferencijalnu jednadžbu na intervalu I znači pronaći skup svih rješenja te jednadžbe. Jasno, kad god je moguće, dobro je pronaći rješenje na što većem intervalu.

Ako postoji funkcija F takva da se svako rješenje jednadžbe (9.1) može zapisati u obliku:

$$y = F(x, C) \tag{9.2}$$

za neku vrijednost konstante C, onda (9.2) nazivamo **općim rješenjem** ili **općim integralom** diferencijalne jednadžbe (9.1).

Geometrijski opće rješenje diferencijalne jednadžbe predstavlja familiju krivulja. Te krivulje nazivamo **integralnim krivuljama**. Različitim vrijednostima konstante C odgovaraju različite integralne krivulje. Tako su npr. na *Slici 8.1* prikazane integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $y' = 2x$.

Cauchyjev problem:

> Neka su $x_0 \in I$ i y_0 realni brojevi. Treba pronaći ono rješenje diferencijalne jednadžbe (9.1) koje zadovoljava početni uvjet: $y(x_0) = y_0$. Ako takvo rješenje postoji, nazivamo ga **posebnim** ili **partikularnim rješenjem**.

Prirodno se postavljaju sljedeći problemi:

a) *problem egzistencije* rješenja, tj. da li jednadžba (9.1) ima rješenje.

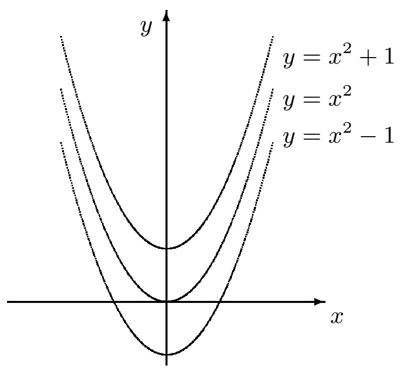
b) *problem jedinstvenosti* partikularnog rješenja, tj. koji su uvjeti potrebni da bi Cauchyjev problem imao jedinstveno rješenje.

c) *efektivno nalaženje* rješenja.

Odgovor na ova pitanja zahtijeva opsežniji pristup teoriji diferencijalnih jednadžbi od pristupa u ovoj knjizi. Mi ćemo obraditi samo nekoliko jednostavnijih tipova diferencijalnih jednadžbi, čija se rješenja mogu lako pronaći.

Primjer 9.1 *Riješimo diferencijalnu jednadžbu* $y' = 2x$:

U ovom primjeru radi se o diferencijalnoj jednadžbi prvog reda. Integriranjem dobivamo opće rješenje: $y = x^2 + C$. Geometrijski ovo opće rješenje predstavlja familiju parabola (*Slika 8.1*) koje se mogu dobiti translacijom jedne parabole uzduž y-osi.



Slika 8.1. Integralne krivulje diferencijalne jednadžbe $y' = 2x$.

Tako npr. partikularno rješenje čiji graf prolazi točkom $(0, 1)$ dobivamo tako da u opće rješenje za konstantu C uvrstimo vrijednost $C = 1$.

Primjer 9.2 *Odredimo integralne krivulje diferencijalne jednadžbe* $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$:
Zamijetite da ovu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^2 + y^2) = 0,$$

odakle dobivamo:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Dakle, integralne krivulje ove diferencijalne jednadžbe su koncentrične kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava u ravnini.

Za razliku od integralnih krivulja iz *Primjera 9.1* ove kružnice ne mogu se dobiti translacijom duž y-osi jedne kružnice.

9.1 Postavljanje diferencijalnih jednadžbi

Sa stajališta praktične primjene teorija diferencijalnih jednadžbi jedno je od najvažnijih grana matematike. Tako su npr. mnogi fizikalni zakoni iskazani upravo preko diferencijalnih jednadžbi. U posljednje vrijeme diferencijalne jednadžbe nalaze svoju primjenu i u drugim prirodnim (npr. kemija i biologija), kao i u društvenim znanostima (npr. ekonomija, psihologija i sociologija). Osnovni problem koji se ovdje javlja jeste kako postaviti odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu koja će opisivati neku pojavu ili proces.

Prilikom postavljanja diferencijalne jednadžbe prvog reda korisno je primjeniti tzv. **metodu diferencijala.** Ova metoda sastoji se u tome da se približni odnosi između neizmjerno malog prirasta Δx nezavisne varijable i neizmjerno malog prirasta Δy zavisne varijable, koji su točniji što su prirasti manji, zamijene pripadnim odnosima između njihovih diferencijala $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$.

Ilustrirajmo rečeno na primjerima.

Primjer 9.3 *Neka je $M(t)$ masa stabla u trenutku t. Nakon kratkog vremena Δt masa poraste za $\Delta M = M(t + \Delta t) - M(t)$. Pretpostavimo li da je taj prirast proporcionalan proteklom vremenu Δt i trenutnoj masi $M(t)$, dobivamo jednadžbu:*

$$\Delta M = k\, M(t)\, \Delta t,$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti, koji ovisi o vrsti drveta.

Prijelazom na diferencijale dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$\mathrm{d}M = k\, M\, \mathrm{d}t,$$

koja opisuje rast mase drveta.

Primjer 9.4 *U rezervoaru ima* 50 l *vodene otopine od* 5 kg *soli. U trenutku* $t = 0$ *otopina koncentracije* $c_u = 1$ kg/l *počne utjecati u rezervoar brzinom od* $v_u = 4$ l *u minuti, pri čemu se miješanjem otopina održava jednolika koncentracija smjese. U istom trenutku smjesa iz rezervoara počne istjecati brzinom od* $v_i = 2$ l *u minuti.*

Napišimo diferencijalnu jednadžbu koja će opisati količinu soli u ovisnosti o vremenu:

Neka je y količina soli (u kilogramima) koja se nalazi u rezervoaru nakon istjeka t minuta. Budući da otopina utječe brzinom $v_u = 4$ l/min, a smjesa istječe brzinom $v_i = 2$ l/min, rezervoar nakon t minuta sadrži $50 + 2t$ litara otopine koncentracije $c = \dfrac{y}{50+2t}$ kg/l. Dakle, koncentracija c mijenja se tijekom vremena. Što je vremenski razmak Δt manji to su manje i promjene u koncentraciji. Nakon kratkog vremena Δt količina soli u rezervoaru promijeni se za iznos $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$. Ako unutar vremenskog intervala $[t, t + \Delta t]$ koncentraciju smjese u rezervoaru aproksimiramo sa $c = \dfrac{y}{50+2t}$, onda dobivamo:

$$\Delta y \approx (v_u c_u - v_i c)\Delta t = \left(4 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{y}{50+2t}\right)\Delta t.$$

Prijelazom na diferencijale ta približna veza postaje točnom, tj. dobivamo:

$$\mathrm{d}y = \left(4 - \frac{y}{25+t}\right)\mathrm{d}t,$$

Ovu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{25+t}y = 4.$$

9.2 Osnovni tipovi diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Okvir ove knjige dopušta nam proučavanje samo nekih tipova diferencijalnih jednadžbi, čije rješenje možemo dobiti jednostavnim metodama svođenja na računanje neodređenog integrala.

9.2.1 Diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama

U ovaj tip ubrajamo one diferencijalne jednadžbe koje se nakon različitih transformacija mogu zapisati u obliku:

$$\boxed{P(x)\,\mathrm{d}x = Q(y)\,\mathrm{d}y.}$$

U toj jednadžbi varijable su **separirane** (razdvojene): sa svake strane jednadžbe stoji diferencijal jedne varijable i funkcija te varijable. Nakon separacije varijabli opće rješenje diferencijalne jednadžbe dobivamo integriranjem:

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \int Q(y)\,\mathrm{d}y + C$$

Primjer 9.5 *Riješimo diferencijalnu jednadžbu iz* Primjera 9.3*:*

Kada separiramo varijable dobivamo:

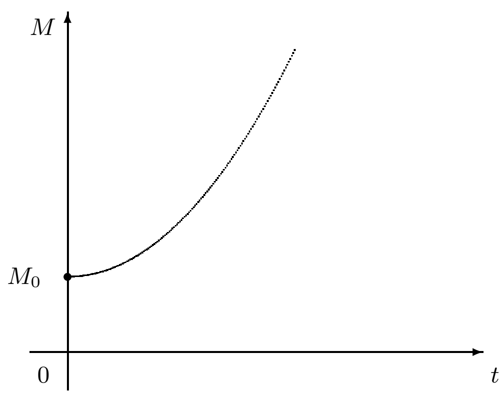
$$\frac{\mathrm{d}M}{M} = k\,\mathrm{d}t.$$

Integriranjem imamo $\ln M = k\,t + \ln C$, gdje je $\ln C$ konstanta integracije izražena pomoću logaritma. Antilogaritmiranjem prethodnog izraza dobivamo:

$$M = C \cdot e^{kt}.$$

Ako je u trenutku $t = 0$ masa bila M_0, onda iz gornje jednadžbe slijedi $C = M_0$. Dakle, uz navedene pretpostavke masa stabla eksponencijalno raste po zakonu:

$$M = M_0\, e^{kt}.$$



Slika 8.2. Graf funkcije $t \mapsto M_0 e^{kt}$ *(*$k > 0$*)*

Budući da masa stabla postaje neizmjerno velika ($M \to \infty$ kada $t \to \infty$), ovaj model nije dobar za duže vremensko razdoblje. Jedna mogućnost „popravke" ovog modela dana je u sljedećem primjeru.

Primjer 9.6 *Malthusova teorija o neograničenom rastu populacije, zapisana u obliku diferencijalne jednadžbe, glasi:*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha y, \;\; \alpha > 0,$$

gdje su t *– vrijeme,* $y = y(t)$ *– veličina populacije u trenutku* t *i* α *– konstanta proporcionalnosti. Ta jednadžba kaže da je brzina rasta populacije u svakom trenutku* t *proporcionalna veličini populacije. Njeno opće rješenje glasi (vidi prethodni primjer):*

$$y = C \cdot \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Ako pretpostavimo ograničenost životnog prostora i izoliranost populacije, koja se snabdjeva hranom i ostalim potrebštinama samo sa te ograničene teritorije, onda populacija ne može rasti neizmjerno. Stoga Verhulst uzima drugu pretpostavku:

brzina rasta populacije u svakom trenutku t proporcionalna je veličini populacije $y(t)$ i još neiskorištenom životnom potencijalu $A - y(t)$, gdje je A razina zasićenja tj. maksimalna veličina populacije.

Verhulstovoj pretpostavci odgovara diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha\, y\,(A - y)\ , \alpha > 0.$$

Ovu diferencijalnu jednadžbu riješit ćemo separacijom varijabli:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(A-y)} = \alpha \mathrm{d}t.$$

Integriranjem lijeve strane dobivamo (bez konstante integracije):

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(A-y)} = \frac{1}{A}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-A}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{A}\ln\left|\frac{y}{y-A}\right|,$$

dok integral desne strane glasi:

$$\int \alpha\,\mathrm{d}t = \alpha\, t - \frac{\ln b}{A},$$

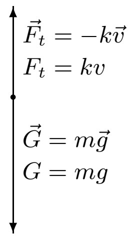
gdje je $\frac{\ln b}{A}$, $b > 0$, *integraciona konstanta. Dakle,* $\frac{1}{A}\ln\left|\frac{y}{y-A}\right| = \alpha t - \frac{\ln b}{A}$. *Budući da je prema pretpostavci* $0 < y < A$, *imamo* $\frac{1}{A}\ln\left(\frac{y}{A-y}\right) = \alpha t - \frac{\ln b}{A}$, *odakle uz oznaku* $c = \alpha\, A$ *antilogaritmiranjem dobivamo* $\frac{b\,y}{A-y} = e^{ct}$. *Konačno, rješavanjem po* y *dobivamo:*

$$y = \frac{A}{1 + b\,\mathrm{e}^{-ct}}.$$

To je dobro znana logistička funkcija (vidi Primjer 2.51*).*

Primjer 9.7 *Eksperimentalnim putem ustanovljeno je da je kod slobodnog pada na malim visinama od površine tla otpor zraka proporcionalan brzini tijela. Odredimo brzinu v tijela mase m koje je počelo slobodno padati u trenutku $t = 0$.*

Neka su $\vec{v}$ brzina tijela, $\vec{G} = m\vec{g}$ gravitaciona sila i $\vec{F}_t = k\vec{v}$ sila otpora zraka, gdje je $k > 0$ konstanta proporcionalnosti koja ovisi o tijelu. Brzina tijela i gravitaciona sila usmjereni su prema središtu Zemlje, dok je sila otpora zraka suprotnog smjera (*Slika 8.3*).



Slika 8.3.

Prema drugom Newtonovom zakonu mehanike, pisanom u skalarnom obliku, imamo diferencijalnu jednadžbu:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv,$$

gdje je $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ akceleracija tijela. Negativan predznak kod člana kv dolazi zbog toga što otpor zraka djeluje u suprotnom smjeru od smjera brzine kretanja tijela.

Separacijom varijabli dobivamo:

$$\frac{m\,\mathrm{d}v}{mg - kv} = \mathrm{d}t.$$

Nakon integriranja imamo:

$$-\frac{m}{k}\ln\mid mg - kv\mid = t + C.$$

Budući da je $v = 0$ u trenutku $t = 0$, dobivamo vrijednost integracione konstante: $C = -(m/k)\cdot\ln(mg)$. Dakle:

$$\begin{aligned}
&-\frac{m}{k}\ln\mid mg - kv\mid = t - \frac{m}{k}\ln(mg),\\
&\ln\mid mg - kv\mid = -\frac{k}{m}t + \ln(mg),\\
&\mid mg - kv\mid = mge^{-kt/m}.
\end{aligned}$$

Iz fizikalnih razloga je $mg - kv \geq 0$ (u suprotnom bi se tijelo uspinjalo) pa možemo izostaviti znak apsolutne vrijednosti. Dobivamo $mg - kv = mge^{-kt/m}$, odnosno

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Zamijetite da $v \to \frac{mg}{k}$ kada $t \to \infty$. To znači da će od nekog dovoljno velikog trenutka t pa nadalje tijelo padati s brzinom $v \approx \frac{mg}{k}$.

Izvedite formulu u kojoj će se vidjeti ovisnost prijeđenog puta s o vremenu t.

9.2.2 Homogene diferencijalne jednadžbe

Svaku diferencijalnu jednadžbu prvog reda koju možemo zapisati u obliku:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

nazivamo **homogenom diferencijalnom jednadžbom prvog reda**.

Primjedba 9.1 *Funkcija ϕ definirana formulom $\phi(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ispunjava uvjet:*

$$\phi(tx, ty) = \phi(x, y) \qquad \text{(za svaki realan broj } t \neq 0\text{)},$$

koji je poznat pod nazivom **homogenost**. *Od tuda dolazi ime homogene diferencijalne jednadžbe.*

Stavimo li $y = z\,x$, gdje je z nova varijabla, i uzmemo li u obzir da je tada $y' = x\,z' + z$, polazna diferencijalna jednadžba prelazi u novu:

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z = f(z),$$

u kojoj možemo separirati varijable:

$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Za $f(z) - z = 0$ imamo diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{y}{x}$, čije opće rješenje glasi $y = Cx$.

Primjer 9.8 *Riješimo diferencijalne jednadžbe: a) $y' = \dfrac{y+x}{x}$, b) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.*

a) Supstitucijom $y = zx$, odnosno $z = \frac{y}{x}$ polaznu diferencijalnu jednadžbu svodimo na

$$z + xz' = z + 1, \text{ odnosno } \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Integriranjem dobivamo: $z = \ln \mid x \mid + \ln C$, gdje je $C > 0$. Dakle, opće rješenje glasi:

$$y = x \ln \mid Cx \mid .$$

b) Ako brojnik i nazivnik desne strane jednadžbe podijelimo s x, dobivamo:

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}},$$

odakle vidimo da se radi o homogenoj diferencijalnoj jednadžbi. Stoga uvodimo supstituciju $z = \frac{y}{x}$. Kao što smo pokazali, tada je $y' = z + xz'$. Zamijenimo lijevu strane jednadžbe s $z + xz'$, a desnu s $\frac{1+z}{1-z}$:

$$z + xz' = \frac{1+z}{1-z}.$$

Separacijom varijabli x i z dobivamo (provjerite!):

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1-z}{1+z^2}\mathrm{d}z.$$

Integriranjem nalazimo:

$$\ln \mid x \mid = \int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} - \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{1+z^2},$$

$$\ln \mid x \mid = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + \ln C, \quad C > 0,$$

odakle antilogaritmiranjem imamo:

$$\mid x \mid \sqrt{1+z^2} = C\, e^{\operatorname{arc\,tg} z}.$$

Uvrštenjem $z = \frac{y}{x}$ dobivamo traženo opće rješenje u implicitnom obliku:

$$\sqrt{x^2+y^2} = C\, e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}.$$

9.2.3 Linearne diferencijalne jednadžbe

Diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x),}$$

gdje su f i g neke funkcije, nazivamo **linearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda.** Nepoznata funkcija y i njena derivacija y' ulaze linearno, tj. s prvom potencijom.

Ako jednadžbu pomnožimo s $e^{\int f(x)dx}$ dobivamo:

$$[y' + f(x)y]\, e^{\int f(x)dx} = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

Budući da je $(y' + yf(x))e^{\int f(x)dx} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{\int f(x)dx}\right)$ možemo pisati:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ye^{\int f(x)dx}\right) = g(x)e^{\int f(x)dx},$$

odakle integriranjem dobivamo:

$$ye^{\int f(x)dx} = \int g(x)e^{\int f(x)dx}\mathrm{d}x + C.$$

Dakle, opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe glasi:

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)e^{\int f(x)dx}\mathrm{d}x + C\right]$$

Primjer 9.9 *Riješimo diferencijalnu jednadžbu* $xy' + y = x\cos x^2$:

Ako jednadžbu podijelimo s x dobivamo:

$$y' + \frac{1}{x}y = \cos x^2.$$

U ovom primjeru je $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \cos x^2$. Nadalje je $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x$, $e^{\int f(x)dx} = e^{\ln x} = x$, i $e^{-\int f(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$. Uvrštenje tih vrijednosti u opće rješenje daje:

$$y = \frac{1}{x}\left[\int x\cos x^2\,\mathrm{d}x + C\right],$$

a kako je $\int x\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin x^2$, traženo opće rješenje glasi:

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{\sin x^2}{2} + C\right).$$

Primjer 9.10 *U* Primjeru 9.4 *treba pronaći količinu soli u rezervoaru nakon* $t = 25$ *minuta:*

Opće rješenje linearne diferancijalne jednadžbe dobivene u *Primjeu 9.4* glasi (provjerite):

$$y = \frac{1}{25+t}(100t + 2t^2 + C).$$

U trenutku $t = 0$ je $y = 5$ kg. Uvrštenjem tih vrijednosti u opće rješenje dobivamo $C = 125$. Dakle,

$$y = \frac{1}{25+t}(2t^2 + 100t + 125),$$

odakle za $t = 25$ dobivamo $y = 77.5$ kg.

Primjer 9.11 *Diferencijalnu jednadžbu prvog reda oblika:*

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha},\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

nazivamo **Bernoullijevom jednadžbom.** *Za* $\alpha = 0$ *ova jednadžba prelazi u linearnu, a za* $\alpha = 1$ *možemo je riješiti metodom separacije varijabli. Pokažimo da se ova jednadžba za* $\alpha \neq 0$ *i* $\alpha \neq 1$ *supstitucijom* $z = y^{1-\alpha}$ *svodi na linearnu jednadžbu.*

Neka je $z = y^{1-\alpha}$. Tada je $y = z^{1/(1-\alpha)}$ i $y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\alpha/(1-\alpha)} z'$. Uvrštavanjem ovih vrijednosti u Bernoullijevu jednadžbu dobivamo:

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\alpha/(1-\alpha)} z' + f(x) z^{1/(1-\alpha)} = g(x) z^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

Množenjem sa $z^{1/(1-\alpha)}$ dobivamo linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$z' + (1-\alpha) f(x) z = (1-\alpha) g(x).$$

Zadaci za vježbu 8.1-8.2

1. Metodom separacije varijabli riješite diferencijalne jednadžbe:

   a) $y' = x^2 y^2$ b) $y' = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 x}$ c) $y' = x^2 + x^2 y^2$
   d) $xyy' = 1 - x^2$ e) $y\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ f) $xy' - y = y^3$.

   Rješenje: a) $\frac{1}{y} = -\frac{x^3}{3} + C$ i $y = 0$, b) $-\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg} x + C$, c) $\operatorname{arc\,tg} y = \frac{1}{3}x^3 + C$, d) $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$, e) $x = Cy$, f) $x = \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$ i $y = 0$.

2. Riješite homogene diferencijalne jednadžbe:

   a) $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ b) $x\,\mathrm{d}y = (x+y)\mathrm{d}x$ c) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$
   d) $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ e) $y' = \frac{4x+y}{x+y}$ f) $\frac{xy'-y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

   Rješenje: a) $Cx\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = 1$, b) $y = x(\ln|x| + C)$, c) $y^2 = x^2(\ln x^2 + C)$, d) $e^{y/x} = \frac{-1}{\ln|x| + C}$, e) $3\ln|y-2x| + \ln|y+2x| = C$, f) $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

3. Riješite linearne diferencijalne jednadžbe:

   a) $y' - xy = 0$ b) $y' + y = 3e^x$ c) $y' + 2y = xe^{-2x} + 3$
   d) $(x^2+x+1)y' + 2(2x+1)y = x$ e) $(x + x^3)y' + 4yx^2 = 2$ f) $xy' + y = \operatorname{ctg} x$.

   Rješenje: a) $y = Ce^{x^2/2}$, b) $y = Ce^{-x} + \frac{3}{2}e^x$, c) $y = Ce^{-2x} + \frac{x^2}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$, d)$(x^2+x+1)^2 y = x^4/4 + x^3/3 + x^2/2 + C$, e) $(1+x^2)y - 2\ln|x| - y^2 = C$, f) $xy - \ln|\sin x| = C$.

4. Riješite Cauchyjev problem:

   a) $y' = \frac{x}{y}$, $y(2) = -3$ b) $y' = \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$, $y(\pi) = 0$ c) $x^2 y' - (x+1)y = x$, $y(1) = -2$.

   Rješenje: a) $y^2 = x^2 + 5$, b) $\frac{1}{\cos\frac{y}{x}} + \operatorname{tg}\frac{y}{x} = \frac{x}{\pi}$, c) $y = -x(1 + e^{1-1/x})$.

5. Riješite Bernoullijeve jednadžbe:

a) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ b) $xy' + y = 2xy^2$.

Rješenje: a) $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$, b) $2xy(C - \ln|x|) = 1$.

6. Sila otpora zraka pri padanju tijela s padobranom proporcionalna je kvadratu brzine padanja. Nađite graničnu brzinu padanja.

   Uputa: Treba riješiti jednadžba gibanja $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$, uz početni uvjet $v(0) = 0$.

7. Pretpostavimo da broj stanovnika neke države, kao funkcija vremena, u nekom vremenskom intervalu $[0, T]$ raste po zakonu $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP + I$, pri čemu konstanta I predstavlja brzinu migracije (za $I < 0$ imamo emigraciju, a za $I > 0$ imigraciju) a konstanta r mjeri brzinu prirodnog prirasta. Riješite ovu diferencijalnu jednadžbu uz početni uvjet $P(0) = P_0$.

   Rješenje: Broj stanovnika raste eksponencijalno po formuli: $P(t) = \left(P_0 + \frac{I}{r}\right)e^{rt} - \frac{I}{r}$, $t \in [0, T]$.

Literatura:

[1] D. D. Berkey, *Single Variable Calculus,* CBS college Publishing, 1984.

[2] B. P. Demidovič, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1968.

[3] J. B. Fraleighh, *Calculus with Analytic Geometry,* Addison-Wesley, Reading, Mass. 1985.

[4] M. Golomb, M. Shanks,*Elements of Ordinary Differential Equations,*McGraw-Hill, New York, 1965.

[5] N. B. Haaser, J. P. LaSalle, J. A. Sullivan, *Intermediate Analysis I,II,* Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.

[6] S. O. Hockett, M. Sternstein, *Applied Calculus–a goals approach,* D. Van Nostrand, New York, 1979.

[7] L. D. Hoffmann, *Calculus for the Social, Managerial and Life Sciences,* McGraw-Hill, New York, 1980.

[8] P. Javor, *Uvod u matematičku analizu,* Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[9] S. Kurepa, *Matematička analiza I, II,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[10] S. Mardešić, *Matematička analiza u n- dimenzionalnom realnom prostoru I,* Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[11] L. A. Maron, *Problems in Calculus of One Variable,*, Mir, Moskva, 1988.

[12] A. Mizrahi, M. Sullivan, *Calculus with Applications to Business and Life Sciences,* John Wiley & Sons, New York, 1984.

[13] S. M. Nikolsky, *A Course of Mathematical Analysis,* Mir, Moskva, 1981.

[14] R. Scitovski, R. Galić, M. Šilac-Benšić, *Numerička matematika. Vjerojatnost i statistika,* Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1993.

[15] S. K. Stein, *Calculus and Analytic Geometry,* McGraw-Hill, New York, 1973.

[16] B. K. Youse, *Calculus for the Managerial, Social, and Life Sciences,* West Publishing Co., St. Paul, 1984.

10. FINANCIJSKA MATEMATIKA

Financijska matematika važno je poglavlje primjene matematike u ekonomskim znanostima ali i drugim područjima, koja se bave financijskim aspektima u primjenama (poljoprivreda, građevinarstvo, elektrotehnika itd.)

Nastojali smo se držati uobičajenog pristupa prisutnog u udžbenicima na sveučilištima zapadne Europe (kao npr. [1], [2], [7], [8], [9]), ali za neke pojmove (kao što je pojam ispodgodišnje ukamaćivanje) dat je suvremeniji i matematički utemeljeniji pristup (kao npr. u [3], [5], [6], [11], [15], [17], [19]). Na taj način moguće je objasniti i neke fenomene prisutne u uvjetima visoke inflacije.

Brojni zadaci ilustriraju navedene pojmove, a jedan dio njih predviđen je kao sadržaj studentskih seminarskih radova. Pri tome od čitatelja se zahtijeva poznavanje primjene elektroničkih računala, poznavanje barem jednog programskog jezika te nekih standardnih gotovih programa.

Također, dane su potrebne osnove za postavljanje korektih odnosa u financijskom poslovanju banaka i drugih poduzeća.

10.1 Postotni račun

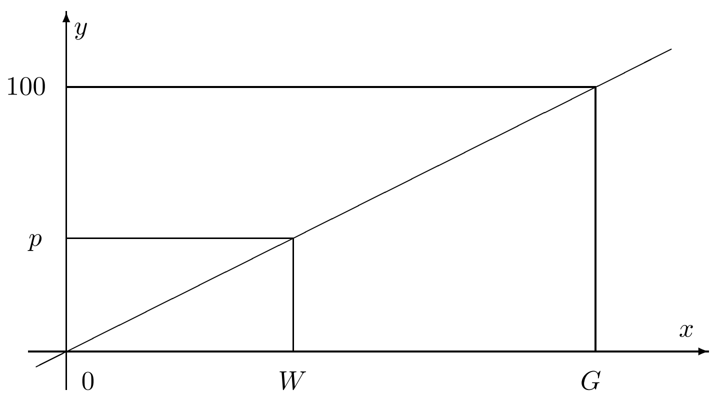
Potreba međusobnog uspoređivanja relativno različitih veličina vodi na pojam postotnog računa. Ideja se sastoji u tome da nekoj osnovnoj veličini pridružimo broj 100 (u promilnom računu osnovnoj veličini pridružujemo broj 1000), a ostale veličine linearnim preslikavanjem mjerimo u odnosu na nju.

Označimo s G osnovnu veličinu, kojoj ćemo pridružiti broj 100. Linearna funkcija, čiji graf (*Slika 9.1*) prolazi ishodištem i točkom $(G, 100)$ glasi:

$$y = \frac{100}{G}x. \tag{10.1}$$

Neka je nadalje, W proizvoljna veličina, koju želimo usporediti s osnovnom veličinom G. Iz (9.1) slijedi da veličini W treba pridružiti broj:

$$y = \frac{100}{G} W. \tag{10.2}$$



Slika 9.1.

Veličinu (9.2) u financijskoj matematici obično označavamo slovom p i nazivamo **postotak**. Veličinu W nazivamo **procentni iznos**. Izraz (9.2) tada se obično piše u obliku:

$$\boxed{W = \frac{G \cdot p}{100}} \tag{10.3}$$

čime je procentni iznos W izražen kao $p/100$– ti dio osnovne veličine G. Kažemo da je W *„p posto"* (pišemo $p\%$) od G.

Primjer 10.1 *Masa neke kokice na kraju petog tjedna rasta iznosi* 1 600 g*, a na kraju šestog tjedna* 1 840 g*. Prirast mase tijekom šestog tjedna je* 240 g*. Interesira nas koliki je prirast u postocima.*

Osnovnoj veličini $G = 1\ 600$ pridružit ćemo broj 100. Veličini $W = 240$ tada će (prema (9.3)) biti pridružen broj:

$$p = \frac{100\,W}{G} = \frac{100 \cdot 240}{1600} = 15.$$

Prema tome prirast mase kokice tijekom šestog tjedna iznosi 15/100 od mase na početku šestog tjedna. Kaže se da je prirast mase kokice u šestom tjednu iznosio *"15 posto"* (15%).

Pretpostavimo da neka veličina S naraste za $p\%$ i primi novu vrijednost N (vidi *Sliku 9.2*).

$$S \xrightarrow{\quad\quad\quad p\,\% \quad\quad\quad} N$$

Slika 9.2.

U skladu s (9.3) novu vrijednost N možemo izraziti pomoću stare vrijednosti S: $N = S + \frac{p\,S}{100}$, odnosno:

$$N = \left(1 + \frac{p}{100}\right) S. \tag{10.4}$$

I obrnuto, staru vrijednost S možemo izraziti pomoću nove vrijednosti N:

$$S = \frac{100}{100 + p} N. \tag{10.5}$$

Ako nova veličina N nastaje smanjenjem stare veličine S za $p\%$, onda to možemo pisati:

$$N = S - \frac{p \cdot S}{100}, \tag{10.6}$$

odakle također možemo izraziti staru S ili novu veličinu N.

Primjer 10.2 *Masa neke kokice na kraju petog tjedna rasta iznosi* 1 600 *g. Tijekom šestog tjedna prirast je iznosio 15%. Kolika je masa kokice na kraju šestog tjedna?*

Prema (9.4) masa kokice na kraju šestog tjedna je:

$$N = 1\ 600 \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1\,840 \text{ g}.$$

Primjer 10.3 *Masa neke kokice na kraju šestog tjedna je* 1 840 *g. Kolika je bila njezina masa na početku tog tjedna, ako je tjedni prirast bio 15% ?*

Prema (9.5) masa kokice na početku šestog tjedna je:

$$S = 1\ 840\ \frac{100}{100 + 15} = 1\ 600 \text{ g}.$$

Primjer 10.4 *Nekoj robi snižena je cijena za 5% i sada iznosi* $C_N = 1\ 178.00$. *Kolika je bila cijena* C_S *robe prije sniženja?*

Prema (9.6) cijena robe prije sniženja bila je:

$$C_S = \frac{100}{100 - p} C_N = 1\ 240.$$

Zadaci za vježbu 9.1

1. U pivu se nalazi 4.8% alkohola. Koliko se decilitara alkohola nalazi u boci od 0.5 l piva ?

   Rješenje: 0.24 dl.

2. Cijena neke robe snižena je za 12% i sada iznosi 2 178.00. Kolika je bila cijena robe prije sniženja ?

   Rješenje: 2 475.00.

3. Cijena neke robe povećana je za 15% i sada iznosi 1 380.00. Kolika je bila cijena robe prije poskupljenja?

   Rješenje: 1 200.00.

4. Od žive svinje dobiva se 80.7% tople šurene polovice, a od tople šurene polovice dobiva se 98.2% hladne šurene polovice. Koliko se kilograma hladne šurene polovice dobije od žive svinje teške 100 kg ?

   Rješenje: 79.25 kg.

5. Od živog juneta dobiva se 58% juneće polovice–tople, od juneće polovice–tople dobiva se 98% juneće polovice–hladne, a od juneće polovice–hladne dobiva se 96.87% juneće polovice–kompenzirane. Koliko se kilograma juneće polovice– kompenzirane dobije od živog juneta mase 250 kg i koliki je to postotak od živog juneta ?

   Rješenje: 137.65 kg, što čini 55.06%.

6. Od tzv. svinjske francuske polovice dobiva se 69% šunka – karea, 21% plećke i 10% vrata s kostima, a od šunka – karea dobiva se 36% karea s kostima i 64% šunke. Koliko je masa šunke od francuske polovice mase 25 kg?

   Rješenje: 11.04 kg.

7. Morska voda sadrži 3.5% soli. S koliko litara neslane (slatke) vode treba pomiješati 1 l morske vode, da bi se dobila normalna voda za piće, koja sadrži 0.5 promila soli?

   Rješenje: 69 l.

8. Na nekim izborima bilo je 2 930 392 birača s pravom glasa. Na izbore je izašlo 73.9% birača. Važećih glasačkih listića bilo je 2 127 508. Koliko % je bilo nevažećih glasačkih listića (zaokružite na jednu decimalu)?

   Rješenje: 1.8%.

9. Kupovna cijena jednog automobila je 112 000.00. Automobil se može dobiti na 40–mjesečni kredit. Odmah treba uplatiti 5% cijene automobila, a na ostatak se dodaje 20% kamata. Tako dobiveni iznos dijeli se s 40. Kolika je ovako dobivena mjesečna rata.

   Rješenje: 3 192.00.

10.2 Kamate

Pod pojmom **kapital** u financijskoj matematici obično podrazumijevamo neku gotovinu novca, ali to može biti i iznos kredita ili zajma, hipoteka, štednja, zapis duga itd. Iznos kapitala uobičajeno se zaokružuje na dvije decimale jer se osnovna jedinica valute obično dijeli na 100 sitnijih dijelova. U trenutku aktiviranja kapitala (bez smanjenja općenitosti, a zbog jednostavnosti uzmimo da je to trenutak $t_0 = 0$) njegov iznos nazivamo **početni kapital** i označavamo s C_0. Od tog trenutka osoba koja koristi kapital mora vlasniku kapitala plaćati **kamate**[1]. Kamate za jedinično **obračunsko razdoblje** (godina, mjesec, dan itd) definira se kao procentni iznos početnog kapitala C_0, gdje se veličina odgovarajućeg postotka p naziva **kamatna stopa**. Pri tome, veličinu:

$$i = \frac{p}{100} \tag{10.7}$$

nazivamo **kamatnjak**. Tako ćemo npr. reći da je početni kapital C_0 posuđen uz godišnju kamatnu stopu 7 ili uz godišnji kamatnjak $i = 0.07$, odnosno godišnji kamatnjak $i = 7\%$. Vrijednost kapitala na kraju obračunskog razdoblja zvat ćemo **konačni kapital**.

Obračun kamata može se obavljati na kraju obračunskog razdoblja (**dekurzivno ukamaćivanje**) i tada vrijedi:

$$\boxed{\textit{konačni kapital} = \textit{početni kapital} + \textit{kamate na početni kapital.}} \tag{10.8}$$

Ako se obračun kamata obavlja na početku obračunskog razdoblja (**anticipativno ukamaćivanje**), onda vrijedi:

$$\boxed{\textit{početni kapital} = \textit{konačni kapital - kamate na konačni kapital.}} \tag{10.9}$$

Primjer 10.5 *Neka je $C_0 = 100.00$ početni kapital, a $p = 7$ godišnja kamatna stopa.*

Konačni kapital na kraju prve godine uz dekurzivno ukamaćivanje bit će:

$$C_1^d = C_0 + C_0\frac{p}{100} = 100 + 100\frac{7}{100} = 107.00.$$

[1] U njemačkoj literaturi (vidi npr. Bosch (1987), Caprano i Girel (1992)) razlikuju se kamate koje plaća dužnik (Sollzinsen ili Schuldzinsen) i kamate koje dobiva vlasnik kapitala (Habenzinsen)

Anticipativni način obračuna kamata podrazumijeva obračun kamata na početku godine. Tako će npr. konačna vrijednost kapitala na kraju godine biti 100.00, *ako je njegova početna vrijednost* 93.00. *Ako je početni kapital* 100.00, *njegovu konačnu vrijednost na kraju prve godine* (C_1^a) *u skladu s (9.9) dobit ćemo iz jednadžbe:*

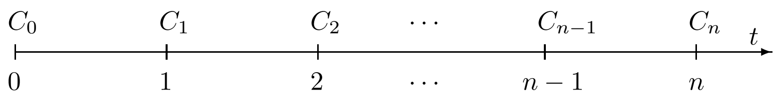
$$100 = C_1^a - C_1^a \frac{7}{100}.$$

Dakle, $C_1^a = 107.52688$.

Budući da se u financijskoj praksi gotovo isključivo koristi dekurzivno ukamaćivanje, dalje (ako to ne bude posebno naglašeno) bavit ćemo se samo dekurzivnim načinom obračuna kamata.

10.2.1 Jednostavne kamate

Pretpostavimo da je u trenutku $t_0 = 0$ početni kapital C_0 posuđen uz godišnju kamatnu stopu p (ili godišnji kamatnjak i) i dekurzivan obračun kamata (dalje ćemo u tom slučaju govoriti o *„dekurzivnoj kamatnoj stopi p”*). Treba izračunati konačnu vrijednost kapitala na kraju n-te godine ako na kraju svake godine pribrajamo kamate obračunate **samo na početni kapital** C_0. Ovakav način obračuna kamata nazivamo **jednostavno ukamaćivanje**.



Slika 9.3. Jednostavno godišnje ukamaćivanje

Na kraju prve godine kapitalu C_0 dodajemo kamate:

$$I_1 = C_0 \frac{p}{100} \qquad \text{ili} \qquad I_1 = C_0 \cdot i, \tag{10.10}$$

pa je vrijednost kapitala na kraju prve godine:

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad \text{ili} \qquad C_1 = C_0(1+i). \tag{10.11}$$

Vrijednost kapitala na kraju druge godine (C_2) sastoji se od vrijednosti kapitala s početka druge godine (C_1) i kamata obračunatih ponovo samo na osnovni kapital C_0 :

$$C_2 = C_1 + C_0 \frac{p}{100} \qquad \text{ili} \qquad C_2 = C_1 + C_0 i. \tag{10.12}$$

Uvrštavajući (9.11) u (9.12) dobivamo:

$$C_2 = C_0 \left(1 + 2 \cdot \frac{p}{100}\right) \qquad \text{ili} \qquad C_2 = C_0(1 + 2i). \tag{10.13}$$

Ponavljajući postupak, dobivamo vrijednost konačnog kapitala na kraju n-te godine:

$$\boxed{C_n = C_0 \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right) \qquad \text{ili} \qquad C_n = C_0(1 + ni).} \tag{10.14}$$

pri čemu su ukupne jednostavne kamate nakon n godina zadane s:

$$\boxed{I_n = n\, C_0 \frac{p}{100} \qquad \text{ili} \qquad I_n = nC_0 i.} \tag{10.15}$$

Formula (9.14) može se dokazati matematičkom indukcijom.

Niz $C_0, C_1, C_2, \ldots$ definiran s (9.14) je aritmetički niz s diferencijom $d = C_0 \frac{p}{100}$ (odnosno $d = C_0\, i$). Zato se neki puta jednostavno ukamaćivanje naziva **linearno ukamaćivanje**.

Primjer 10.6 *Početni kapital* $C_0 = 12\ 350.00$ *uložen je u banku uz obračun jednostavnih dekurzivnih godišnjih kamata.*

(a) Ako je godišnja kamatna stopa $p = 15$*, kolika će biti vrijednost konačnog kapitala na kraju četvrte godine, iznos jednogodišnjih kamata* I_1 *i vrijednost ukupnih kamata na kraju četvrte godine ?*

(b) Ako je kapital nakon četiri godine narastao na iznos $C_4 = 20\ 501.00$*, koja je godišnja kamatna stopa pri tome primijenjena ?*

(c) Ako je konačni kapital $C_n = 18\ 895.50$*, a godišnji kamatnjak* $i = 13.25\%$*, koliki je broj godina* n *?*

(a) Direktnom primjenom formule (9.14) i (9.15) dobivamo: $C_4 = 19\ 760.00$, $I_1 = 1\ 852.50$, $I_4 = 7\ 410.00$.

(b) Iz (9.14) dobivamo: $p = \frac{100}{n}\,(\frac{C_n}{C_0} - 1)$. U našem slučaju je $p = 16.5$.

(c) Iz (9.14) dobivamo: $n = \frac{1}{i}\,(\frac{C_n}{C_0} - 1)$. U našem slučaju je $n = 4$.

Primjedba 10.1 *Obračunsko razdoblje ne mora biti godina. Ako se kamate obračunavaju na kraju svakog obračunskog razdoblja duljine* $\Delta\, t$ *i ako se pri tome koristi dekurzivna kamatna stopa* p_t*, tada je vrijednost kapitala na kraju* n*-tog obračunskog razdoblja duljine* $\Delta\, t$ *jednaka:*

$$C_{nt} = C_0 \left(1 + n \frac{p_t}{100}\right). \tag{10.16}$$

Primjer 10.7 *Neka je* 12 500.00 *početni kapital i* $p = 7$ *tromjesečna kamatna stopa (smatra se da su svi mjeseci jednako dugački). Uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamaćivanja treba izračunati vrijednost kapitala nakon* 15 *mjeseci, iznos tromjesečnih kamata* I_3 *i vrijednost ukupnih kamata nakon* 15 *mjeseci.*

Primjenom formule (9.16) dobivamo: $C_{15} = 16\ 875.00$, $I_3 = 875.00$, i $I_{15} = 4\ 375.00$.

10.2.1.1 Jednostavno ispodgodišnje ukamaćivanje

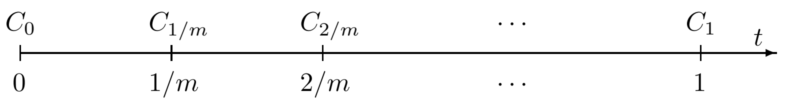
Često je u praksi zadana dekurzivna godišnja kamatna stopa, a vrijednost kapitala treba izračunati za vrijeme kraće od jedne godine. Neka je:

C_0 – početni kapital u trenutku $t_0 = 0$,

p – dekurzivna godišnja kamatna stopa,

m – broj jednakih podintervala na koji dijelimo godinu[2],

p_m – dekurzivna kamatna stopa vezana uz obračunsko razdoblje duljine $1/m$ (m–ti dio godine).



Slika 9.4. Jednostavno ispodgodišnje ukamaćivanje

Ispodgodišnja kamatna stopa p_m treba biti tako definirana da iznos konačnog kapitala C_1 na kraju godine uz primjenu jednostavnog ukamaćivanja bude jednak, bez obzira da li smo jedanput primijenili godišnju kamatnu stopu p ili smo m puta sukcesivno primijenili ispodgodišnju kamatnu stopu p_m.

Konačni kapital C_1 na kraju prve godine dobiven primjenom godišnje kamatne stope p na početni kapital C_0, iznosi:

$$C_1 = C_0 + C_0 \frac{p}{100}. \tag{10.17}$$

S druge strane, vrijednost početnog kapitala C_0 na kraju prvog podintervala (uz primjenu ispodgodišnje kamatne stope p_m) je:

$$C_{1/m} = C_0 + C_0 \frac{p_m}{100},$$

[2]Npr. ako je $m = 2$, duljina promatranih vremenskih intervala je $1/2$ godine – kažemo da su to polugodišta. Ako je $m = 12$, duljina promatranih vremenskih intervala je $1/12$ godine – kažemo da su to mjeseci (primijetimo ipak, da $1/12$ godine općenito ne predstavlja mjesec jer svi mjeseci u godini nemaju jednaki broj dana).

na kraju drugog podintervala vrijednost kapitala je:

$$C_{2/m} = C_{1/m} + C_0 \frac{p_m}{100} = C_0 + 2C_0 \frac{p_m}{100},$$

a na kraju m–tog podintervala (što se podudara s krajem godine) imamo:

$$C_{m/m} = C_0 + mC_0 \frac{p_m}{100}. \tag{10.18}$$

Izjednačavajući izraze (9.17) i (9.18) dobivamo veličinu **jednostavne ispodgodišnje kamatne stope** p_m:

$$\boxed{p_m = \frac{p}{m}.} \tag{10.19}$$

Dakle, jednostavnu dekurzivnu ispodgodišnju kamatnu stopu p_m dobijemo tako da dekurzivni godišnji kamatnjak p podijelimo brojem m (broj jednakih dijelova na koji dijelimo godinu).

Primijetimo još da je vrijednost početnog kapitala C_0 nakon k ovakvih obračunskih razdoblja jednaka:

$$\boxed{C_{k/m} = C_0 \left(1 + k\, \frac{p_m}{100}\right),} \tag{10.20}$$

a da je niz $C_0, C_{1/m}, C_{2/m}, \ldots$ aritmetički niz s diferencijom $d = C_0\, \frac{p_m}{100}$.

Primjer 10.8 *Neka je* $C_0 = 1\ 000.00$ *početni kapital,* $p = 24$ *dekurzivna godišnja kamatna stopa a* $m = 12$ *(godinu dijelimo na* 12 *jednakih dijelova – približno mjeseci!).*

Odgovarajuća „mjesečna" *jednostavna ispodgodišnja kamatna stopa u ovom slučaju je* $p_{12} = 2$. *Vrijednost početnog kapitala* C_0 *na kraju godine je* $C_1 = 1\ 240.00$. *U* Tablici 9.1 *prikazano je kretanje vrijednosti kapitala na kraju svakog* „mjeseca".

kraj „mjeseca"	*dio godine*	*stanje kapitala*
1.	1/12	1 020.00
2.	2/12	1 040.00
3.	3/12	1 060.00
⋮	⋮	⋮
11.	11/12	1 220.00
12.	12/12	1 240.00

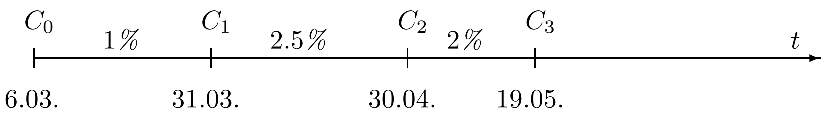
Tablica 9.1. Kretanje vrijednosti kapitala na kraju svakog „mjeseca"

Primjer 10.9 *Neka je* 15 250.00 *vrijednost početnog kapitala, a* $p = 12$ *godišnja kamatna stopa. Uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamaćivanja treba izračunati vrijednost kapitala nakon 20 mjeseci uz pretpostavku da mjesec predstavlja* 1/12 *godine.*

Uzet ćemo da je $m = 12$ (godinu smo podijelili na 12 jednakih *„mjeseci"*). Tada je *„mjesečna"* jednostavna ispodgodišnja kamatna stopa $p_{12} = 1$. Vrijednost kapitala nakon 20 mjeseci bit će prema (9.20):

$$C_{20/12} = C_0 \left(1 + 20\,\frac{p_{12}}{100}\right) = 18\ 300.00.$$

Primjer 10.10 *Netko je 6. 03. posudio iznos od 10 000.00 uz obračun jednostavnih dekurzivnih kamata i promjenjivu mjesečnu kamatnu stopu. Dug treba vratiti 19. 05. iste godine. Mjesečna kamatna stopa u ožujku bila je* 1, *u travnju* 2.5 *a u svibnju* 2 *(vidi* Sliku 9.5*). Izračunajte veličinu duga na dan 19. 05.*



Slika 9.5. Jednostavno ispodgodišnje ukamaćivanje

Najprije ćemo mjesečne kamatne stope pretvoriti u dnevne (*„ispodmjesečne"*) prema principu izloženom u ovom odjeljku i izračunati broj dana u svakom mjesecu u kojem je korišten kapital (vidi niže navedenu tablicu).

mjesec	ukupni broj dana	dani korištenja kapitala	dnevni kamatnjak
ožujak	31	25	0.03226
travanj	30	30	0.08333
svibanj	31	19	0.06452

Tablica 9.2.

Vrijednost kapitala na dan 31. 03. bit će: $C_1 = C_0 + 25\,C_0\,\frac{0.03226}{100} = 10\ 080.65$, na dan 30. 04. bit će: $C_2 = C_1 + C_0\,\frac{2.5}{100} = 10\ 330.65$, a vrijednost kapitala na dan 19. 05. bit će: $C_3 = C_2 + 19\,C_0\,\frac{0.06452}{100} = 10\ 453.24$. Dakle, veličina duga na dan 19. 05. iznosi 10 453.24.

Primjedba 10.2 *U* Primjeru 10.10 *broj dana računali smo* **prema kalendaru**, *pri čemu dan sklapanja ugovora (06. 03.) nismo računali, dok smo dan u kome istječe ugovor i kada se dug mora vratiti (19. 05) uzeli u račun, pa je ukupni broj* *dana korištenja kapitala* 74. *Postoji i tzv.* **trgovački način obračuna** *broja dana, po kome se smatra da godina ima* 12 *mjeseci, a svaki mjesec* 30 *dana. Također kao i prema kalendarskom načinu obračuna dana, dan sklapanja ugovora se ne računa, dok se dan istjeka ugovora uzima u račun*[3]. *Primjena ovakvog načina obračuna dana daje takav efekt kao da se primjenjivala viša kamatna stopa. Ta viša kamatna stopa tada se naziva* **efektivna kamatna stopa**.

Kolika bi bila veličina duga iz Primjera 10.10 *po istjeku ugovora (19. 05) ako bi se primijenio trgovački način obračuna dana?*

Primjer 10.11 *Na početni kapital od* 30 000.00 *treba izračunati veličinu jednostavnih dekurzivnih kamata nakon* 3 *godine i* 25 *dana ako je primjenjena godišnja kamatna stopa* $p = 9.5$.

Ako broj dana računamo prema kalendaru, onda je ukupni broj dana 1120, pa prema (9.20) imamo:

$$C_{1120/365} = 30\ 000 \cdot \left(1 + 1\ 120\,\frac{9.5}{365 \cdot 100}\right) = 38\ 745.20.$$

Dakle, kamate iznose 8 745.20.

Ako broj dana računamo na trgovački način, onda je dnevna kamatna stopa $p_{360} = \frac{9.5}{360}$, a ukupni broj dana je 1 105. Prema (9.20) imamo:

$$C_{1120/360} = 30\ 000 \cdot \left(1 + 1\ 105\,\frac{9.5}{360 \cdot 100}\right) = 38\ 747.92.$$

Dakle, kamate iznose 8 747.92.

Efektivna kamatna stopa iznosi 9.50295.

Primjer 10.12 *Gospodin* **X** *posudio je 11. studenog iznos* C_0 *do 5. listopada sljedeće godine uz obračun jednostavnih dekurzivnih kamata s godišnjim kamatnjakom* $i = 9\%$. *5. listopada dobio je početni kapital* C_0 *i kamate u iznosu od* $I = 600.00$. *Treba izračunati veličinu početnog kapitala* C_0 *ako se broj dana računa na trgovački način.*

Od 11. studenog do 31. prosinca obračunavamo 49 dana, a od 1. siječnja do 5. listopada 275 dana, dakle ukupno 324 dana. Prema (9.20) imamo:

$$C_{324/360} = C_0 \cdot \left(1 + 324\,\frac{9}{360 \cdot 100}\right),$$

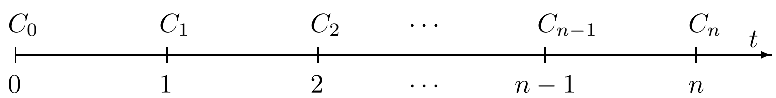
odakle slijedi: $C_0 = 7\ 407.41$.

Koliki bi bio početni kapital uz kalendarski način obračuna dana ? Kolika je efektivna kamatna stopa ?

[3] U njemačkoj financijskoj praksi uvijek se upotrebljava trgovački način obračuna, ako se nekim propisom drugačije ne odredi.

10.2.2 Složene kamate

Pretpostavimo da je u trenutku $t_0 = 0$ posuđen početni kapital C_0 uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Treba izračunati vrijednost kapitala na kraju n–te godine ako na kraju svake godine pribrajamo kamate obračunate na vrijednost kapitala s početka te godine. Ovakav obračun kamata naziva se **složeno ukamaćivanje**. Razlika između jednostavnog i složenog ukamaćivanja je u tome što se prilikom obračuna jednostavnih kamata na kraju svake godine kamate računaju samo na početni kapital, dok se kod složenog ukamaćivanja kamate obračunavaju i na kamate.



Slika 9.6. Složeno godišnje ukamaćivanje

Vrijednost kapitala na kraju prve godine (C_1) sastoji se od vrijednosti početnog kapitala C_0 i odgovarajućih kamata na taj iznos:

$$C_1 = C_0 + C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 r,$$

gdje je: $r = 1 + \frac{p}{100}$ ili $r = 1 + i$ godišnji **kamatni faktor**.

Vrijednost kapitala na kraju druge godine (C_2) sastoji se od vrijednosti kapitala s početka druge godine (C_1) i kamata obračunatih na kapital C_1:

$$C_2 = C_1 + C_1 \frac{p}{100} = C_1 r = C_0 r^2.$$

Primijetimo da kapital C_1 već sadržava kamate obračunate na iznos C_0 u prethodnoj godini. Zbog toga se kaže da se složenim ukamaćivanjem obračunavaju kamate na kamate.

Općenito, vrijednost početnog kapitala C_0 na kraju n–te godine (C_n) sastoji se od vrijednosti kapitala s početka n–te godine (C_{n-1}) i kamata obračunatih na kapital C_{n-1}:

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \frac{p}{100} = C_{n-1} r.$$

Prema tome, vrijednost početnog kapitala C_0 nakon n godina uz primjenu složenog ukamaćivanja s dekurzivnom godišnjom kamatnom stopom p iznosi:

$$\boxed{C_n = C_0 r^n\,, \quad r = 1 + \frac{p}{100}.} \tag{10.21}$$

Primijetimo da je niz $C_0, C_1, C_2, \ldots$ definiran s (9.21) geometrijski niz s kvocijentom r.

Primjer 10.13 *Početni kapital* $C_0 = 12\ 350.00$ *uložen je u banku uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata.*

(a) *Ako je godišnja kamatna stopa* $p = 15$*, kolika će biti vrijednost konačnog kapitala i vrijednost ukupnih kamata na kraju četvrte godine ?*

(b) *Ako je kapital nakon četiri godine narastao na iznos* $C_4 = 20\ 501.00$*, koja je godišnja kamatna stopa pri tome primijenjena ?*

(c) *Ako je konačni kapital* $C_n = 33\ 417.40$*, a godišnji kamatnjak* $i = 13.25\%$*, koliki je broj godina* n *?*

(a) Primjenom formule (9.21) dobivamo: $C_4 = 21\ 600.23$, $I_4 = 9\ 250.23$.

(b) Iz (9.21) lako dobivamo: $p = 100\left[\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{1/n} - 1\right]$. U našem slučaju je $p = 13.508144$.

(c) Iz (9.14) dobivamo: $n = \dfrac{\log C_n - \log C_0}{\log r}$. U našem slučaju je $n = 8$.

Primjer 10.14 *Gospodin* **X** *uložio je u banku početni kapital od* 30 000.00 *i nakon* 12 *godina uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata dobio* 70 000.00*. Prve* 3 *godine kamatna stopa p nije se mijenjala. Sljedećih* 5 *godina bila je za* 0.5 *niža* $(p - 0.5)$*, a posljednje* 4 *godine povećala se za* 1 $(p + 0.5)$*. Koja je kamatna stopa vrijedila prve* 3 *godine ?*

Označimo: $C_0 = 30\ 000.00$, $C_{12} = 70\ 000.00$, $r = 1 + \frac{p}{100}$, $r_1 = 1 + \frac{p-0.5}{100}$, $r_2 = 1 + \frac{p+0.5}{100}$. Tada je: $C_3 = C_0 \cdot r^3$, $C_8 = C_3 \cdot r_1^5 = C_0 \cdot r^3 \cdot r_1^5$, $C_{12} = C_8 \cdot r_2^4 = C_0 \cdot r^3 \cdot r_1^5 \cdot r_2^4$. Tako dobivamo jednadžbu:

$$70\ 000 = 30\ 000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{p - .5}{100}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{p + .5}{100}\right)^4 ,$$

koju možemo lako riješiti npr. metodom Regula falsi (vidi [18]). Dobivamo: $p = 7.358595$.

Primjer 10.15 *Promatramo početni kapital* $C_0 = 100.00$*, koji se ukamaćuje primjenom godišnje dekurzivne kamatne stope* $p = 8$*. U* Tablici 9.3 *može se usporediti kretanje vrijednosti kapitala, a na* Slici 9.7 *kretanje ukupnih kamata prvih deset godina u uvjetima jednostavnog i složenog ukamaćivanja.*

kraj	*Jednostavno ukamaćivanje*		*složeno ukamaćivanje*	
godine	*kamate*	*vrijednost kapitala*	*kamate*	*vrijednost kapitala*
0	*-*	*100.00*	*-*	*100.00*
1	*8.00*	*108.00*	*8.00*	*108.00*
2	*8.00*	*116.00*	*8.64*	*116.64*
3	*8.00*	*124.00*	*9.33*	*125.97*
4	*8.00*	*132.00*	*10.08*	*136.05*
5	*8.00*	*140.00*	*10.88*	*146.93*
6	*8.00*	*148.00*	*11.75*	*158.69*
7	*8.00*	*156.00*	*12.69*	*171.38*
8	*8.00*	*164.00*	*13.71*	*185.09*
9	*8.00*	*172.00*	*14.81*	*199.90*
10	*8.00*	*180.00*	*15.99*	*215.89*
$\sum$	*80.00*		*99.90*	

Tablica 9.3.

Slika 9.7. Jednostavno i složeno ukamaćivanje. Svjetliji pravokutnici predstavljaju ukupne jednostavne, a tamniji ukupne složene kamate krajem godine

Primjedba 10.3 *Obračunsko razdoblje ne mora biti godina. Ako se kamate obračunavaju na kraju svakog obračunskog razdoblja duljine Δt i ako se pri tome koristi dekurzivna kamatna stopa p_t, tada je vrijednost kapitala na kraju n–tog obračunskog razdoblja duljine Δt jednaka:*

$$C_n = C_0\, r_t^n\,, \qquad r_t = 1 + \frac{p_t}{100}. \tag{10.22}$$

Primjer 10.16 *Neka je* 12 500.00 *početni kapital i* $p = 7$ *tromjesečna kamatna stopa (smatra se da su svi mjeseci jednako dugački). Uz primjenu složenog dekurzivnog ukamaćivanja treba izračunati konačni kapital i vrijednost ukupnih kamata nakon* 15 *mjeseci. Usporedi dobiveno rješenje s rješenjem iz* Primjera 10.7*.*

Primjenom formule (9.22) dobivamo: $C_{15} = 17\ 531.90$ i $I_{15} = 5\ 031.90$.

Primjedba 10.4 *Pojam anticipativnog ukamaćivanja već smo spomenuli na početku ovog odjeljka. Pogledajmo malo detaljnije princip složenog anticipativnog ukamaćivanja. Neka je* q *anticipativna godišnja kamatna stopa, a* $j = \frac{q}{100}$ *odgovarajući anticipativni godišnji kamatnjak. Prema (9.9) vrijedi:*

$$C_0 = C_1 - C_1 \cdot j = C_1(1-j), \quad tj. \quad C_1 = C_0 \frac{1}{1-j},$$
$$C_1 = C_2 - C_2 \cdot j = C_2(1-j), \quad tj. \quad C_2 = C_0 \frac{1}{(1-j)^2},$$

i općenito:

$$\boxed{C_n = C_0 \, \frac{1}{(1-j)^n}.} \tag{10.23}$$

Kako je: $1 - j^2 = (1-j)\,(1+j) < 1$*, vrijedi:* $(1+j) < \frac{1}{1-j}$*, što znači da pri jednakoj kamatnoj stopi anticipativno ukamaćivanje daje veću konačnu vrijednost kapitala nego dekurzivno ukamaćivanje. Primjena dekurzivnog godišnjeg kamatnjaka* i *dat će istu konačnu vrijednost kapitala kao i primjena anticipativnog godišnjeg kamatnjaka* j *onda ako je:* $1 + i = \dfrac{1}{1-j}$*, tj. ako je:*

$$\boxed{i = \frac{1}{1-j}.} \tag{10.24}$$

Tako bi u Primjeru 10.5 *godišnji dekurzivni kamatnjak, koji bi dao istu vrijednost konačnog kapitala (*107.52688*) kao i anticipativni kamatnjak* $j = 7\%$ *bio:* $i = \frac{0.07}{1-0.07} = 0.0752688$*, odnosno:* 7.52688%*.*

10.2.2.1 Složeno ispodgodišnje ukamaćivanje

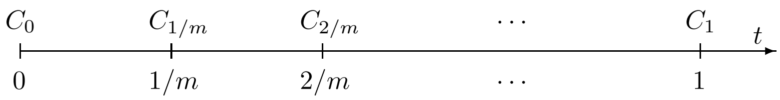
Često je puta u praksi zadana godišnja kamatna stopa, a vrijednost kapitala treba izračunati za vrijeme kraće od jedne godine. Neka je:

C_0- početni kapital u trenutku $t_0 = 0$,

$p-$ dekurzivna godišnja kamatna stopa,

m– broj jednakih podintervala na koji dijelimo godinu (isto kao u slučaju jednostavnog ispodgodišnjeg ukamaćivanja – vidi *Sliku 9.8*),

p_m– dekurzivna kamatna stopa vezana uz obračunsko razdoblje duljine $1/m$ (m–ti dio godine).



Slika 9.8. Složeno ispodgodišnje dekurzivno ukamaćivanje

Ispodgodišnja kamatna stopa p_m treba biti tako definiran da iznos konačnog kapitala C_1 na kraju godine uz primjenu složenog ukamaćivanja bude jednak, bez obzira da li smo jedanput primijenili godišnju kamatnu stopu p ili smo m puta sukcesivno primijenili ispodgodišnju kamatnu stopu p_m. Broj p_m nazivamo **složeni ispodgodišnji kamatnjak** ili **konformni kamatnjak**.

Konačni kapital C_1 na kraju prve godine dobiven primjenom godišnje kamatne stope p na početni kapital C_0 iznosi:

$$C_1 = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right). \tag{10.25}$$

S druge strane, vrijednost početnog kapitala C_0 na kraju prvog podintervala (uz primjenu ispodgodišnje kamatne stope p_m) je:

$$C_{1/m} = C_0 + C_0\,\frac{p_m}{100} = C_0 r_m\,, \quad \text{gdje je} \quad r_m = 1 + \frac{p_m}{100}.$$

Veličinu r_m nazivamo **ispodgodišnji kamatni faktor**.

Na kraju drugog podintervala imamo:

$$C_{2/m} = C_{1/m} + C_{1/m}\,\frac{p_m}{100} = C_{1/m}\left(1 + \frac{p_m}{100}\right) = C_0 r_m^2.$$

Općenito, nakon k podintervala duljine $\frac{1}{m}$ vrijednost kapitala bit će:

$$\boxed{C_{k/m} = C_0\, r_m^k\,, \quad r_m = 1 + \tfrac{p_m}{100}\,, \quad (k = 1, 2, \ldots)} \tag{10.26}$$

Na kraju m–tog podintervala (što se podudara s krajem godine) imamo:

$$C_{m/m} = C_0\left(1 + \frac{p_m}{100}\right)^m. \tag{10.27}$$

Izjednačavajući izraze (9.25) i (9.27):

$$C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)=C_0\left(1+\frac{p_m}{100}\right)^m ,$$

dobivamo veličinu **složene ispodgodišnje kamatne stope** p_m:

$$\boxed{p_m = 100\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right).} \qquad (10.28)$$

Obrnuto, ako je zadana ispodgodišnja kamatna stopa p_m, iz formule (9.28) lako možemo izračunati veličinu godišnje kamatne stope p:

$$p = 100\left[\left(1+\frac{p_m}{100}\right)^m - 1\right]. \qquad (10.29)$$

Primjer 10.17 *Neka je* 1 000.00 *početna vrijednost kapitala, a* $p = 24$ *dekurzivna godišnja kamatna stopa. Za* $m = 2, 4, 12$ *treba izračunati vrijednost kapitala na kraju svakog podintervala tijekom godine dana.*

U *Tablici 9.4* prikazano je kretanje vrijednosti kapitala na kraju svakog polugodišta, kvartala i *„mjeseca"*. Primijetimo da, bez obzira koliko često godišnje obavljamo ukamaćivanje (naravno uz primjenu odgovarajućeg ispodgodišnjeg kamatnjaka), na kraju godine dobiva se isti iznos kapitala.

m=2 (polugodišta) $p_2 = 11.35529$		m=4 (kvartali) $p_4 = 5.52501$		m=12 („mjeseci") $p_{12} = 1.80876$	
				1.	1 018.09
				2.	1 036.50
		1.	1 055.25	3.	1 055.25
				4.	1 074.34
				5.	1 093.77
1.	1 113.55	2.	1 113.55	6.	1 113.55
				7.	1 133.69
				8.	1 154.20
		3.	1 175.08	9.	1 175.08
				10.	1 196.33
				11.	1 217.97
2.	1 240.00	4.	1 240.00	12.	1 240.00

Tablica 9.4. Kretanje vrijednosti kapitala prilikom ispodgodišnjeg ukamaćivanja

Primjer 10.18 *Zadan je početni kapital od* 15 250.00 *i godišnja kamatna stopa* $p = 12$. *Uz primjenu složenog dekurzivnog ukamaćivanja treba izračunati vrijednost kapitala nakon* 20 *mjeseci. Usporedi rješenje iz* Primjera 10.9

Uzet ćemo da je $m = 12$ (godinu smo podijelili na 12 jednakih *„mjeseci”*). Tada je prema (9.28), „mjesečna” složena ispodgodišnja kamatna stopa jednaka: $p_m = 0.948879$. Vrijednost kapitala nakon 20 mjeseci prema formuli (9.26) bit će:

$$C_{20/12} = C_0 \left(1 + \frac{0.948879}{100}\right)^{20} = 18\ 420.44.$$

Primjer 10.19 *Netko je 6. 03. posudio iznos od* 10 000.00 *uz obračun složenih dekurzivnih kamata i promjenjivu mjesečnu kamatnu stopu. Dug treba vratiti 19. 05. Mjesečna kamatna stopa u ožujku bila je* 1*, u travnju* 2.5*, a u svibnju* 2*. Izračunaj veličinu duga na dan 19. 05. (vidi* Sliku 9.5*). Usporedi rezultat s rezultatom iz* Primjera 10.10.

Najprije ćemo izračunati broj dana u svakom mjesecu u kojima je korišten kapital (vidi niže navedenu tablicu), a mjesečne kamatne stope pretvoriti u dnevne prema formuli (analogno formuli (9.28)):

$$p_d = 100 \left(\sqrt[d]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right), \tag{10.30}$$

gdje je:

p – mjesečni kamatnjak u mjesecu s d dana,

p_d – dnevni kamatnjak u mjesecu s d dana.

mjesec	ukupni broj dana	dani korištenja kapitala	mjesečni kamatnjak	dnevni konformni kamatnjak
ožujak	31	25	1	0.032103
travanj	30	30	2.5	0.082343
svibanj	31	19	2	0.063900

Tablica 9.5.

Vrijednost kapitala na dan 31. 03. bit će: $C_1 = C_0 \cdot 1.00032103^{25} = 10\,080.57$, na dan 30. 04. bit će: $C_2 = C_1 \cdot 1.025 = 10\,332.58$, a na dan 19.05. bit će: $C_3 = C_2 \cdot 1.000639^{19} = 10\,458.75$. Prema tome, veličina duga na dan 19. 05. je 10 458.75.

Primjer 10.20 *Zadan je početni kapital od* 10 000.00 *i dekurzivna godišnja kamatna stopa* $p = 25$*. Treba izračunati vrijednost kapitala nakon* 100 *dana (u godini koja ima* 365 *dana):*

a) primjenom jednostavnog dekurzivnog ukamaćivanja,

b) primjenom složenog dekurzivnog ukamaćivanja.

a) Dnevna jednostavna ispodgodišnja kamatna stopa prema (9.19) iznosi:

$$p_d = \frac{p_d}{365} = \frac{25}{365} = 0.068493\,,$$

a vrijednost kapitala C_0 nakon 100 dana uz primjenu jednostavnog ukamaćivanja prema (9.20) je:

$$C_{100} = C_0 + 100\, C_0\, \frac{p_d}{100} = 10\ 684.93.$$

b) Dnevna složena ispodgodišnja kamatna stopa prema formuli (9.30) iznosi $p_d = 0.061154$, a vrijednost početnog kapitala C_0 nakon 100 dana uz primjenu složenog ukamaćivanja je:

$$C_{100} = C_0 \left(1 + \frac{p_d}{100}\right)^{100} = 10\ 630.43.$$

10.2.2.2 Konformna i relativna kamatna stopa

Da bi se prema formuli (9.28) izračunala složena ispodgodišnja kamatna stopa, potrebno je izračunati m–ti korjen nekog realnog broja. Ranije, dok u praksi nisu postojala elektronička računala, jedina realna mogućnost za to bila je primjena logaritamskih tablica. Kako je to za primjenu u poslovanju bilo nepraktično i sporo, javila se potreba za pojednostavljivanjem postupka.

Izraz (9.28) možemo pisati:

$$p_m = 100\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right),$$

gdje je $i = \frac{p}{100}$ odgovarajući godišnji kamatnjak. p_m možemo shvatiti kao funkciju od i. Razvojem funkcije $p_m(i)$ u Taylorov red u okolini 0, dobivamo

$$p_m(i) = 0 + \frac{100}{m} i + \frac{1}{2}\frac{100}{m}\frac{1-m}{m} i^2 + \cdots \tag{10.31}$$

Uz pretpostavku da je $i^2, i^3, \cdots$ zanemarivo, iz (9.31) dobivamo linearnu aproksimaciju konformne kamatne stope koju ćemo označiti s p_r:

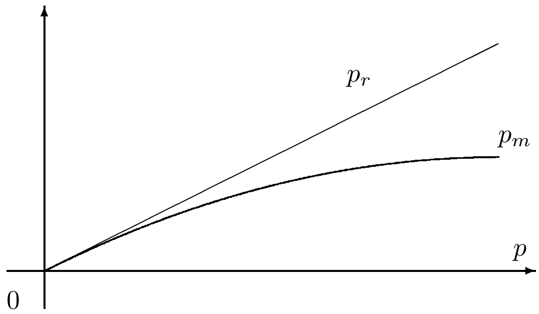
$$p_r := \frac{100}{m} i = \frac{p}{m}. \tag{10.32}$$

U literaturi ovu linearnu aproksimaciju konformne kamatne stope nalazimo pod imenom **relativna kamatna stopa**. Opravdanost (odnosno neopravdanost!) ovakve aproksimacije vidi se već i iz kretanja potencija godišnjeg kamatnjaka i (vidi *Tablicu 9.6*).

p	3	5	24	60
i	0.03	0.05	0.24	0.6
i^2	0.0009	0.0025	0.0576	0.36
i^3	0.000027	0.000125	0.013824	0.216
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tablica 9.6. Potencije godišnjeg kamatnjaka i za različite vrijednosti odgovarajuće godišnje kamatne stope p.

Smisao linearne aproksimacije konformne kamatne stope p_m može se i grafički predstaviti. Na *Slici 9.9* prikazani su grafovi konformne i relative kamatne stope kao funkcije godišnje kamatne stope p.



Slika 9.9. Konformna i relativna kamatna stopa kao funkcija godišnje kamatne stope

Funkciju $p_m(i)$ u okolini nule aproksimirali smo linearnom funkcijom, a njen graf tangentom u točki $(0, 0)$. Kao što se vidi na *Slici 9.9* ova aproksimacija je „dobra" za male vrijednosti godišnje kamatne stope p, dok za veće vrijednosti od p razlike (greške aproksimacije!) postaju drastične!

Primjedba 10.5 *Primijetimo da se relativna kamatna stopa (9.32) podudara s jednostavnom ispodgodišnjom kamatnom stopom (9.19), ali to ne znači da se primjenom relativne kamatne stope kod obračuna ispodgodišnjih složenih kamata dobija isti rezultat kao i prilikom obračuna jednostavnih ispodgodišnjih kamata.*

Primjedba 10.6 *Ako je $m > 1$, onda je $p_m < p_r$ (konformna kamatna stopa manja je od odovarajuće relativne kamatne stope). To ima za posljedicu da primjenom relativne ispodgodišnje kamatne stope prilikom obračuna složenih ispodgodišnjih kamata uvijek nešto više (nego što bi trebalo) dobiva onaj koji posuđuje novac (u čiju korist se obračunavaju kamate). Ako je $m < 1$ (obračunska razdoblja su duža od godine dana), onda je $p_m < p_r$ [4].*

Neka je p dekurzivna godišnja kamatna stopa i neka se obračun ispodgodišnjih kamata obavlja primjenom relativne kamatne stope p_r. Efekt je takav kao da se realno primjenjuje viša godišnja kamatna stopa p_e za koju vrijedi:

$$\boxed{C_0\left(1+\frac{p_e}{100}\right)=C_0\left(1+\frac{p_r}{100}\right)^m.} \tag{10.33}$$

[4] Dokaze ovih tvrdnji može se vidjeti kod Šego (1991).

U tom slučaju kamatnu stopu p nazivamo **nominalna godišnja kamatna stopa**, a kamatnu stopu p_e **efektivna kamatna stopa**. Prema (9.33) efektivna kamatna stopa je takva dekurzivna godišnja kamatna stopa, čijom primjenom na kraju godine dobivamo isti iznos kao da smo m puta sukcesivno primijenili relativnu kamatnu stopu. U *Tablici 9.7* za zadane vrijednosti godišnjih kamatnih stopa p, izračunate su vrijednosti odgovarajućih *„mjesečnih”* ($m = 12$) konformnih p_m i relativnih p_r kamatnih stopa, kao i odgovarajuće efektivne kamatne stope p_e.

p	3.5	7.5	12	24	60	120	360	720
p_m	0.28709	0.60449	0.948879	1.808758	3.994410	6.791140	13.56115	19.1656
p_r	0.29167	0.625	1	2	5	10	30	60
p_e	3.55670	7.76326	12.68250	26.82417	79.58563	213.8428	2229.808	28047.5

Tablica 9.7. Konformna, relativna i efektivna kamatna stopa

Primjer 10.21 *Treba odrediti efektivnu godišnju kamatnu stopu p_e za kvartalni relativni kamatnjak* 1.5%.

Iz (9.33): $C_0\,(1 + \frac{p_e}{100}) = C_0\,1.015^4$ dobivamo: $p_e = 6.136$.

Primjer 10.22 *Početni kapital od* 100.00 *uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu* $p = 60$ *na kraju godine primi vrijednost* 160.00. *Ako se obračun kamata obavlja ispodgodišnje uz primjenu odgovarajućeg konformnog kamatnjaka, na kraju godine konačni kapital je isti. Ako se primjenjuje relativni kamatnjak, vrijednost konačnog kapitala je veća (vidi* Tablicu 9.8 *i* Sliku 9.10 *– kolike su efektivne kamatne stope u ovom primjeru ?)* [5]

kraj	*kvartalna kamatna stopa*		*mjesečna kamatna stopa*	
mjeseca	*konformna*	*relativna*	*konformna*	*relativna*
0.	*100.00*	*100.00*	*100.00*	*100.00*
1.			*103.99*	*105.00*
2.			*108.15*	*110.25*
3.	*112.47*	*115.00*	*112.47*	*115.76*
4.			*116.96*	*121.55*
5.			*121.63*	*127.63*
6.	*126.49*	*132.25*	*126.49*	*134.01*
7.			*131.54*	*140.71*
8.			*136.80*	*147.75*
9.	*142.26*	*152.09*	*142.26*	*155.13*
10.			*147.94*	*162.89*
11.			*153.85*	*171.03*
12.	*160.00*	*174.90*	*160.00*	*179.59*

Tablica 9.8. Kretanje vrijednosti kapitala tijekom godine uz primjenu konformne i relativne kamatne stope

[5] To je bio razlog što su štediše, koji su tijekom 1984–1986 svoja sredstva oročavali tromjesečno, na kraju godine dobili više nego oni koji su svoja sredstva oročavali na godinu ili više dana – vidi Scitovski (1987) i Šego (1991).

Slika 9.10. Kretanje vrijednosti ukupnih kamata tijekom godine uz primjenu konformne (svjetliji pravokutnici) i relativne (tamniji pravokutnici) kamatne stope

10.2.2.3 Korektan obračun složenih ispodgodišnjih kamata

U t.9.2.2.2 vidjeli smo da primjena relativne kamatne stope za izračunavanje složenih ispodgodišnjih kamata vodi do računskih pogrešaka, koje su to veće što je odgovarajuća godišnja kamatna stopa veća. Budući da danas svako i najmanje poduzeće raspolaže elektroničkim računalom, relativno komplicirani računski postupak prilikom obračuna ispodgodišnjih složenih kamata ne bi trebao biti razlog da se i dalje koristi relativna kamatna stopa.

Međutim, i prilikom primjene konformnog kamatnjaka za obračun ispodgodišnjih kamata mogu se javiti greške:

- zbog numeričkog zaokruživanja veličine konformne kamatne stope;
- zbog toga što svi mjeseci u godini nemaju jednaki broj dana, pa mjesečna konformna kamatna stopa, gdje se za jedan mjesec uzima $\frac{1}{12}$ godine, samo po sebi pretstavlja jednu aproksimaciju.

Vrijednost ispodgodišnjih kamata može se izračunati i bez korištenja pojma *„ispodgodišnja kamatna stopa”*. Pretpostavimo da neki kapital C_0 od trenutka $t_0 = 0$ raste po dekurzivnoj godišnjoj kamatnoj stopi p. Njegova vrijednost u trenutku $t > 0$ bit će (vidi npr. Muškardin (1985)):

$$\boxed{C(t) = C_0 r^t, \qquad r = 1 + \frac{p}{100}.} \tag{10.34}$$

Ako je potrebno izračunati vrijednost kapitala C_0 nakon istjeka m–tog dijela godine, onda to prema (9.34) možemo uraditi pomoću formule:

$$C_{1/m} = C_0 r^{1/m},$$

dok na kraju k ovakvih dijelova godine imamo (vidi takoder Scitovski (1987):

$$\boxed{C_{k/m} = C_0 r^{k/m}.} \tag{10.35}$$

Primjedba 10.7 *Vrijednost t iz formule (9.34) možemo shvatiti tako kao da smo broj m pustili u beskonačnost, a broj t tada je granična vrijednost kvocijenta $\frac{k(m)}{m}$, kada $m \to \infty$ (vidi Franciśković (1990)).*

Funkcija C iz (9.34) rješenje je Cauchy–evog problema:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \ln r\,, \quad y(0) = C_0 \tag{$\star$}$$

Modelom ($\star$) opisan je tzv. **prirodni zakon rasta***:* „relativna brzina porasta kapitala je konstantna i jednaka prirodnom logaritmu godišnjeg dekurzivnog kamatnog faktora $r = 1 + \frac{p}{100}$" *(vidi Franciśković (1990), Muškardin (1985), Šego (1991)). Funkcija C naziva se* **funkcija kontinuiranog ukamaćivanja***. Formula (9.35) je diskretna, a formula (9.34) kontinuirana generalizacija osnovne formule financijske matematike (9.21). Budući da se funkcije zadane s (9.21), (9.35) i (9.34) podudaraju na zajedničkoj domeni, kažemo da su međusobno* **ekvivalentne** *(vidi Franciśković (1990)). To se međutim, ne može reći za funkciju:*

$$C(t) = C_0 \cdot e^{it}\,, \qquad i = p/100, \tag{$\star\star$}$$

koja se često spominje u literaturi (vidi Caprano (1992), Relić (1990), Dabčević i dr.(1989), Martić (1980), Šego (1991) itd). Naime, za $t \in \mathbb{N}$, formula ($\star\star$) ne podudara se s (9.21), a ako je $t \in \mathbb{Q}$, ne podudara se s (9.35). Formula ($\star\star$) može se dobiti graničnim prijelazom na obračunska razdoblja kraća od godine, pri čemu se koristi relativni kamatnjak (vidi npr Šego (1991)).

U najopćenitijem slučaju od interesa za financijsku i privrednu praksu kao dijelove godine promatramo **dane**. U tom slućaju mjerenje vremena organizirat ćemo na sljedeći način:

- trenutku početka aktiviranja kapitala pridružit ćemo realni broj $t_0 = 0$;
- k–tom danu od početka aktiviranja kapitala pridružit ćemo realni broj $t = \frac{k}{365}$.

Tada će vrijednost kapitala u trenutku t (nakon istjeka k dana) biti:

$$C_{k/365} = C_0 r^{k/365}.$$

Ovdje treba primijetiti da broj k može biti manji, veći ili jednak 365. Ako želimo potpunu korektnost, treba uzeti u obzir i prestupne godine.

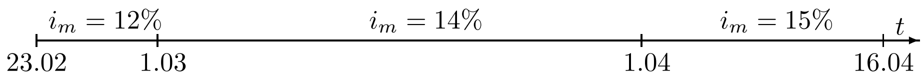
Primjenom korektne formule (9.34) za obračun složenih dekurzivnih ispodgodišnjih kamata pojam: *„efektivna kamatna stopa"* više nije potreban jer se ona podudara s odgovarajućom nominalnom godišnjom kamatnom stopom.

Primjer 10.23 *Početni kapital od* 10 000.00 *uplaćen je na dan 23. 02 (u godini koja nije prestupna). Treba izračunati njegovu vrijednost na dan 16. 04 iste godine ako je u čitavom razdoblju korištena godišnja kamatna stopa* $p = 12$.

Danu 23. 02. pridružit ćemo $t_0 = 0$. Taj dan se ne broji prilikom obračuna. Danu 16. 04. pridružit ćemo broj $\frac{52}{365}$, a vrijednost kapitala toga dana je:

$$C_{52/365} = 10\ 000 \cdot 1.12^{52/365} = 10\ 162.76.$$

Primjer 10.24 *Početni kapital od* 10 000.00 *uplaćen je na dan 23. 02. (u godini koja nije prestupna). Treba izračunati njegovu vrijednost na dan 16. 04. iste godine. Mjesečni kamatnjaci mijenjaju se kao što je prikazano na* Slici 9.11.



Slika 9.11. Jednostavno ukamaćivanje uz promjenjivu kamatnu stopu

Kretanje stanja kapitala, kao i formule po kojima je to stanje izračunato vidljive su u *Tablici 9.9.*

datum	dani	kamate	stanje kapitala	formula
23.02	-	-	10 000.00	-
28.02	5	204.43	10 204.43	$C_0 \star 1.12^{5/28}$
31.03	31	1428.62	11 633.05	$C_1 \star 1.14$
16.04	16	958.27	12 533.31	$C_2 \star 1.15^{16/30}$

Tablica 9.9. Korektno izračunavanje stanja kapitala

Primjedba 10.8 *Korištenjem formule (9.34) direktno se izračunava vrijednost kapitala na rok kraći ili duži od godine dana bez prethodnog izračunavanja konformnog kamatnjaka, što doprinosi smanjenju numeričkih pogrešaka prilikom obračuna. Prirodno bi bilo da se obračun složenih dekurzivnih ispodgodišnjih kamata u našim financijskim institucijama obavlja direktno primjenom formule (9.34). Nažalost, složene ispodgodišnje kamate danas se u praksi u najboljem slučaju obračunavaju uz primjenu odgovarajućeg konformnog kamatnjaka, koji je zadan s konačno (najčešće s* 5*) decimala u odgovarajućim tablicama. Na taj način značajno se povečavaju numeričke greške u obračunu, a uvid u financijsko poslovanje je neprecizan.*

Ako na početni kapital C_0 primijenimo formulu (9.34) s $t > 0$, vrijednost kapitala se povečava – kažemo da se početni **kapital ukamaćuje**. Za $t < 0$ vrijednost kapitala se smanjuje – kažemo da se početni **kapital diskontira**. Na *Slici 9.12* prikazano je kretanje ukupnih kamata prilikom ukamaćivanja i diskontiranja početnog kapitala $C_0 = 100.00$ uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 18$.

Slika 9.12. Kretanje ukupnih kamata prilikom jednostavnog (svjetliji pravokutnici) i složenog (tamniji pravokutnici) ukamaćivanja i diskontiranja početnog kapitala $C = 100.00$ *uz godišnju kamatnu stopu* $p = 18$.

Primjedba 10.9 *Razmotrimo na kraju problem procjene prosječne dekurzivne kamatne stope u nekom vremenskom intervalu, ako su poznati podaci o kretanju promatrane veličine u nekoliko trenutaka. Ovaj problem često se javlja u ekonomskim istraživanjima, poljoprivredi, biologiji itd. Za primjer uzmimo tjedne podatke o kretanju mase (u kg) jedne vrste ženskih pilića tijekom prvih šest tjedana[6]:*

kraj tjedna (t_i)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
masa prosječnog pileta (C_i)	*1 0.147*	*0.357*	*0.641*	*0.980*	*1.358*	*1.758*

Tablica 9.10.

Na osnovi podataka (t_i, C_i), $i = 1, \ldots, m$ *treba procijeniti parametre* C_0 *i* p *funkcije–modela (9.34):*

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t .$$

[6]Vidi: G. Kralik, R. Scitovski, Istraživanje značajki rasta brojlera pomoću asimetrične S–funkcije, Stočarstvo 47(1993), 207–213

To ćemo uraditi pomoću metode najmanjih kvadrata (vidi Scitovski (1993)) minimizirajući sumu kvadrata relativnih odstupanja stvarnih od teoretskih vrijednosti:

$$F(C_0, p) = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{C_i - C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{t_i}}{C_i} \right]^2 .$$

Slika 9.13. Izračunavanje prosječne tjedne stope rasta

Primjenom Gauß–Newtonove metode, dobivamo optimalne parametre: $C_0^\star = 0.111581$ $p^\star = 63.1251$ *i* $F(C_0^\star, p^\star) = 0.223327$. *Broj* $C_0^\star$ *predstavlja početnu masu pileta, a* $p^\star$ *tjednu kamatnu stopu prirasta. Na* Slici (9.13.a *prikazani su empirijski podaci i graf funkcije–modela, a na* Slici 9.13.b *nivo krivulje minimizirajuće funkcije* F.

Često puta se prosječna stopa rasta pogrešno računa kao geometrijska sredina prirasta (u ovom slučaju bilo bi $p = 64.26$*) ili preko eksponencijalnog trenda (u ovom slučaju bilo bi* $p = 48.93$ *– vidi Scitovski (1993)).*

Zadaci za vježbu 9.2

1. Ako je 25 000.00 početni kapital i $p = 22$ godišnja kamatna stopa, uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamaćivanja izračunajte vrijednost tog kapitala na kraju treće godine, iznos jednogodišnjih kamata I_1 i vrijednost ukupnih kamata nakon 3 godine.

   Rješenje: $C_3 = 41\ 500.00$, $I_1 = 5\ 500.00$, $I_3 = 16\ 500.00$.

2. Neka je $p = 25$ godišnja kamatna stopa. Nakon koliko će se godina neki kapital utrostručiti ako primjenjujemo jednostavno dekurzivno ukamaćivanje?

   Rješenje: nakon $n = 8$ godina.

3. Kapital od 10 000.00 nakon 4 godine uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamaćivanja naraste na iznos od 15 000.00. Koja je godišnja kamatna stopa pri tome primjenjena ?

   Rješenje: $p = 12.5$.

4. Ako je 15 750.00 osnovni kapital i $p = 2$ mjesečna kamatna stopa, uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamaćivanja izračunajte vrijednost tog kapitala nakon 6 mjeseci, iznos mjesečnih kamata I_1 i vrijednost ukupnih kamata nakon 6 mjeseci.

   Rješenje: $C_6 = 17\ 640.00$, $I_1 = 315.00$, $I_6 = 1\ 890.00$.

5. Zadan je početni kapital od 32 500.00 i $p = 19$ godišnja kamatna stopa. Uz primjenu jednostavnog dekurzivnog ukamaćivanja izračunajte vrijednost kapitala nakon 16 mjeseci.

   Rješenje: $C_{16} = 41\ 762.50$.

6. Netko je 13. 05. posudio iznos od 15 000.00 uz obračun jednostavnih dekurzivnih kamata i promjenjivu mjesečnu kamatnu stopu. Dug treba vratiti 15. 09. Mjesečna kamatna stopa u svibnju bila je 1, u lipnju 1.5, u srpnju 2, u kolovozu 1.75, a u rujnu 2.2. Izračunajte veličinu duga na dan 15. 09.

   Rješenje: 16 044.44.

7. Izradite BASIC ili LOTUS program na osnovi kojeg ćete svaki zadatak tipa *Zadatka 6.* moći riješiti unošenjem podataka o veličini duga, datumu preuzimanja duga, datumu vraćanja duga te vrijednostima kamatnih stopa po mjesecima.

8. Izradite BASIC program kojim ćete moći riješiti bilo koji zadatak tipa *Zadatka 1.,2.* ili *3.*

9. Neka je 25 000.00 početni kapital i $p = 22$ godišnja kamatna stopa. Uz primjenu složenog dekurzivnog ukamaćivanja izračunajte vrijednost tog kapitala na kraju treće godine i vrijednost ukupnih kamata nakon 3 godine.

   Rješenje: $C_3 = 45\ 396.20$, $I_3 = 20\ 396.20$.

10. Neka je $p = 25$ godišnja kamatna stopa. Nakon koliko će se godina neki kapital C_0 utrostručiti ako primjenjujemo složeno dekurzivno ukamaćivanje ?

    Rješenje: nakon $n = 4.923343$ godina, tj. nakon 4 godine i 337 dana.

11. Početni kapital od 10 000.00 nakon 4 godine uz primjenu složenog dekurzivnog ukamaćivanja naraste na iznos 15 000.00. Koja je godišnja kamatna stopa pri tome primjenjena ?

    Rješenje: $p = 10.6682$.

12. Gospodin **X** uložio je u banku početni kapital od 30 500.00 uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata.

    (a) Ako je godišnja kamatna stopa $p = 6.125$, kolika će biti vrijednost konačnog kapitala na kraju četvrte godine i vrijednost ukupnih kamata na početku četvrte godine ?

    (b) Nakon koliko godina početni kapital naraste na iznos 36 786.07, ako je primjenjivan godišnji kamatnjak $i = 5.5\%$?

    (c) Koju kamatnu stopu je banka primjenjivala ako je nakon 12 godina početni kapital narastao na vrijednost 64 937.44 ?

    (d) Koliki bi početni kapital gospodin **X** morao uložiti u banku da bi nakon 18 godina uz godišnju kamatnu stopu 5.5 dobio konačni kapital od 100 000.00.

    Rješenje: **(a)** $C_4 = 38\ 687.50$, $I_4 = 5\ 954.65$ **(b)** 3.5, **(c)** 6.5, **(d)** 38 146.59.

13. Poduzeće za prodaju stanova ima dvije ponude za jednu vrstu stana: A: 80 000.00 odmah, 100 000.00 nakon 2 godine, 40 000.00 nakon 5 godina; B: 96 600.00 odmah, 75 000.00 nakon 3 godine, 50 000.00 nakon 4 godine; Koja ponuda je povoljnija za kupca, ako se računa sa 7% (odnosno 9%) dekurzivnih godišnjih kamata ? Izradite odgovarajući BASIC program kojim ćete moći riješiti svaki zadatak ovakvog tipa.

    Rješenje: Kod 7% ponuda A je povoljnija za 103.76, a kod 9% ponuda B je povoljnija za 230.27.

14. Ako je 20 000.00 početni kapital i $p = 2.5$ polugodišnja kamatna stopa, uz primjenu složenog dekurzivnog ukamaćivanja izračunajte vrijednost tog kapitala nakon 3 godine i vrijednost ukupnih kamata nakon 3 godine.

    Rješenje: $C_6 = 23\ 193.87$, $I_6 = 3\ 193.87$.

15. Neka je 50 000.00 početni kapital, a $p = 19$ dekurzivna godišnja kamatna stopa. Uz primjenu konformnog kamatnjaka izračunajte vrijednost kapitala nakon 16 mjeseci.

    Rješenje: $p_{12} = 1.4601687$, $C_{16} = 63\ 052.06$.

16. U godini koja nije prestupna za vrijednosti dekurzivnih godišnjih kamatnih stopa: $p \in \{100, 375, 1000\}$ izračunajte ekvivalentne konformne mjesečne kamatne stope za veljaču, travanj i srpanj.

    Rješenje:

mjesec	$p = 100$	$p = 375$	$p = 1000$
veljača	5.461201	12.696582	20.195348
travanj	5.862511	13.662879	21.785033
srpanj	6.063739	14.149131	22.587743

17. U godini koja nije prestupna za vrijednosti dekurzivnih mjesečnih kamatnih stopa: $p_{12} \in \{0.8, 1.2, 12, 20\}$ izračunajte odgovarajuću korektnu godišnju kamatnu stopu ako se mjesečna kamatna stopa odnosi na: veljaču, travanj i srpanj.

Uputa: za zadanu mjesečnu kamatnu stopu najprije treba izračunati odgovarajuću dnevnu pomoću formule (9.30), a onda pomoću formule (9.29) izračunati godišnju kamatnu stopu.

Rješenje:

mjesec	$p_{12} = 0.8$	$p_{12} = 1.2$	$p_{12} = 12$	$p_{12} = 20$
veljača	10.946	16.824	338.12	976.92
travanj	10.180	15.619	297.03	819.12
srpanj	9.836	15.079	279.75	755.65

18. Netko je 13. 05. posudio iznos od 20 000.00 uz obračun složenih dekurzivnih kamata i promjenjivu mjesečnu kamatnu stopu. Dug treba vratiti 29. 07. Mjesečna kamatna stopa u svibnju bila je 3, u lipnju 2.5, a u srpnju 2. Izračunajte veličinu duga na dan 29. 07.

    Rješenje: 21 265.09.

19. Neka je 25 000.00 početni kapital, a $p = 15$ dekurzivna godišnja kamatna stopa. Izračunajte vrijednost tog kapitala nakon 150 dana (u godini koja nije prestupna) uz primjenu relativnog ili konformnog dnevnog kamatnjaka. Kolika je efektivna godišnja kamatna stopa u slučaju primjene relativnog kamatnjaka ?

    Rješenje: Uz primjenu konformnog kamatnjaka: 26 477.95; uz primjenu relativnog kamatnjaka: 26 589.25; efektivni godišnji kamatnjak: 16.18%.

20. Koja je polugodišnja relativna kamatna stopa ekvivalentna efektivnom godišnjem kamatnjaku 9% ?

    Rješenje: 4.4.

21. Početni kapital od 50 000.00 ukamaćuje se kvartalno uz primjenu relativnog kamatnjaka i godišnje nominalne kamatne stope 8.

    (a) Na koju konačnu vrijednost će narasti kapital nakon 20 godina ?

    (b) Kolika je efektivna godišnja kamatna stopa ?

    (c) Koja relativna mjesečna kamatna stopa odgovara efektivnoj kamatnoj stopi iz (b) ?

    Rješenje: (a) 243 772.00, (b) 8.243, (c) 0.662.

22. Nakon 75 dana (u godini koja nije prestupna) kapital od 15 000.00 uz primjenu složenog dekurzivnog ukamaćivanja naraste na 15 381.47. Koja je godišnja kamatna stopa primjenjena?

    Rješenje: $p = 13$.

23. Nakon koliko će dana (u godini koja nije prestupna) kapital od 12 000.00 uz 15% dekurzivnih godišnjih kamata narasti na 12 516.24?

    Rješenje: 110 dana.

24. Izradite BASIC program kojim ćete moći riješiti bilo koji zadatak tipa *Zadatka 10.* ili *12.*

25. Izradite BASIC program na osnovi kojeg ćete svaki zadatak tipa *Zadatka 18.* moći riješiti unošenjem podataka o veličini duga, datumu preuzimanja duga, datumu vraćanja duga te vrijednostima kamatnih stopa po mjesecima.

26. Izradite BASIC program kojim ćete moći riješiti bilo koji zadatak tipa *Zadatka 19 – 21.*

27. Netko je uložio u banku početni kapital od 50 000.00 i nakon 6 godina uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata dobio 88 971.03. Prve dvije godine kamatna stopa p nije se mijenjala. Sljedeće godine povećala se za 2, a posljednje 3 godine smanjila se za 1. Kolika kamatna stopa je vrijedila prve dvije godine ?

    Rješenje: $p = 9.25$.

28. Netko je uložio u banku početni kapital od 100 000.00 i nakon 3 godine uz obračun složenih dekurzivnih godišnjih kamata dobio 127 718.10. Prve godine kamatna stopa p nije se mijenjala, a svake sljedeće povećavala se za 1. Kolika kamatna stopa je vrijedila prve godine ? Pokušajte generalizirati ovaj zadatak za n godina. Izradite odgovarajući BASIC program.

    Rješenje: $p = 7.5$.

29. Godina je podijeljena na m jednakih podintervala. U i–tom podintervalu djeluje godišnja kamatna stopa p_i, $(i = 1, \ldots, m)$. Pokažite da u uvjetima složenog dekurzivnog ukamaćivanja, relevantni godišnji kamatni faktor za tu godinu mora biti jednak geometrijskoj sredini svih m ispodgodišnjih kamatnih faktora, tj.:

$$r = (r_1 \cdot r_2 \cdots r_m)^{1/m}.$$

30. Godina je podijeljena na kvartale. U prvom kvartalu djeluje godišnja kamatna stopa $p_1 = 12$, u drugom $p_2 = 15$, u trećem $p_3 = 20$, a u četvrtom godišnja kamatna stopa $p_4 = 18$. Primjenom *Zadatka 29.* izračunajte prosječnu godišnju kamatnu stopu.

    Rješenje: $p = 16.21$.

31. Ako u i–tom mjesecu godine (koja nije prestupna) djeluje godišnja dekurzivna kamatna stopa p_i, pokažite da je prosječna godišnja kamatna stopa za tu godinu:

$$p = 100 \left[\sqrt[365]{\prod_{i=1}^{12} r_i^{d_i}} - 1 \right], \quad r_i = 1 + \frac{p_i}{100},$$

    gdje je d_i broj dana u i–tom mjesecu.

    Izradite BASIC program koji će na osnovi poznavanja godišnjih kamatnih stopa, koje djeluju u pojedinim mjesecima, izračunati prosječnu godišnju kamatnu stopu.

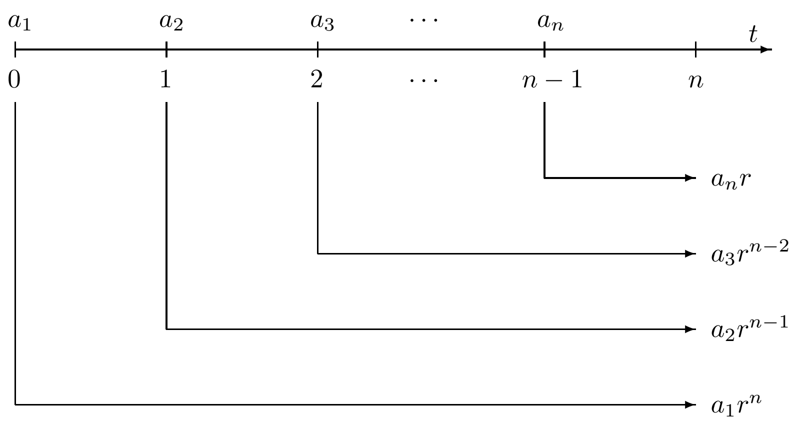
    Generalizirajte ovu formulu uz pretpostavku da su poznate godišnje kamatne stope p_i u n vremenskih intervala duljine d_i.

10.3 Konačna i sadašnja vrijednost više uplata

Često je u nekom trenutku potrebno izračunati vrijednost više uplata. Najčešće je to potrebno izračunati na početku prvog (**sadašnja vrijednost**) ili na kraju posljednjeg (**konačna vrijednost**) promatranog razdoblja. Uplate mogu biti redovite (godišnje, mjesečne itd) i uplaćivati se početkom (**prenumerando uplate**) ili krajem (**postnumerando uplate**) obračunskog razdoblja. Uplate se također mogu uplaćivati neredovito u proizvljnim vremenskim trenucima. Iznos uplata može biti jednak ili različit, a kamatna stopa može biti konstantna ili promjenjiva. U slučaju tekućih računa ili kreditnih kartica još se mora uzeti u obzir i mogućnost dozvoljene isplate u proizvoljnom trenutku. Mi ćemo proanalizirati samo neke tipične situacije, a još neke mogućnosti dane su u zadacima na kraju poglavlja.

10.3.1 Godišnje uplate s konstantnom kamatnom stopom

Neka je p dekurzivna godišnja kamatna stopa. Pretpostavimo da se na početku svake godine kroz n godina uplaćuju iznosi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (vidi *Sliku 9.14*).



Slika 9.14. Konačne vrijednosti uplata

Najprije ćemo izračunati sumu konačnih (na kraju n–te godine) vrijednosti svih uplaćenih svota.

Vrijednost svote a_1 na kraju n–te godine (prema (9.21)) iznosi $a_1\, r^n$, gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$ kamatni faktor. Vrijednost svote a_2 na kraju n–te godine je $a_2\, r^{n-1}$ itd. Konačno, vrijednost svote a_n na kraju n–te godine je $a_n\, r$. Prema tome, suma svih tih svota na kraju n–te godine je:

$$S_n = a_1 r^n + a_2 r^{n-1} + \cdots + a_n r. \tag{10.36}$$

Specijalno, ako je $a := a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (što je u praksi najčešći slučaj), onda se izraz (9.36) može pisati kao:

$$S_n = a(r^n + r^{n-1} + \cdots + r).$$

Zbrajanjem sume u zagradi (n–ta parcijalna suma geometrijskog reda s kvocijentom r), dobivamo:

$$\boxed{S_n = a\, r\, \frac{r^n - 1}{r - 1}.} \tag{10.37}$$

Ovo je **konačna vrijednost** n jednakih periodičnih svota koje se uplaćuju početkom godine.

Označimo s A_n sadašnju (u trenutku $t_0 = 0$) vrijednost sume svih tih svota. Tada, prema (9.21), vrijedi:

$$S_n = A_n r^n, \tag{10.38}$$

a onda iz (9.36) i (9.38) dobivamo sadašnju vrijednost A_n:

$$A_n = S_n r^{-n} = a_1 + a_2 r^{-1} + \cdots + a_n r^{-n+1}. \tag{10.39}$$

Specijalno, ako je $a := a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ onda iz (9.37) i (9.38) dobivamo **sadašnju vrijednost** n jednakih periodičnih svota koje se uplaćuju početkom godine:

$$\boxed{A_n = a r^{-n+1} \frac{r^n - 1}{r - 1}.} \tag{10.40}$$

Primjer 10.25 *Jedna rentna ustanova treba početkom svake od narednih $n = 8$ godina isplaćivati iznos $a = 50\ 000.00$.*

(a) *Kolika je sadašnja vrijednost cijele rente (svih isplata) u trenutku prve isplate ako je dekurzivna godišnja kamatna stopa $p = 9.5$?*

(b) *Kolika je konačna vrijednost cijele rente u trnutku posljednje isplate?*

(c) *Ako se primjenjuje dekurzivna godišnja kamatna stopa $p = 9.5$, koliki bi kapital C_0 korisnik rente morao uplatiti 200 dana prije prve isplate ?*

(d) Uz koju dekurzivnu godišnju kamatnu stopu bi kapital $C_0 = 200\ 000.00$ *uplaćen 200 dana prije prve isplate pokrio cijelu rentu ?*

(e) Koliko dugo bi mogla biti isplaćivana godišnja renta $a = 50\ 000.00$ *ako je 200 dana prije prve isplate rentnoj ustanovi stavljen na raspolaganje kapital* $C_0 = 400\ 000.00$ *uz godišnju kamatnu stopu* $p = 9.5$ *? Koliki kaptal bi preostao u trenutku posljednje isplate?*

(a) Prema (9.40) imamo: $A_8 = 50\ 000\, 1.095^{-7}\, \frac{1.095^{-8}-1}{0.095} = 297\ 480.61$.

(b) Prema (9.37) konačna vrijednost cijele rente na kraju osme godine je: $S_8 = 50\ 000 \cdot 1.095\, \frac{1.095^{-8}-1}{0.095} = 614\ 853.46$. Diskontiranjem ove vrijednosti za jednu godinu, dobivamo konačnu vrijednost rente u trenutku posljednje isplate: 561 510.00.

(c) Diskontiranjem veličine A_8 iz (a) za 200 dana, dobivamo: $A_8\, r^{-200/365} = 283\, 049.17$.

(d) Najprije ćemo vrijednost uloženog kapitala izračunati u trenutku prve isplate: $C_1 = 200\ 000 \cdot 1.095^{200/365} = 210\ 197.13$, a onda iz jednadžbe:

$$a \cdot r^{-n+1} \cdot \frac{r^n - 1}{r-1} = C_1,$$

izračunati kamatni faktor r (primijeni metodu Regula falsi iz [18]). Dobivamo $r = 1.244674$, odnosno godišnju kamatnu stopu $p = 24.674$.

(e) Također, najprije ćemo vrijednost uloženog kapitala izračunati u trenutku prve isplate: $C_1 = 400\ 000 \cdot 1.095^{200/365} = 420\ 394.25$. To ujedno mora biti i sadašnja vrijednost rente (9.40), tj mora biti:

$$a \cdot \frac{r - r^{-n+1}}{r-1} = C_1, \text{odakle slijedi:}\quad n = 1 - \frac{\ln\left(r - C_1 \cdot \frac{r-1}{a}\right)}{\ln r}.$$

Tako dobivamo $n = 14.40484821$. To znači da je godišnju rentu od 50 000.00 moguće isplaćivati početkom svake godine tijekom idućih 14 godina. U trenutku posljednje isplate preostali kapital možemo izračunati na sljedeći način (provjerite!):

$$\Delta C = C_1 \cdot r^{13} - a\frac{r^{14}-1}{r-1} = 18\ 986.82.$$

Primjer 10.26 (Wiener štedište). *Netko tijekom 15 godina na početku svake godine uplati neki iznos* a*. Na kraju petnaeste godine dobit će sumu svih uplaćenih iznosa uvećanu za* 50% *(tj. dobit će* $22.5\, a$*). Koja se godišnja kamatna stopa primjenjuje u ovoj financijskoj transakciji?*

Obećani iznos ($22.5\, a$) mora biti jednak konačnoj vrijednosti svih periodičnih uplata, dakle:

$$22.5\, a = a\, r\, \frac{r^{15}-1}{r-1}\ , \quad r > 1.$$

Sređivanjem ove jednadžbe dobivamo:

$$r^{16} - 23.5r + 22.5 = 0\ , \quad r > 1.$$

Ovu jednadžbu možemo rješiti metodom Regula falsi iz [18]. Dobivamo: $r = 1.04921$, odnosno $p = 4.921$.

Primjedba 10.10 *Specijalni tip rente je tzv.* **doživotna renta**, *koja se isplaćuje tako dugo dok korisnik rente živi. Financijska baza ovakve rente može biti gotovina ili nekretnina, koja se ustupa ili prodaje rentnoj ustanovi u svrhu ostvarivanja prava na doživotnu rentu. Visina rente ovisi o tom početnom kapitalu, ali i o starosti (odnosno očekivanom doživljavanju) budućeg korisnika rente. U tu svrhu koriste se tzv.* **tablice smrtnosti**. *Za primjer navodimo jedne ovakve tablice od* 1984/86 *godine (vidi Caprano i Gierl (1992)) u kojima je za različite starosne dobi muškaraca (m) i žena (ž) naveden broj godina doživljavanja (najvjerojatniji broj godina koji će još promatrana osoba doživjeti):*

godine starosti	(m)	(ž)	godine starosti	(m)	(ž)	godine starosti	(m)	(ž)
0	71.54	78.10	25	48.07	54.19	60	17.10	21.55
1	71.27	77.73	30	43.30	49.31	65	13.68	17.46
2	70.33	76.78	35	38.56	44.46	70	10.58	13.63
5	67.41	73.85	40	33.88	39.67	75	7.96	10.21
10	62.49	68.92	45	29.33	34.96	80	5.94	7.36
15	57.56	63.98	50	24.98	30.34	85	4.46	5.22
20	52.59	59.08	55	20.89	25.96	90	3.61	3.79

Tablica 9.11. Tablica smrtnosti – očekivano doživljavanje za muškarce (m) i žene(ž)

Tako npr. za početni kapital od 500 000.00 *uz godišnju kamatnu stopu* $p = 7.5$, *muškarac star* 55 *godina (za kojeg se prema tablici očekuje da će doživjeti još* 20.89 *godina – dakle, ukupno oko* 76 *godina) može dobiti doživotnu godišnju prenumerando rentu od* 44 765.08. *Naime, za* $n = 20.89$ *i* $A_n = 500\,000.00$ *iz (9.40) dobivamo:* $a = A_n\, r^{n-1}\, \dfrac{r-1}{r^n-1} = 44\ 765.08$. *Koliku godišnju prenumerando rentu bi Vi ostvarili po ovoj osnovi?*

Primjedba 10.11 *(***Vječna renta***). Ako netko raspolaže početnim kapitalom* C_0, *koji se ukamaćuje uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu* p, *a na kraju svake godine podiže neku svotu, može se dogoditi:*

(a) ako je podizanje **manje** *od prispjelih kamata na kraju godine, osnovni kapital raste;*

(b) ako je podizanje **veće** *od prispjelih kamata na kraju godine, osnovni kapital se smanjuje;*

(c) ako se podiže **samo prispjela kamata**, *osnovni kapital se ne mijenja.*

Može se postaviti ovakvo pitanje: „koliki mora biti početni kapital C_0 da bi se uz godišnju kamatnu stopu p na početku svake godine vlasnik kapitala mogao podići iznos a ?"

Ako u (9.40) pustimo $n \to +\infty$, dobivamo:

$$C_0 = \lim_{n\to\infty} A_n = a \cdot \frac{r}{i}\,, \quad i = p/100. \tag{10.41}$$

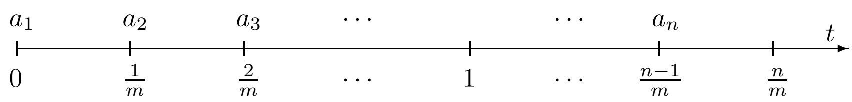
Lako se vidi da vlasnik kapitala podiže samo kamate jer su kamate na kraju prve (početku druge) godine jednake:

$$(C_0 - a)\cdot i = a\left(\frac{r}{i} - 1\right)\cdot i = a,$$

itd. Znate li barem jedan primjer vječne rente ?

10.3.2 Ispodgodišnje uplate s konstantnom kamatnom stopom

Neka je p dekurzivna godišnja kamatna stopa. Pretpostavimo da smo godinu podijelili na m jednakih obračunskih razdoblja i da se početkom svakog od n takvih razdoblja uplaćuju iznosi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (vidi *Sliku 9.15*). Treba izračunati sumu konačnih (na kraju n–tog obračunskog razdoblja) i sadašnjih (na početku prvog obračunskog razdoblja) vrijednosti svih uplaćenih svota.



Slika 9.15. Periodične ispodgodišnje uplate

Vrijednost svote a_1 na kraju n–tog obračunskog razdoblja, prema (9.35), iznosi $a_1\, r^{n/m}$, gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$ godišnji kamatni faktor. Vrijednost svote a_2 na kraju n–tog obračunskog razdoblja je $a_2\, r^{(n-1)/m}$ itd. Prema tome, suma svih n svota na kraju n–tog obračunskog razdoblja je:

$$S_n = a_1 r^{n/m} + a_2 r^{(n-1)/m} + \cdots + a_n r^{1/m}. \tag{10.42}$$

Specijalno, ako je $a := a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (što je u praksi najčešći slučaj), onda se izraz (9.42) može pisati kao:

$$S_n = a\, r^{1/m}\left(1 + r^{1/m} + \cdots + r^{(n-1)/m}\right).$$

Zbrajanjem sume u zagradi (n–ta parcijalna suma geometrijskog reda s kvocijentom $r^{1/m}$), dobivamo:

$$\boxed{S_n = ar^{1/m}\frac{r^{n/m}-1}{r^{1/m}-1}.} \tag{10.43}$$

Ovo je **konačna vrijednost** n jednakih periodičnih svota koje se uplaćuju početkom obračunskih razdoblja.

Označimo s A_n sadašnju (u trenutku $t_0 = 0$) vrijednost sume svih tih svota. Tada prema (9.35) vrijedi:

$$S_n = A_n\, r^{n/m}, \tag{10.44}$$

a onda iz (9.42) i (9.44) dobivamo sadašnju vrijednost:

$$A_n = S_n\, r^{-n/m} = a_1 + a_2 r^{-1/m} + \cdots + a_n r^{-(n-1)/m}. \tag{10.45}$$

Specijalno, ako je $a := a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ onda iz (9.43) i (9.44) dobivamo **sadašnju vrijednost** n jednakih periodičnih svota koje se uplaćuju početkom obračunskih razdoblja:

$$\boxed{A_n = a\, r^{(1-n)/m}\ \frac{r^{n/m}-1}{r^{1/m}-1}.} \tag{10.46}$$

Primjer 10.27 *Prodajna cijena automobila je* 84 900.00. *Može ga se kupiti na kredit uz* 10% *učešća i* 18 *mjesečnih rata od* 4 399.00 *plativih početkom mjeseca. Izračunajte efektivnu dekurzivnu godišnju kamatnu stopu uz koju se nudi automobil.*

Nakon odbitka učešća, ostatak prodajne cijene automobila je 76 410.00. Ovaj iznos nakon 18 mjeseci mora biti jednak sumi konačnih vrijednosti svih uplata prema (9.43), tj. mora biti:

$$76\ 410 \cdot r^{18/12} = 4\ 399 \cdot r^{1/12}\frac{r^{18/12}-1}{r^{1/12}-1},$$

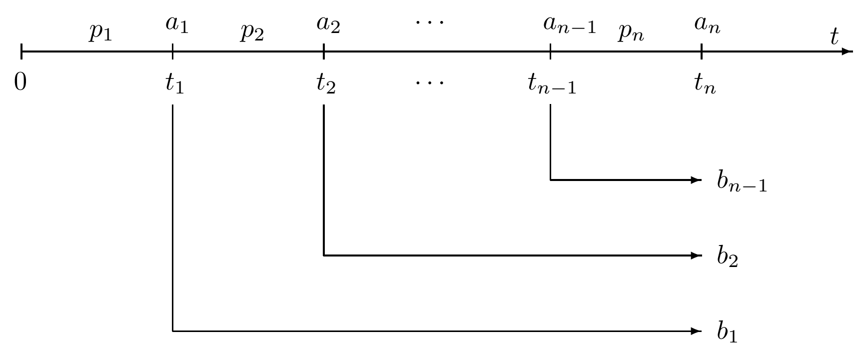
odakle (primjenom metode Regula falsi, [18]) dobivamo $r = 1.086479$, odnosno godišnju kamatnu stopu: $p = 8.6479$.

10.3.3 Proizvoljne uplate s promjenjivom kamatnom stopom

Sadašnjem trenutku pridružit ćemo broj $t_0 = 0$, a k–tom danu nakon tog trenutka (u godini koja nije prestupna) slično kao u *t.9.2.2.3* pridružit ćemo broj $t = \frac{k}{365}$. Pretpostavimo nadalje, da se u trenucima $t_1, t_2, \ldots, t_n$ uplaćuju svote $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*Slika 9.16*) i da u intervalu $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$ vrijedi dekurzivna godišnja kamatna stopa p_i. Treba izračunati konačnu vrijednost (u trenutku t_n) svih uplaćenih svota.

Vrijednost svote a_n ostaje nepromjenjena. Vrijednost svote a_{n-1} u trenutku t_n bit će:

$$b_{n-1} = a_{n-1}\, r_n^{t_n - t_{n-1}}, \qquad r_n = 1 + \frac{p_n}{100}.$$



Slika 9.16. Konačna vrijednost više uplata

Vrijednost svote a_2 u trenutku t_n bit će:

$$b_2 = a_2 r_3^{t_3 - t_2} \cdots r_n^{t_n - t_{n-1}}, \qquad r_i = 1 + \frac{p_i}{100}.$$

Vrijednost svote a_1 u trenutku t_n bit će:

$$b_1 = a_1 r_2^{t_2 - t_1} r_3^{t_3 - t_2} \cdots r_n^{t_n - t_{n-1}}, \qquad r_i = 1 + \frac{p_i}{100}.$$

Konačna vrijednost svih uplaćenih svota može se zapisati u obliku:

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_1 + a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=i+1}^{n} r_k^{t_k - t_{k-1}} + a_n.} \qquad (10.47)$$

Sadašnju vrijednost svih uplata možemo dobiti kao sadašnju vrijednost veličine (9.47):

$$\boxed{A_n = S_n\, r_n^{-(t_n - t_{n-1})} \cdots r_2^{-(t_2 - t_1)} r_1^{-t_1}.} \qquad (10.48)$$

Primjer 10.28 *Netko na početku svakog mjeseca, u godini koja nije prestupna, uplaćuje iznos od* 1 000, 00. *Dekurzivne godišnje kamatne stope po mjesecima dane su u tablici. Treba izračunati vrijednost sume svih uplata na kraju godine.*

mjesec	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	7	8	10	10	10	12	12	15	15	17	19	20

Tablica 9.12.

Ako s b_i, $i = 1, \ldots, 12$, označimo konačnu vrijednost svote uplaćene na početku i–tog mjeseca, imamo:

$$\begin{aligned} b_1 = & \ 1000 \cdot 1.07^{31/365} \cdot 1.08^{28/365} \cdot 1.1^{61/365} \cdot 1.12^{61/365} \cdot 1.15^{61/365} \cdot 1.17^{31/365} \cdot \\ & 1.19^{30/365} \cdot 1.2^{31/365} = 1\ 128.72, \\ b_2 = & \ 1\ 122.26, \ldots, b_n = 1\ 015.61. \end{aligned}$$

Suma svih konačnih vrijednosti je 12 954.30.

Druga mogućnost je da se u trenutku svake uplate računa stanje svih prispjelih uloga primjenom formule (9.34), kao što je urađeno u *Tablici 9.13*

mjesec	broj dana	god. kam. stopa	stanje na početku mj.	stanje na kraju mj.
1	31	7	1 000.00	1 005.76
2	28	8	2 005.76	2 017.64
3	31	10	3 017.64	3 042.17
4	30	10	4 042.17	4 073.96
5	31	10	5 073.96	5 115.20
6	30	12	6 115.20	6 172.42
7	31	12	7 172.42	7 241.79
8	31	15	8 241.79	8 340.21
9	30	15	9 340.21	9 448.12
10	31	17	10 448.12	10 588.37
11	30	19	11 588.37	11 755.25
12	31	20	12 755.25	12 954.30

Tablica 9.13. Konačna vrijednost više uplata

Jasno je da se i u jednom i u drugom slučaju ne treba upuštati u rješavanje ovakvih problema bez pomoći računala. Moguće je izraditi vlastiti program ili koristiti neki gotovi tablični kalkulator (kao što je npr. LOTUS 1–2–3).

Primjer 10.29 *Koliki iznos treba uplatiti 1. siječnja (u godini koja nije prestupna) da bi se na kraju svakog mjeseca te godine mogao podići iznos od* 10 000.00 *uz pretpostavku konstantne dekurzivne godišnje kamatne stope* $p = 19$*?*

Sadašnja vrijednost svih iznosa je:

$$\begin{aligned} A = & \ 10\ 000 \big(r^{-31/365} + r^{-59/365} + r^{-90/365} + r^{-120/365} + r^{-151/365} + r^{-181/365} \\ & + r^{-212/365} + r^{-243/365} + r^{-273/365} + r^{-304/365} + r^{-334/365} + r^{-1} \big) \ , \end{aligned}$$

gdje je $r = 1.19$. Odvade se lako može izračunati da 1. siječnja treba uplatiti 109 388.10.

Primjer 10.30 *Na tekućem računu otvorenom 12. 03. 1994. tijekom te iste godine zabilježene su promjene vidljive u* Tablici 9.14. *Banka primjenjuje dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 18$ i na pozitivni i negativni saldo. Proanalizirajte* Tablicu 9.14, *u kojoj je prikazano kretanje kamata, i stanja tekućeg računa. Izradite LOTUS–program koji će generirati ovakve tablice.* [7]

r.br.	datum	dana	uplata	isplata	kamata	stari saldo	novi saldo
1.	12.03.	0	1 250.00	0	0	0	1 250.00
2.	20.03.	8	0	1 000.00	4.54	1 250.00	254.54
3.	04.04.	15	1 560.00	0	1.74	254.54	1 816.28
4.	07.04.	3	0	1 500.00	2.47	1 816.28	318.75
5.	25.04.	18	0	750.00	2.61	318.75	- 428.63
6.	08.05.	13	1 450.00	500.00	- 2.53	- 428.63	518.83
7.	04.06.	27	0	700.00	6.39	518.83	- 174.78
8.	10.06.	6	2 200.00	0	- 0.48	- 174.78	2 024.75
9.	15.06.	5	0	800.00	4.60	2 024.75	1 229.34
10.	18.06.	3	0	250.00	1.67	1 229.34	981.02
$\sum$		98	6 460.00	5 500.00	21.02		

Tablica 9.14. Obrada stanja jednog tekućeg računa

Primjer 10.31 *U štednoj knjižici otvorenoj 17. 01. 1994. tijekom te iste godine zabilježene su promjene vidljive u* Tablici 9.15. *Banka primjenjuje dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 5$. Proanalizirajte* Tablicu 9.15, *u kojoj je prikazano kretanje stanja salda u štednoj knjižici do kraja tekuće godine.*

r.br.	datum	dana	uplata	isplata	kamata	stari saldo	novi saldo
1.	17.01.	0	1 500.00	0	0	0	1 500.00
2.	25.03.	67	0	1 000.00	13.49	1 500.00	513.49
3.	04.04.	10	3 000.00	0	0.69	513.49	3 514.18
4.	23.05.	49	1 800.00	0	23.09	3 514.18	5 337.27
5.	10.07.	48	0	2 000.00	34.36	5 337.27	3 371.63
6.	15.09.	67	2 000.00	0	30.33	3 371.63	5 401.96
7.	05.10.	20	1 800.00	0	14.46	5 401.96	7 216.42
8.	01.11.	27	2 200.00	0	26.09	7 216.42	9 442.51
9.	15.11.	14	0	1 200.00	17.69	9 442.51	8 260.20
10.	03.12.	18	2 400.00	0	19.90	8 260.20	10 680.10
11.	31.12.	28	0	0	40.05	10 680.10	10 720.15
$\sum$		348	14 700.00	4 200.00	220.15		

Tablica 9.15. Obrada stanja jedne štedne knjižice

[7] Broj dana računa se prema kalendaru (vidi *Primjedbu 10.2*) tako da se u nekom intervalu prvi dan ne uzima u obzir, a zadnji dan se broji. Tako npr. od 20. 03. do 04. 04. računamo 15 dana: $(31 - 20) + (4 - 0) = 15$.

Zadaci za vježbu 9.3

1. Jedna rentna ustanova treba početkom svake od narednih 20 godina isplaćivati iznos $a = 30\ 000.00$.

   (a) Kolika je sadašnja vrijednost cijele rente (svih isplata) u trenutku prve isplate ako se primjenjuje dekurzivna godišnja kamatna stopa $p = 7$?

   (b) Kolika je konačna vrijednost cijele rente u trnutku posljednje isplate?

   (c) Ako se primjenjuje dekurzivna godišnja kamatna stopa $p = 7$, koliki bi kapital C_0 korisnik rente morao uplatiti godinu dana prije prve isplate ?

   (d) Uz koju dekurzivnu godišnju kamatnu stopu bi kapital od 300 000.00 uplaćen 100 dana prije prve isplate pokrio cijelu rentu ?

   (e) Koliko dugo bi mogla biti isplaćivana godišnja renta $a = 30\ 000.00$ ako je 100 dana prije prve isplate rentnoj ustanovi stavljen na raspolaganje kapital $C_0 = 240\ 000.00$ uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 7$? Koliki kaptal bi preostao u trenutku posljednje isplate?

   Rješenje: (a) 340 067.86, (b) 1 229 864.77, (c) 317 820.43, (d) $p = 8.6243$, (e) $n = 11.25888474$, $\Delta C = 7\ 441.41$.

2. Izradite prethodni zadatak uz pretpostavku da se rente isplaćuju krajem godine.

3. Početkom svake od narednih 4 godine netko bi trebao uplaćivati iznos od 12 000.00. Treba izračunati ukupnu vrijednost svih tih uplata na kraju pete godine ako se tijekom cijelog razdoblja primjenjuje dekurzivna godišnja kamatna stopa $p = 20$.

   Rješenje: 77 299.20.

4. Netko je tijekom 10 godina početkom svake godine uplaćivao 10 000.00, pa je na kraju desete godine podigao iznos od 196 545.83. U čitavom razdoblju kamatna stopa se nije mijenjala. Izračunajte veličinu dekurzivne godišnje kamatne stope.

   Uputa: Prilikom rješavanja ovog zadatka bit će potrebno koristiti metodu Regula falsi iz [18].

   Rješenje: $p = 12$.

5. Koliki iznos treba uplatiti neka osoba na početku godine da bi idućih 12 godina na početku svake godine mogla podići iznos od 35 000.00? Tijekom cijelog razdoblja primjenjivat će se konstantna dekurzivna godišnja kamatna stopa $p = 12$.

   Rješenje: 216 803.10.

6. Izvedite formule za sadašnju vrijednost više periodičnih prenumerando uplata [(9.39), odnosno (9.40)] direktno, bez pozivanja na formule (9.37) i (9.38), svođenjem pojedinačnih uplata na sadašnju vrijednost.

7. Neka je p dekurzivna godišnja kamatna stopa. Pretpostavimo da se na kraju svake godine, kroz n godina uplaćuju jednaki iznosi a. Izračunajte sumu konačnih S_n

(na kraju n–te godine) i sadašnjih A_n (na početku prve godine) vrijednosti svih uplaćenih svota.

Rješenje: $A_n = ar^{-n}\dfrac{r^n - r}{r-1}$, $\quad S_n = a\dfrac{r^n - 1}{r-1}$.

8. Izradite BASIC program koji će učitati broj godina n, godišnju dekurzivnu kamatnu stopu p i način godišnjih uplata (početkom ili krajem godine) te kao rezultat dati vrijednost sume konačnih i sadašnjih vrijednosti svih uplata.

9. Netko tijekom 4 godine, na početku svake godine, uplaćuje 35 000.00. Kamatna stopa u prvoj godini je 12, u drugoj 10, u trećoj 15, a u četvrtoj 8. Izračunajte sumu sadašnjih i konačnih vrijednosti svih uplata.

   Rješenje: $A_4 = 119\ 362.65$, $\qquad S_4 = 155\ 750.00$.

10. Izradite kompjuterski program koji će učitati način periodičnih uplata (početkom ili krajem godine), za svaku godinu učitati godišnju kamatnu stopu i uplaćeni iznos, te kao rezultat dati sumu sadašnjih i konačnih vrijednosti svih uplata.

11. Netko tijekom 6 mjeseci počevši od 1. veljače (u godini koja nije prestupna) početkom svakog mjeseca uplaćuje iznos od 15 000.00. Dekurzivne godišnje kamatne stope po mjesecima kretale su se kao u *Primjeru 10.27.* Izračunajte sumu sadašnjih i konačnih vrijednosti svih uplata.

    Rješenje: $A_6 = 87\ 782.53$, $\qquad S_6 = 92\ 784.89$.

12. Izradite kompjuterski program koji će učitati datume uplata ili isplata, veličine uplata ili isplata i dekurzivne godišnje kamatne stope po mjesecima, te kao rezultat dati vrijednosti sume svih uplata i isplata na proizvoljno učitani datum.

13. Koliki iznos treba uplatiti 1. siječnja (u godini koja nije prestupna) da bi se na kraju svakog od prvih 6 mjeseci te godine mogao podići iznos od 2 500.00 uz pretpostavku konstantne dekurzivne godišnje kamatne stope $p = 16$?

    Rješenje: 14 817.13.

14. Neka je p dekurzivna godišnja kamatna stopa. Pretpostavimo da smo godinu podijelili na m jednakih obračunskih razdoblja i da se krajem svakog od n takvih razdoblja uplaćuju iznosi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Treba izračunati sumu konačnih (na kraju n–tog obračunskog razdoblja) i sadašnjih (na početku prvog obračunskog razdoblja) vrijednosti svih uplaćenih svota.

15. Pretpostavimo da se godina dijeli na 12 jednakih „mjeseci". Izvedite formule za sadašnju i konačnu vrijednost n *„mjesečnih"* uplata platvih: (a) početkom „mjeseca", (b) krajem „mjeseca", ako za čitavo razdoblje vrijedi konstantna dekurzivna godišnja kamatna stopa p. Odgovarajuću *„mjesečnu"* kamatnu stopu odredite kao: *(i) relativnu kamtnu stopu*, *(ii) konformnu kamatnu stopu.*

    Analizirajte razlike. Izradite odgovarajuće BASIC ili LOTUS programe.

16. Koliki iznos treba uplatiti neka osoba na početku godine da bi 8 godina na kraju svake godine (počevši od tekuće) mogla podići iznos od 50 000.00? Tijekom cijelog razdoblja primjenjivat će se konstantna dekurzivna godišnja kamatna stopa $p = 10$.

Rješenje: $A = a\left(r^{-1} + r^{-2} + \cdots + r^{-8}\right) = a\,r^{-8}\,\frac{r^8-1}{r-1} = 266\ 746.31.$

17. Na tekućem računu otvorenom 05. 01. 1994. tijekom te iste godine zabilježene su sljedeće promjene: 05. 01. (uplata: 2 500.00), 03. 02. (isplata: 1 350.00), 10. 02. (uplata: 1 950.00), 07. 03. (uplata: 1 560.00, isplata: 2 500.00), 25. 03. (isplata: 1 500.00), 08. 04. (uplata: 1 450.00), 15. 04. (isplata: 2 500.00), 10. 05. (uplata: 2 200.00), 01. 06. (isplata: 2 500.00), 08. 06. (isplata: 250.00). Banka primjenjuje dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 24$ i na pozitivni i negativni saldo. Izradite tablicu po uzoru na *Tablicu 9.14* iz koje će se vidjeti kretanje stanja na tekućem računu.

    Kontrola rješenja: ukupno dana: 154, suma uplata: 9 660.00, suma isplata: 10 600.00, ukupne kamate: 153.82, saldo na dan 08. 06.: -786.18

18. U štednoj knjižici otvorenoj 05. 02. 1994. tijekom te iste godine zabilježene su sljedeće promjene: 05. 02. (uplata: 2 000.00), 03. 03. (uplata: 1 800.00), 20. 05. (uplata: 1 500.00), 28. 05. (isplata: 1 500.00), 01. 07. (uplata: 2 500.00), 03. 08. (isplata: 1 000.00), 30. 09. (uplata: 2 000), 25. 10. (uplata: 2 200.00), 08. 11. (uplata: 1 200.00), 13. 12. (uplata: 2 500.00). Banka primjenjuje dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 7.5$. Izradite tablicu po uzoru na *Tablicu 9.15* iz koje će se vidjeti kretanje salda u štednoj knjižici. Koliko je stanje 31. 12. 1994. ?

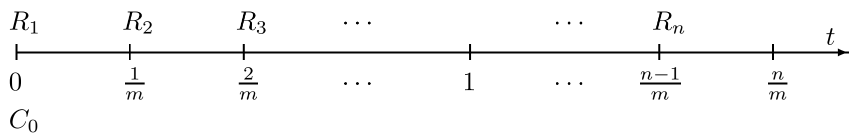
    Kontrola rješenja: ukupno dana: 312, suma uplata: 15 700.00, suma isplata: 2 500.00, ukupne kamate: 399.32, stanje na dan 31. 12.: 13 599.32.

19. Izradite LOTUS ili BASIC program kojim ćete moći riješiti svaki zadatak tipa *Zadatka 17.* ili *18.* Za slučaj obračuna tekućeg računa predvidite mogućnost da banka na negativni saldo zaračunava drugu (višu !) kamatnu stopu.

10.4 Potrošački krediti

Potrošački kredit je poseban imovinsko–pravni odnos kreditora (banke ili trgovačkog poduzeća) i korisnika kredita (individualnog potrošača), kojim se povečava kupovna snaga potrošača radi nabavke netrajnih i trajnih potrošnih dobara. Kredit se vraća jednakim otplatnim kvotama, kojima se dodaju jednostavne anticipativne kamate obračunate na ostatak duga.

Neka je C iznos odobrenog potrošačkog kredita, a U učešće u gotovini. Označimo s $C_0 = C - U$ iznos kredita koji treba vratiti s n rata plativih početkom svakog od n jednakih vremenskih intervala duljine $(1/m)$ godine uz primjenu jednostavnog anticipativnog ukamaćivanja i godišnje kamatne stope p. U praksi se za vremenski interval obično uzima „mjesec" dana (kao 1/12 godine). Odmah treba naglasiti da na taj način svjesno pravimo pogrešku jer svi mjeseci nisu jednako dugački.



Slika 9.17. Obračun potrošačkih kredita

Na početku svakog obračunskog razdoblja obračunat će se n–ti dio kredita C_0 (otplatna kvota) i kamate za tekuće obračunsko razdoblje na ostatak duga. Prema tome, rata koju treba platiti na početku prvog obračunskog razdoblja iznosi:

$$R_1 = \frac{1}{n}C_0 + I_1 = \frac{1}{n}C_0 + C_0\frac{p}{100 \cdot m}.$$

Rata plativa na početku drugog obračunskog razdoblja sadrži također n–ti dio kredita, kao i kamate I_2 na ostatak duga do kraja drugog obračunskog razdoblja:

$$R_2 = \frac{1}{n}C_0 + I_2 = \frac{1}{n}C_0 + C_0\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{p}{100 \cdot m}.$$

Općenito, otplatna rata koja dospjeva na početku k–tog obračunskog razdoblja, iznosi:

$$R_k = \frac{1}{n}C_0 + I_k = \frac{1}{n}C_0 + C_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{p}{100 \cdot m}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.49}$$

Zbroj svih otplatnih rata iznosi:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i = n\left(\frac{1}{n}C_0\right) + C_0\frac{p}{100 \cdot m}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

odnosno:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i = C_0 + C_0\frac{p}{100 \cdot m}\frac{n+1}{2}, \tag{10.50}$$

gdje su:

$$\boxed{I = C_0\frac{p}{100 \cdot m}\frac{n+1}{2},} \tag{10.51}$$

ukupne kamate.

Primjer 10.32 *Kredit od* 12 000, 00 *treba otplatiti jednakim otplatnim kvotama s* $n = 6$ *mjesečnih otplatnih rata uz godišnju kamatnu stopu* $p = 24$.

Plan otplate prikazan je u *Tablici 9.16.* Ukupne kamate prema (9.51) iznose $I = 840.00$.

početak mjeseca	ostatak duga	otplatna kvota	kamate	otplatna rata
1	12 000.00	2 000.00	240.00	2 240.00
2	10 000.00	2 000.00	200.00	2 200.00
3	8 000.00	2 000.00	160.00	2 160.00
4	6 000.00	2 000.00	120.00	2 120.00
5	4 000.00	2 000.00	80.00	2 080.00
6	2 000.00	2 000.00	40.00	2 040.00
$\sum$		12 000.00	840.00	12 840.00

Tablica 9.16. Otplata potrošačkog kredita primjenom principa jednakih otplatnih kvota

Ovakvim načinom obračuna potrošačkih kredita sve otplatne rate bile bi međusobno različite. Zato se u praksi definira prosječna otplatna rata kao aritmetička sredina svih rata:

$$\boxed{R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{1}{n}\left(C_0 + I\right).} \tag{10.52}$$

Ovdje je u suštini sadržan **klasični način obračuna potrošačkih kredita**, koji se može opisati ovim jednostavnim algoritmom:

1. od ukupnog zaduženja C odbije se učešće U;
2. na ostatak duga ($C_0 = C - U$) obračunavaju se ukupne jednostavne kamate I prema (9.51) (za vrijeme otplate kredita);
3. otplatna rata, koja dospijeva početkom svakog (uključujući i trenutnog) obračunskog razdoblja, dobije se djeljenjem ukupnog zaduženja ($C_0 + I$) s brojem rata, odnosno obračunskih razdoblja.

Primjer 10.33 *Kredit iz* Primjera 10.32 *treba otplatiti sa šest jednakih otplatnih rata definiranih s (9.52), koje se uplaćuju početkom mjeseca.*

Ukupne jednostavne kamate obračunate na iznos $C_0 = 12\ 000.00$, vremenski rok $n = 6$ mjeseci ($m = 12$) i godišnju kamatnu stopu $p = 24$ prema (9.51) iznose: $I = 840.00$. Veličina rate prema (9.52) je $R = 2\ 140.00$. Plan otplate prikazan je u *Tablici 9.17.*

početak mjeseca	ostatak duga	otplatna kvota	kamate	otplatna rata
1	12 000.00	1 900.00	240.00	2 140.00
2	10 100.00	1 938.00	202.00	2 140.00
3	8 162.00	1 976.76	163.24	2 140.00
4	6 185.24	2 016.30	123.70	2 140.00
5	4 168.94	2 056.62	83.38	2 140.00
6	2 112.32	2 097.75	42.25	2 140.00
$\sum$		11 985.43	854.57	12 840.00

Tablica 9.17. Otplata potrošačkog kredita jednakim „mjesečnim” otplatnim ratama

Primjedba 10.12 *Postoje mnoge druge modifikacije modela otplate potrošačkih kredita. Mnogo više o tome, a naročito u uvjetima visoke inflacije može se vidjeti kod Šego (1991).*

Zadaci za vježbu 9.4

1. Kredit od 9 000.00 treba otplatiti u roku $n = 9$ *„mjeseci"* uz godišnju kamatnu stopu $p = 12$ primjenom principa jednakih otplatnih kvota. Izračunajte otplatnu kvotu, ukupne kamate te izradite plan otplate.

   Rješenje: Otplatna kvota je 1 000.00, $I = 450.00$.

2. *Zadatak 1.* riješite prema principu jednakih otplatnih rata. Izračunajte mjesečnu otplatnu ratu i izradite odgovarajući plan otplate.

   Rješenje: $R = 1\ 050.00$.

3. Automobil, čija je prodajna cijena 89 600.00 može se kupiti na kredit uz 10% učešća. Ostatak prodajne cijene može se otplatiti (a) u 12 mjeseci s 12% godišnjih kamata, (b) u 18 mjeseci s 15% godišnjih kamata, (c) 24 mjeseca s 20% godišnjih kamata. Kolika bi iznosila mjesečna rata u sva tri slučaja, ako se primjenjuje princip jednakih otplatnih rata

   Rješenje: (a) $R = 7\ 156.80$, (b) $R = 5\ 012.00$, (c) $R = 4\ 060.00$.

4. Automobil, čija je prodajna cijena 75 200.00 može se kupiti na kredit: (a) 12% učešća i 12 jednakih mjesečnih rata od 5 699.00, (b) 15% učešća i 24 jednake mjesečne rate od 2 899.00, (c) 18% učešća i 36 jednakih mjesečnih rata od 1 999.00. Koliki su godišnji kamatnjaci primijenjeni u sva tri slučaja, ako se primjenjuje princip jednakih otplatnih rata ? Kolike su efektivne kamatne stope ? Izradite BASIC ili LOTUS program kojim ćete moći riješiti svaki zadatak ovakvog tipa.

   Primjedba: Upravo na ovaj način u Zapadnoj Europi nude automobile, ali i drugu robu na prodaju.

   Uputa: iz (9.52) dobivamo $i = \frac{2\,m}{n+1}\,(\frac{n\,R}{C} - 1)$, gdje je C ostatak prodajne cijene nakon uplate učešća. Da bi izračunali efektivnu godišnju kamatnu stopu p_e, treba izjednačiti iznos C sa sumom sadašnjih vrijednosti svih rata. Tako se dobiva nelinearna jednadžba u varijabli p_e, koju treba riješiti metodom Regula falsi (vidi [18]).

   Rješenje: (a) $i = 6.170963\%$, $p_e = 7.4888$, (b) $i = 8.494618\%$, $p_e = 9.4042$, (c) $i = 10.83466\%$, $p_e = 11.5129$.

5. Izradite BASIC ili LOTUS program koji će učitati veličinu kredita, rok otplate u mjesecima i godišnju kamatnu stopu te prema principu jednakih otplatnih kvota izračunati veličine otplatnih rata i izraditi plan otplate (tablicu sličnu *Tablici 9.16*).

6. Izradite BASIC ili LOTUS program koji će učitati veličinu kredita, rok otplate u mjesecima i godišnju kamatnu stopu te prema principu jednakih otplatnih rata izračunati ukupne kamate, veličinu otplatne rate i izraditi plan otplate (tablicu sličnu *Tablici 9.17*).

10.5 Otplata zajma

Financijska sredstva potrebna za investicije, koja treba vratiti uz obračun **dekurzivnih složenih kamata** nazivamo **zajam**. Prilikom ugovaranja zajma obično se precizira: veličina zajma, kamatna stopa, datum početka otplate i rok otplate, način otplate i eventualne mjere osiguranja zajma. Kamatna stopa u cijelom razdoblju otplate može biti fiksna, ali se može ugovoriti i promjenjiva kamatna stopa. Zajam se može vratiti jednokratno ili s više otplatnih rata. Ako se vraća s više rata, onda se pojedini iznosi kojima se otplaćuje zajam nazivaju **anuiteti**. Svaki anuitet u sebi sadrži **prispjele kamate** i dio otplate zajma (tzv. **otplatnu kvotu**). Kada se od iznosa duga u nekom trenutku odbije otplatna kvota, preostali iznos zajma zovemo **ostatak duga**. Anuiteti se mogu uplaćivati početkom ili krajem jednakih vremenskih razmaka (godina, polugodište, kvartal, mjesec itd). Također, može se dozvoliti slobodna strategija otplate zajma, gdje ni vremenski razmaci ni pojedini anuiteti ne moraju biti isti (vidi npr. [3], [5], [17], [19]). Osim toga, naročito u uvjetima visoke stope inflacije, treba voditi računa o realnoj i nominalnoj kamatnoj stopi (vidi Šego (1991)).

Bez obzira na način i uvjete otplate zajma uvijek vrijede sljedeća **opća pravila otplate**:

(i) *početni dug (zajam) može se smanjivati samo iznosima otplatnih kvota;*

(ii) *ostatak duga u nekom trenutku jednak je razlici između početnog duga i sume uplaćenih otplatnih kvota;*

(iii) *na kraju dogovorenog roka otplate zajma:*

- *ostatak duga mora biti jednak nuli, a*
- *suma svih otplatnih kvota mora biti jednaka početnom dugu.*

Kada se utvrde uvjeti i način otplate zajma, moguće je izraditi **plan otplate** – tablicu iz koje će biti vidljivo kretanje prispjelih kamata, otplatnih kvota, anuiteta i ostatka duga.

Primjer 10.34 *Zajam od* 10 000.00 *treba otplatiti kroz* 5 *godina godišnjim anuitetima plativim krajem godine. Dekurzivna godišnja kamtna stopa je* 8, *a visine prva četiri anuiteta su:* 2 000.00, 2 500.00, 3 500.00 *i* 3 000.00.

Plan otplate prikazan je u *Tablici 9.18.* Otplatne kvote su nejednake i ovise o veličini prispjelik kamata. Posljednji, peti anuitet iznosi 1 500.63, a dobiven je kao zbroj ostatka duga s kraja četvrte godine i prispjelih kamata u petoj godini otplate. Suma svih anuiteta jednaka je zbroju iznosa početnog duga i ukupnih kamata.

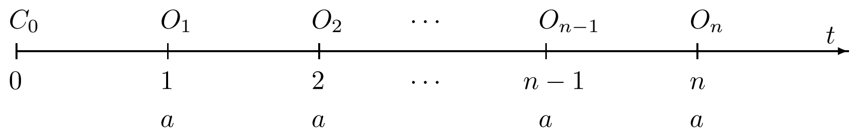
konac godine	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	10 000.00
1	800.00	1 200.00	2 000.00	8 800.00
2	704.00	1 796.00	2 500.00	7 004.00
3	560.32	2 939.68	3 500.00	4 064.32
4	325.15	2 674.85	3 000.00	1 389.47
5	111.16	1 389.47	1 500.63	0
$\sum$	2 500.63	10 000.00	12 500.63	

Tablica 9.18. Plan otplate

10.5.1 Otplata zajma godišnjim anuitetima

10.5.1.1 Otplata zajma jednakim godišnjim anuitetima

Pretpostavimo da zajam C_0 treba vratiti kroz n godina jednakim anuitetima plativim krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Pretpostavimo da je zajam C_0 odobren na početku prve godine (*Slika 9.18*).



Slika 9.18. Otplata zajma jednakim godičnjim anuitetima

Označimo s a veličinu anuiteta, koji unaprijed nije poznat. Na kraju prve godine dug C_0 uvećan je za kamate. Međutim, u tom trenutku uplaćuje se i prvi anuitet, pa ostatak duga O_1 na kraju prve godine iznosi:

$$O_1 = C_0 r - a, \quad \text{gdje je} \quad r = 1 + \frac{p}{100}. \tag{10.53}$$

Do kraja druge godine iznos O_1 povećat će se za kamate. Budući da i na kraju druge godine uplaćujemo anuitet a, ostatak duga na kraju druge godine bit će:

$$O_2 = O_1\, r - a. \tag{10.54}$$

Uvrštavajući (9.53) u (9.54), dobivamo

$$O_2 = C_0\, r^2 - ar - a. \tag{10.55}$$

Općenito, ostatak duga na kraju k–te godine je:

$$O_k = O_{k-1}\, r - a\,, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

odnosno, sukcesivnim uvrštavanjem prethodnih izraza:

$$O_k = C_0\, r^k - ar^{k-1} - \cdots - ar - a. \tag{10.56}$$

Budući da čitav zajam C_0 mora biti vraćen u roku od n godina, onda ostatak duga na kraju n–te godine mora biti nula:

$$\boxed{O_n = 0} \tag{10.57}$$

odnosno:

$$C_0\, r^n - ar^{n-1} - \ldots - ar - a = 0 \tag{10.58}$$

Izraz (9.58) možemo pisati:

$$a\left(r^{n-1} + \cdots + r + 1\right) = C_0\, r^n.$$

Zbrajajući n–tu parcijalnu sumu reda u zagradi, dobivamo:

$$a\frac{r^n - 1}{r - 1} = C_0\, r^n,$$

a odavde dobivamo izraz za veličinu anuiteta:

$$\boxed{a = C_0\, r^n\, \frac{r-1}{r^n - 1}.} \tag{10.59}$$

Često je u praksi potrebno, nakon izvjesnog broja uplaćenih anuiteta, izračunati ostatak duga u svrhu redefiniranja uvjeta, konačne otplate zajma i sl. Za ostatak duga na kraju k–te godine ($1 \leq k \leq n$), iz (9.56) dobivamo:

$$\boxed{O_k = C_0\, r^k - a\left(r^{k-1} + \cdots + r + 1\right) = C_0\, r^k - a\, \frac{r^k - 1}{r - 1}.} \tag{10.60}$$

Uvrštavajući (9.59) u (9.60), dobivamo formulu iz koje možemo izračunati ostatak duga na kraju k–te godine:[8]

$$\boxed{O_k = C_0\, \frac{r^n - r^k}{r^n - 1}.} \tag{10.61}$$

[8]Primijetite da je formulom (9.60) dan ostatak duga ako se na kraju savkog obračunskog razdoblja uplaćuje **neki iznos** a, a formulom (9.61) dan je ostatak duga ako se na kraju svakog obračunskog razdoblja uplaćuje baš iznos (9.59).

Primjer 10.35 *Zajam od* 50 000.00 *treba otplatiti kroz* 6 *godina uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu* $p = 20$ *jednakim anuitetima plativim na kraju godine.*

Prema (9.59) dobivamo:$a = 50\ 000 \cdot 1.2^6 \dfrac{1.2 - 1}{1.2^6 - 1} = 15\ 035.29$. Plan otplate prikazan je u *Tablici 9.19*

konac godine	prispjela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	50 000.00
1	10 000.00	5 035.29	15 035.29	44 964.71
2	8 992.94	6 042.35	15 035.29	38 922.36
3	7 784.47	7 250.82	15 035.29	31 671.54
4	6 334.31	8 700.98	15 035.29	22 970.56
5	4 594.11	10 441.18	15 035.29	12 529.28
6	2 594.11	12 529.28	15 035.27	0
$\sum$	40 211.71	50 000.00	90 211.72	

Tablica 9.19. Plan otplate

Primijetimo da posljednji anuitet nije jednak svim ostalim. To se dogodilo zbog zaokruživanja brojeva na dvije decimale. Taj posljednji, korektivni anuitet obično u praksi nazivamo **krnji anuitet**. Pomoću formule (9.61) možemo provjeriti npr. ostatak duga na kraju četvrte godine:

$$O_4 = 50\ 000\, \frac{1.2^6 - 1.2^4}{1.2^6 - 1} = 22\ 970.58.$$

Razlika u posljednjoj decimali nastala je također zbog prethodnog zaokruživanja brojeva u tablici plana otplate na dvije decimale.

Primjer 10.36 *Zajam od* 100 000.00 *odobren na početku ove godine treba vratiti jednakim godišnjim anuitetima od* 10 000.00 *plativim krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu* $p = 6$. *Koliko godina će trajati otplata zajma i koliki će biti posljednji (krnji) anuitet ?*

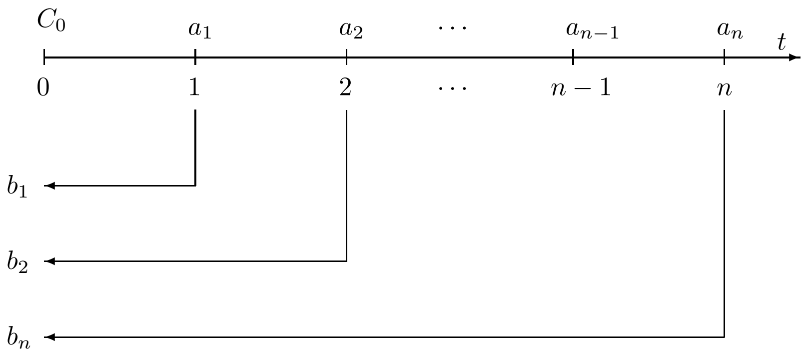
Iz (9.59) dobivamo jednadžbu:

$$10\ 000 \cdot (1.06^n - 1) = 100\ 000 \cdot 1.06^n \cdot 0.06,$$

odakle logaritmiranjem dobivamo: $n = 15.7252$. Dakle, otplata zajma trajat će 15 godina, a posljednji 15. anuitet sastoji se od $a_{15} = 10\ 000.00$ i ostatka duga prema (9.60): $O_{15} = 6\ 896.12$. i iznosi 16 896.12.

10.5.1.2 Otplata zajma promjenjivim godišnjim anuitetima

Pretpostavimo sada da zajam C_0 treba vratiti kroz n godina s anuitetima $a_1, a_2, \ldots, a_n$, koji ne moraju biti jednaki uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Pretpostavimo da se anuiteti uplaćuju krajem godine. Treba pronaći uvjet uz koji će zajam C_0 biti vraćen anuitetima $a_1, a_2, \ldots, a_n$.



Slika 9.19. Otplata zajma promjenjivim godišnjim anuitetima

Sadašnja vrijednost anuiteta a_1 (u trenutku $t_0 = 0$, vidi *Sliku 9.19*) je:

$$b_1 = a_1 r^{-1}, \quad r = 1 + \frac{p}{100},$$

sadašnja vrijednost anuiteta a_2 je: $b_2 = a_1\, r^{-2}$ itd.

Da bi zajam bio vraćen, suma sadašnjih vrijednosti svih anuiteta ($b_1 + b_2 + \ldots + b_n$) u trenutku $t_0 = 0$ mora biti jednaka veličini zajma C_0, tj. mora biti:

$$\boxed{C_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i r^{-1}.} \tag{10.62}$$

Primjer 10.37 *Zajam od* 30 000.00 *treba vratiti kroz* 3 *godine anuitetima plativim krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu* $p = 15$. *Ako je prvi anuitet* 5 000.00, *a drugi* 10 000.00, *treba odrediti treći anuitet.*

Iz jednadžbe:

$$a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2} + a_3 r^{-3} = C_0,$$

dobivamo:

$$a_3 = r^3 \left(C_0 - a_1 r^{-1} - a_2 r^{-2}\right) = 27\ 513.75.$$

Specijalni slučaj otplate zajma nejednakim godišnjim anuitetima je **otplata zajma jednakim otplatnim kvotama**, što se često kao mogućnost spominje u literaturi i u praksi.

Pretpostavimo dakle, da zajam C_0 treba vratiti s n jednakih otplatnih kvota R plativih krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Očigledno vrijedi:

$$R = \frac{C_0}{n}, \tag{10.63}$$

pri ćemu je ostatak duga na kraju k–te godine:

$$O_k = C_0 - k \cdot \frac{C_0}{n} = C_0 \left(1 - \frac{k}{n}\right). \tag{10.64}$$

Svaki anuitet sadrži otplatnu kvotu R i kamate na ostatak duga. Tako dobivamo iznose anuiteta:

$$a_1 = R + C_0 \frac{p}{100},$$
$$a_2 = R + \left(C_0 - \frac{C_0}{n}\right) \frac{p}{100} = R + C_0 \frac{p}{100} \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

i općenito:

$$\boxed{a_k = R + C_0 \frac{p}{100} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).} \tag{10.65}$$

Primjer 10.38 *Zajam od* 10 000.00 *treba vratiti kroz* 5 *godine jednakim otplatnim kvotama plativim krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu* $p = 5$. *Plan otplate prikazan je u* Tablici 9.20.

konac godine	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	10 000.00
1	500.00	2 000.00	2 500.00	8 000.00
2	400.00	2 000.00	2 400.00	6 000.00
3	300.00	2 000.00	2 300.00	4 000.00
4	200.00	2 000.00	2 200.00	2 000.00
5	100.00	2 000.00	2 100.00	0
$\sum$	1 500.00	10 000.00	11 500.00	

Tablica 9.20. Plan otplate

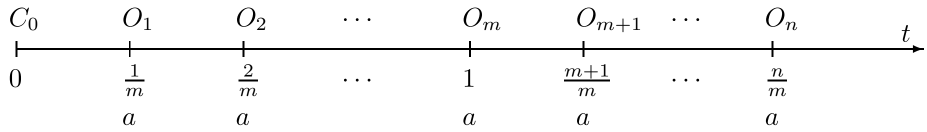
10.5.2 Otplata zajma ispodgodišnjim anuitetima

Zajam se može vraćati i jednakim ili međusobno različitim ispodgodišnjim anuitetima. Ispodgodišnja obračunska razdoblja mogu biti također međusobno jednaka ili različita.

10.5.2.1 Otplata zajma jednakim ispodgodišnjim anuitetima u jednakim ispodgodišnjim obračunskim razdobljima

Pretpostavimo da je u trenutku $t_0 = 0$ odobren zajam C_0 uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Pretpostavimo nadalje da smo godinu podijelili na

m jednakih obračunskih razdoblja i da zajam treba vratiti s n jednakih anuiteta veličine a plativih krajem obračunskog razdoblja. Broj n može biti manji ili veći od m. (vidi *Sliku 9.20*). Treba odrediti veličinu anuiteta a.



Slika 9.20. Otplata zajma jednakim ispodgodišnjim anuitetima

Ostatak duga na kraju prvog obračunskog razdoblja bit će:

$$O_1 = C_0\, r^{1/m} - a,$$

na kraju drugog obračunskog razdoblja:

$$O_2 = O_1\, r^{1/m} - a = C_0\, r^{2/m} - ar^{1/m} - a \quad \text{itd.}$$

Općenito, za $k \leq n$ ostatak duga iznosi:

$$O_k = O_{k-1}\, r^{1/m} - a = C_0\, r^k - a\, r^{(k-1)/m} - \cdots - a \cdot r^{1/m} - a,$$

odnosno:

$$\boxed{O_k = C_0\, r^{k/m} - a\, \frac{r^{k/m} - 1}{r^{1/m} - 1}.} \tag{10.66}$$

Budući da ostatak duga na kraju n–tog obračunskog razdoblja mora biti jednak nuli ($O_n = 0$), onda vrijedi:

$$0 = C_0\, r^{n/m} - a\, \frac{r^{n/m} - 1}{r^{1/m} - 1},$$

odakle dobivamo formulu za veličinu anuiteta:

$$\boxed{a = C_0\, r^{n/m}\, \frac{r^{1/m} - 1}{r^{n/m} - 1}.} \tag{10.67}$$

Sada možemo izračunati i ostatak duga nakon k obračunskih razdoblja ako se na kraju svakog od njih uplaćivao anuitet (9.67). Uvrštavanjem (9.67) u (9.66), dobivamo:[9]

$$O_k = C_0\, r^{k/m} - C_0\, r^{n/m}\, \frac{r^{k/m} - 1}{r^{n/m} - 1}. \tag{10.68}$$

Primjer 10.39 *Uzmimo da je zajam od* 20 000.00 *odobren na početku godine i da ga treba vratiti s* 5 *jednakih kvartalnih anuiteta uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope* $p = 18$.

U ovom slučaju godinu dijelimo na $m = 4$ jednaka kvartala, dok je $n = 5$. Prema (9.67) taj anuitet iznosi:

$$a = 20\ 000 \cdot 1.18^{5/4} \cdot \frac{1.18^{1/4} - 1}{1.18^{5/4} - 1} = 4\ 520.93.$$

kraj kvartala	prispjela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0.	-	-	-	20 000.00
1.	844.93	3 676.00	4 520.93	16 324.00
2.	689.63	3 831.30	4 520.93	12 492.71
3.	527.77	3 993.16	4 520.93	8 499.55
4.	359.08	4 161.85	4 520.93	4 337.70
5.	183.25	4 337.70	4 520.95	0
$\sum$	2 604.67	20 000.00	22 604.67	

Tablica 9.21. Plan otplate

Primjer 10.40 *Zajam od* 12 000.00 *treba otplatiti sa šest jednakih mjesečnih anuiteta plativih krajem mjeseca. Dekurzivna godišnja kamatna stopa je* $p = 24$.

Primjenom formule (5.67) dobivamo $a = 2\ 128.50$. U planu otplate prikazanom u *Tablici 9.22* posljednji redak je korigiran zbog zaokruživanja brojeva na dvije decimale. Usporedite ovaj plan otplate s planom otplate u *Primjeru 10.32* i *Primjeru 10.33.*

konac mjeseca	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	-	-	-	12 000.00
1	217.05	1 911.45	2 128.50	10 088.55
2	182.48	1 946.02	2 128.50	8 142.53
3	147.28	1 981.22	2 128.50	6 161.31
4	111.44	2 017.06	2 128.50	4 144.25
5	74.96	2 053.54	2 128.50	2 090.71
6	37.82	2 090.71	2 128.53	0
$\sum$	771.03	11 999.97	12 771.00	

Tablica 9.22. Plan otplate

[9] Primijetite da je formulom (9.66) dan ostatak duga ako se na kraju svakog obračunskog razdoblja uplaćuje **neki iznos** a, a formulom (9.68) dan je ostatak duga ako se na kraju svakog obračunskog razdoblja uplaćuje baš iznos (9.67).

Primjer 10.41 *Zajam od* 15 000.00 *treba otplatiti s tri tromjesečna jednaka anuiteta od* 5 500.00 *plativa krajem kvartala. Treba izračunati veličinu dekurzivne godišnje kamatne stope. koja se pri tome primjenjuje.*

Na osnovi (9.67) dobivamo jednadžbu:

$$5\ 500 \cdot (r^{3/4} - 1) = 15\ 000 \cdot r^{3/4} \cdot (r^{1/4} - 1),$$

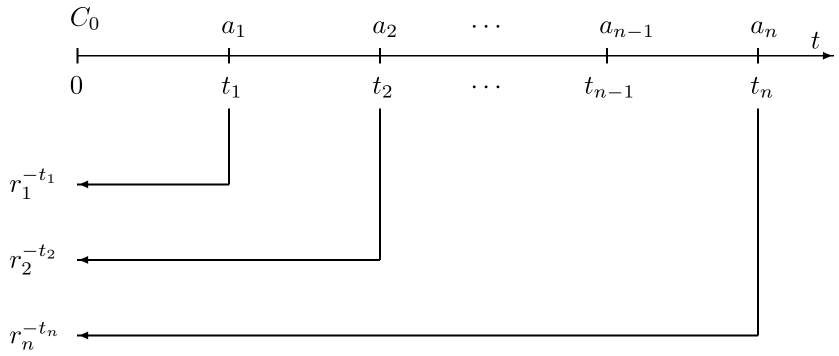
iz koje dobivamo[10]: $r = 1.211862$, odnosno $p = 21.1862$.

Primjer 10.42 *Zajam od* 20 000.00 *treba otplatiti jednakim mjesečnim anuitetima od* 1 000.00 *plativim krajem mjeseca uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu* $p = 18$. *Treba izračunati broj anuiteta i veličinu posljednjeg povećanog anuiteta.*

Iz (9.67) dobivamo $n = 23.59271$. To znači da će prvih 22 anuiteta iznositi 1 000.00, a na posljednji dvadest i treći anuitet dodat će se ostatak duga $O_{23} = 586.13$ izračunat prema (9.66). Dakle, posljednji, dvadeset i treći anuitet iznosi $a_{23} = 1\ 586.13$.

10.5.2.2 Otplata zajma proizvoljnim ispodgodišnjim anuitetima

Neka je C_0 zajam koji je odobren u trenutku $t_0 = 0$ uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Zajam treba otplatiti anuitetima $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji se uplaćuju u trenucima $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (vrijeme izraženo u godinama kao u *t.9.2.2.3*)



Slika 9.21. Otplata zajma proizvoljnim ispodgodišnjim anuitetima

[10] Primijenite metodu Regula falsi iz [18].

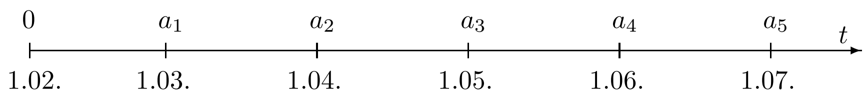
Očigledno je da će ovim anuitetima zajam C_0 biti otplaćen ukoliko je suma sadašnjih vrijednosti svih anuiteta jednaka iznosu zajma C_0, tj. ako vrijedi:

$$\boxed{C_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \, r^{-t_i}.} \tag{10.69}$$

Specijalno, ako su svi anuiteti međusobno jednaki: $a := a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, onda iz (9.69) možemo lako izračunati veličinu anuiteta a:

$$a = C_0 \left(\sum_{i=1}^{n} r^{-t_i} \right)^{-1}. \tag{10.70}$$

Primjer 10.43 *Zajam od* 20 000.00, *koji je odobren 1. veljače (u godini koja nije prestupna), treba otplatiti s pet anuiteta koji se uplaćuju svakog prvog u narednim mjesecima uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope* $p = 18$. *Prva četiri anuiteta iznose redom:* 2 000.00, 3 000.00, 4 000.00 *i* 5 000.00. *Treba odrediti peti anuitet i izraditi plan otplate.*



Slika 9.22. Jednostavno ispodgodišnje ukamaćivanje

Iz jednadžbe:

$$C_0 = a_1 r^{-28/365} + a_2 r^{-59/365} + a_3 r^{-89/365} + a_4 r^{-120/365} + a_5 r^{-150/365},$$

dobivamo: $a_5 = 6\,986.91$. Plan otplate prikazan je u *Tablici 9.23.*

datum	proteklo dana	prispjela kamata	anuitet	otplatna kvota	ostatak duga
1.02.	-	-	-	-	20 000.00
1.03.	28	255.56	2 000.00	1 744.44	18 255.56
1.04.	31	258.44	3 000.00	2 741.56	15 514.00
1.05.	30	212.49	4 000.00	3 787.51	11 726.49
1.06.	31	166.01	5 000.00	4 833.99	6 892.50
1.07.	30	94.41	6 986.91	6 892.50	0
$\sum$	150	986.91	20 986.91	20 000.00	

Tablica 9.23. Plan otplate

I u ovom slučaju može se izračunati ostatak duga u nekom trenutku t, $(t_k < t < t_{k+1})$. Ostatak duga neposredno nakon uplate prvog anuiteta (tj. u trenutku t_1) iznosi:

$$O_{t_1} = C_0\, r^{t_1} - a_1,$$

ostatak duga u trenutku t_2 iznosi:

$$O_{t_2} = O_{t_1}\, r^{t_2-t_1} - a_2 = C_0\, r^{t_2} - a_1 r^{t_2-t_1} - a_2, \quad \text{itd.}$$

Općenito, ostatak duga u trenutku $t \in [t_k, t_{k+1})$ iznosi:

$$O_t = O_{t_k}\, r^{t-t_k} = C_0\, r^t - \sum_{i=1}^{k} a_i r^{t-t_i}. \tag{10.71}$$

Primjer 10.44 *Treba izračunati ostatak duga na dan 20.04 u* Primjeru 10.43.

Prema (9.62) imamo:

$$O_t = C_0\, r^{79/365} - \left(a_1 r^{51/365} + a_2 r^{20/365}\right) = 15\ 655.34.$$

Primjer 10.45 *Zajam od* 50 000.00, *koji je odobren 13. veljače (u godini koja nije prestupna), treba otplatiti s 10 jednakih anuiteta od* 5 300.00, *koji se uplaćuju svakog prvog u narednim mjesecima počevši od 1. ožujka. Koja se dekurzivna godišnja kamatna stopa mora primijeniti.*

Najprije treba primjenom formule (9.35) izračunati vrijednost zajma na dan 1.ožujka $50\ 000.00\, r^{16/365}$, a onda prema (9.69) uz $a_1 = \ldots = a_{10} = 5\,300$ dobivamo jednadžbu:

$$\begin{aligned} 50\ 000\, r^{16/365} = \;& 5\ 300\,(1 + r^{-31/365} + r^{-61/365} + r^{-92/365} + r^{-122/365} \\ & + r^{-153/365} + r^{-184/365} + r^{-214/365} + r^{-245/365} + r^{-275/365}, \end{aligned}$$

čije je rješenje[11] $r = 1.149944$, odakle dobivamo $p = 15$.

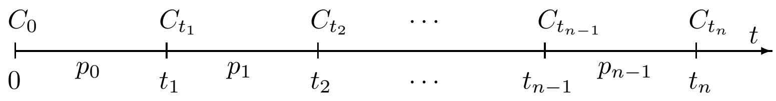
10.5.3 Otplata zajma uz promjenjivu kamatnu stopu

Zadana je veličina zajma C_0, rok otplate, način otplate i kretanje dekurzivne godišnje kamatne stope tijekom otplate zajma. Razmotrimo najprije slučaj jednokratne otplate, a zatim i otplate s više anuiteta.

10.5.3.1 Jednokratna otplata zajma

Pretpostavimo da je u trenutku $t_0 = 0$ odobren kratkoročni zajam C_0 s rokom otplate u trenutku t_n (vidi *Sliku 9.23*). Nadalje, neka u intervalu $[t_{i-1}, t_i]$ vrijedi godišnja kamatna stopa p_i za $i = 1, \ldots, n$.

[11] Koristi metodu Regula falsi iz [18].



Slika 9.23. Jednokratna otplata zajma uz promjenjivu kamatnu stopu

Označimo s $r_i = 1 + p_i/100$, $i = 1, \ldots, n$, godišnji kamatni faktor. Tada dug u trenutku t_1 iznosi:

$$C_{t_1} = C_0\, r_1^{t_1},$$

u trenutku t_2 on iznosi:

$$C_{t_2} = C_{t_1}\, r_2^{t_2-t_1} = C_0\, r_1^{t_1}\, r_2^{t_2-t_1}\,, \quad \text{itd.}$$

Općenito (uz oznaku $C_{t_0} := C_0$) vrijedi:

$$C_{t_i} = C_{t_{i-1}}\, r_i^{t_i-t_{i-1}} = C_0\, r_1^{t_1}\, r_2^{t_2-t_1} \cdots r_i^{t_i-t_{i-1}}\,, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10.72}$$

Primjer 10.46 *Dana 01.01. (u godini koja nije prestupna) odobren je zajam od* 10 000.00 *s rokom otplate 01.07. iste godine. Promatrajmo slučaj konstantne kamatne stope* $p = 12$ *i promjenjive kamatne stope, koja se mijenja svakog prvog u mjesecu na sljedeći način:*

mjesec	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
p	*12*	*15*	*18*	*15*	*20*	*18*

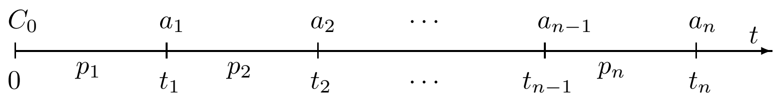
U *Tablici 9.24* prikazano je kretanje duga u slučaju konstantne kamatne stope ($p = 12$) i promjenjive kamatne stope.

datum	konstantna kamatna stopa	promjenjiva kamatna stopa
1.02.	10 096.72	10 096.72
1.03.	10 184.88	10 205.55
1.04.	10 283.38	10 350.03
1.05.	10 379.62	10 469.61
1.06.	10 480.00	10 632.99
1.07.	10 578.08	10 778.63

Tablica 9.24. Kretanje stanja duga

10.5.3.2 Otplata zajma s više anuiteta

Pretpostavimo da je u trenutku $t_0 = 0$ odobren zajam C_0, koji treba vratiti s n anuiteta $a_1, a_2, \ldots, a_n$ plativih u trenucima $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (vrijeme u godinama). Dekurzivna godišnja kamatna stopa je promjenjiva. U intervalu vremena $[t_{i-1}, t_i]$ vrijedi dekurzivna kamatna stopa p_i, $i = 1, \ldots, n$ (vidi *Sliku 9.24*).



Slika 9.24. Otplata zajma s vise anuiteta i promjenjivu kamatnu stopu

Da bi anuitetima $a_1, a_2, \ldots, a_n$ plativih u trenucima $t_1, t_2, \ldots, t_n$ zajam C_0 bio otplaćen, mora suma sadašnjih vrijednosti svih anuiteta biti jednaka veličini zajma C_0, tj. mora biti:

$$\boxed{C_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k=1}^{i} r^{-(t_k - t_{k-1})}, \qquad r_k = 1 + \frac{p_k}{100}.}$$

U općem slučaju trenutak uplate pojedinog anuiteta ne mora se podudarati s trenutkom promjene kamatne stope.

Primjer 10.47 *Zajam od* 20 000.00, *koji je odobren 1. veljače (u godini koja nije prestupna), treba otplatiti s pet anuiteta koji se uplaćuju svakog prvog u narednim mjesecima. Dekurzivna godišnja kamatna stopa u veljači bila je* 12, *u ožujku* 15, *u travnju* 18, *a u svibnju i lipnju* 20. *Prva četiri anuiteta iznose redom:* 2 000.00, 3 000.00, 4 000.00 *i* 5 000.00. *Treba odrediti peti anuitet i izraditi plan otplate, te odrediti ostatak duga na dan 20. travnja (vidi sliku uz* Primjer 10.43*).*

Ako označimo $r_1 = 1.12$, $r_2 = 1.15$, $r_3 = 1.18$ i $r_4 = 1.20$, onda iz jednadžbe:

$$C_0 = a_1\, r_1^{-28/365} + a_2\, r_2^{-59/365} + a_3\, r^{-89/365} + a_4\, r^{-120/365} + a_5\, r^{-150/365},$$

dobivamo peti anuitet $a_5 = 6\ 885.95$. Ostatak duga na dan 20. travnja iznosi: 15 524.83. Plan otplate prikazan je u *Tablici 9.25.*

datum	broj dana	kamatna stopa	prispjela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
1.02.	-	-	-	-	-	20 000.00
1.03.	28	12	174.63	1 825.37	2 000.00	18 174.63
1.04.	31	15	217.02	2 782.98	3 000.00	15 391.65
1.05.	30	18	210.82	3 789.18	4 000.00	11 602.47
1.06.	31	20	181.06	4 818.94	5 000.00	6 783.53
1.07.	30	20	102.42	6 783.53	6 885.95	0
$\sum$			885.95	20 000.00	20 885.95	

Tablica 9.25. Plan otplate

Primjer 10.48 *Zajam od* 30 000.00 *odobren 17. ožujka treba vratiti do 10. studenog iste godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu* $p = 15$. *Korisnik zajma* *sam je odabrao broj anuiteta, vremenske trenutke u kome će uplaćivati anuitete i iznose anuiteta. Dvije takve varijante prikazane su u* Tablici 9.26 *i* Tablici 9.27. *Na* Slici 9.25 *i* Slici 9.26 *prikazno je kretanje anuiteta (tamniji pravokutnici) i ostatka duga (svjetliji pravokutnici).*

r.br.	datum	dana	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	17.03.	-	-	-	-	30 000.00
1	10.05.	54	626.77	1 373.23	2 000.00	28 626.77
2	07.06.	28	308.57	2 691.43	3 000.00	25 935.34
3	15.07.	38	380.13	7 619.87	8 000.00	18 315.48
4	03.08.	19	133.74	11 866.26	12 000.00	6 449.21
5	05.09.	33	82.01	4 417.99	4 500.00	2 031.22
6	10.11.	66	51.99	2 031.22	2 083.21	0
$\sum$		238	1 583.21	30 000.00	31 583.21	

Tablica 9.26. Plan otplate

r.br.	datum	dana	prispjele kamate	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
0	17.03.	-	-	-	-	30 000.00
1	20.04.	34	393.12	2 606.88	3 000.00	27 393.12
2	15.05.	25	263.49	4 736.51	5 000.00	22 656.61
3	10.06.	26	226.63	6 773.31	7 000.00	15 883.29
4	15.07.	35	214.30	9 785.70	10 000.00	6 097.59
5	03.09.	50	117.87	3 882.13	4 000.00	2 215.46
6	10.11.	68	58.44	2 215.46	2 273.90	0
$\sum$		238	1 273.90	30 000.00	31 273.90	

Tablica 9.27. Plan otplate

Slika 9.25.

Slika 9.26.

Primjedba 10.13 *Prilikom otplate zajma uz nepromjenjivu ili promjenjivu kamatnu stopu moguće je definirati različite strategije otplate zajma.*

U tzv. „vlastitoj strategiji" (vidi [17]) veličine i vremenski trenuci svih anuiteta (osim posljednjeg) mogu se proizvoljno odrediti. Jedini uvjet koji se nužno postavlja je povrat ukupnog duga zajedno s kamatama do ugovorenog vremenskog roka, a kreditor može postaviti jos neke dodatne uvjete kao npr. da svaki anuitet sadrži barem kamate prispjele do trenutka uplate tog anuiteta. Stvar je poslovne politike institucije koja odobrava zajam da li će korisniku zajma dati potpunu slobodu odabiranja strategije otplate zajma ili će pri tome odrediti i neke svoje uvjete. U [17] izrađen je odgovarajući software za PC, pomoću kojeg su izrađeni navedeni primjeri.

Mogu se definirati i vrlo različite teorijske strategije otplate zajma (vidi npr. [3], [5], [6], [17], [19], [20]).

Za izradu plana otplate zajma u svim navedenim situacijama vrlo efikasno može poslužiti neki tablični kalkulator (npr LOTUS 1–2–3), a moguće je izraditi i specijalni programski paket za ove potrebe.

Primjer 10.49 *Zajam od* 50 000.00, *koji je odobren 14. ožujka, treba otplatiti do 1. siječnja sljedeće godine. Dogovoreno je da se anuiteti uplaćuju početkom mjeseca, ali tako da se prvi i drugi anuitet od* 350.00 *uplati 1. lipnja, odnosno 1. srpnja, treći i četvrti od* 15 000.00 *1. kolovoza, odnosno 1. rujna, peti od* 5 000.00 *1. listopada, šesti od* 100.00 *1. studenog i sedmi anuitet od* 10 000.00 *1. prosinca. Dekurzivna godišnja kamatna stopa mijenjala se tijekom godine kako slijedi: ožujak(12), travanj(10), svibanj(11), lipanj(9), srpanj(10), kolovoz(12), rujan(10), listopad(10), studeni(8) i prosinac(9). Treba izračunati posljednji anuitet koji dospjeva 1. siječnja, izraditi plan otplate, te izračunati ostatak duga na dan 29. srpnja.*

Plan otplate (prikazan u *Tablici 9.28*) dobiven je primjenom tabličnog kalkulatora LOTUS 1–2–3. Pri tome pojedine elemente tablice treba definirati vodeći računa o sljedećim zahtjevima:

– prispjelu kamatu računamo tako da na prethodni ostatak duga primijenimo formulu (9.34);

– otplatna kvota jednaka je razlici anuiteta i prispjele kamate ako je anuitet veći od prispjele kamate; u protivnom otplatna kvota jednaka je nuli;

– ostatak duga dobije se tako da se stari ostatak duga umanji za prispjeli anuitet i poveća za prispjele kamate. Primijetimo da u slučaju, ako je anuitet manji od prispjele kamate, ostatak duga se povečava; u suprotnom, on se smanjuje;

– posljednji anuitet jednak je zbroju starog ostatka duga i prispjele kamate; – suma svih anuiteta jednaka je zbroju veličine zajma i sume svih prispjelih kamata;

– suma otplatnih kvota jednaka je zbroju veličine zajma i sume svih razlika (prispjela kamata – prispjeli anuitet) za slučaj da je prispjeli anuitet manji od prispjele kamate.

datum	broj dana	kam. stopa	prispjela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
14.03	-	-	-		-	50 000.00
01.04	18	12	280.22	0	0	50 280.22
01.05	30	10	395.43	0	0	50 675.65
01.06	31	11	451.16	0	350.00	50 776.81
01.07	30	9	360.93	0	350.00	50 787.74
01.08	31	10	412.79	14 587.21	15 000.00	36 200.53
01.09	31	12	350.12	14 649.88	15 000.00	21 550.65
01.10	30	12	201.68	4 798.32	5 000.00	16 752.32
01.11	31	10	136.16	0	100.00	16 788.48
01.12	30	8	106.53	9 893.47	10 000.00	6 895.01
01.01	31	9	50.65	6 895.01	6 945.67	0
$\sum$	293		2 745.67	50 823.90	52 745.67	

Tablica 9.28. Plan otplate

Posljednji anuitet iznosi 6 945.67, a ostatak duga na dan 29. srpnja je 51 160.43. Prosječna kamatna stopa u promatranom razdoblju može se izračunati slično kao u *Zadatku 9.2.31*. Dobivamo $p = 10.22415$.

Primjedba 10.14 *Prilikom korištenja svih formula financijske matematike trebalo bi voditi računa i o stopi inflacije (odnosno deflacije), koja može imati bitan utjecaj na konačne rezultate.*

Označimo s p_n **nominalnu godišnju kamatnu stopu** *(stopa koja se pojavljuje u nekom financijskom ugovoru), s p_i* **godišnju stopu inflacije**, *a s p_r* **realnu kamatnu stopu** *(stopa koja djeluje kao superpozicija nominalne kamatne stope i stope inflacije – moglo bi se također reći da je realna kamatna stopa vrijednost nominalne kamatne stope u uvjetima bez inflacije i deflacije, tj. ako je $p_i = 0$). Vrijedi ovakva zavisnost između ove tri veličine (vidi Šego (1991)):*

$$\boxed{1 + \frac{p_n}{100} = \left(1 + \frac{p_r}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_i}{100}\right).} \tag{10.73}$$

Tako npr. ako je godišnja stopa inflacije $p_i = 12$, a želimo da realna kamatna stopa u nekom financijskom poslu bude $p_r = 5$, onda perma (9.73) trebamo dogovoriti nominalnu kamatnu stopu $p_n = 17.6$.

Ako je godišnja stopa inflacije $p_i = 125$, a u nekoj financijskoj transakciji dogovorili smo nominalnu godišnju kamatnu stopu $p_n = 130$, onda je realna kamatna stopa prema (9.73):

$$p_r = \frac{100 \cdot (p_n - p_i)}{100 + p_i} = 2.22.$$

Primjedba 10.15 *Dugi niz godina u našim je bankama vladalo pravo šarenilo loših metoda obračuna zajmova, što se naročito pokazalo nekorektnim u uvjetima visoke inflacije i za slučaj obračuna ispodgodišnjeg anuiteta. Tako su npr. u vremenu 1985–1987 u Privrednoj banci Zagreb primjenom relativnog polugodišnjeg kamatnjaka izračunavali polugodišnji anuitet, dijelili ga sa 6 i tako dobivali iznos mjesečnog anuiteta. U Zagrebačkoj banci primjenom relativnog mjesečnog kamatnjaka direktno su izračunavali mjesečni anuitet. U Slavonskoj banci nisu razlikovali zajam i potrošački kredit, pa su mjesečni anuitet računali prema formuli (9.52). U to vrijeme godišnje nominalne kamatne stope već su bile više od 40. Detaljna analiza posljedica ovakvog nekorektnog načina obračuna zajmova može se vidjeti u [14] i [19]. Ovdje navodimo samo jedan primjer. Za zajam od* 1 000 000.00 *i godišnju kamatnu stopu* $p = 45$ *usporedit ćemo visinu korektnog mjesečnog anuiteta (izračunatog prema (9.67) i visinu mjesečnog anuiteta koju bi dobili stručnjaci Privredne, Zagrebačke i Slavonske banke u to vrijeme u slučaju da se zajam otplaćuje 1, 5, 10 ili 25 godina.*

mjesečni anuitet	*broj godina amortizacije zajma*			
	1	*5*	*10*	*25*
korektni	*101 332.50*	*37 261.23*	*32 232.54*	*31 450.92*
Privredna banka	*112 406.40*	*43 173.59*	*38 158.99*	*37 501.47*
Zagrebačka banka	*105 012.40*	*42 126.73*	*37 957.88*	*37 500.62*
Slavonska banka	*103 645.80*	*35 729.17*	*27 239.59*	*22 145.84*

Provedite dodatnu analizu ovih metoda obračuna zajma (izračunajte apsolutne i relativne pogreške pojedinog anuiteta i cijelog zajma, izradite grafičke prikaze itd)

Zadaci za vježbu 9.5

1. Zajam od 30 000.00 odobren na početku godine treba otplatiti kroz 7 godina uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 12$ anuitetima plativim na kraju godine. Izračunajte anuitet, izradite plan otplate te izračunajte ostatak duga na dan 29. srpnja 1 995. godine.

   Rješenje: $a = 6\ 573.53$, ostatak duga = 16 852.27.

2. Zajam od 50 000.00 odobren na početku godine treba vratiti jednakim godišnjim anuitetima od 9 000.00 plativim krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 9$. Koliko godina će trajati otplata zajma i koliki će biti posljednji (krnji) anuitet ? Uputa: Jednadžbu dobivenu iz (9.62) riješite metodom Regula falsi iz [18].

   Rješenje: $n = 8.042924$. Prvih sedam anuiteta iznose 9 000.00, a osmi 9 371.87.

3. Neka je C_0 zajam odobren na početku godine, koji treba vratiti s n jednakih godišnjih anuiteta plativih početkom godine. Dekurzivna godišnja kamatna stopa p je nepromjenjiva u čitavom razdoblju otplate. Izračunajte veličinu anuiteta i ostatak duga na početku k–te ($k < n$) godine.

   Rješenje: $a = C_0\, r^{n-1} \cdot \dfrac{r-1}{r^n - 1}$, $O_k = \dfrac{C_0}{r} \cdot \dfrac{r^n - r^k}{r^n - 1}$.

4. Zajam C_0 odobren na početku godine treba vratiti kroz n godina s anuitetima koji se uplaćuju početkom godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Prvi anuitet uplaćuje se u trenutku odobrenja zajma. Odredite uvjet uz koji će zajam C_0 biti vraćen nakon n godina anuitetima $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

   Rješenje: $C_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\, r^{-(i-1)}$.

5. Zajam od 50 000.00 odobren na početku godine treba biti vraćen kroz 4 godine anuitetima plativim krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 20$. Ako je prvi anuitet 10 000.00, drugi 15 000.00, a treći 20 000.00, odredite četvrti anuitet i izradite plan otplate.

   Rješenje: $a_4 = 40\ 800.00$.

6. Izradite kompjuterski program, koji će učitati veličinu zajma C_0, rok otplatete (broj godina), godišnju kamatnu stopu p i način otplate (početkom ili krajem godine), te kao rezultat dati veličinu godišnjeg anuiteta i tablicu plana otplate. Svi brojevi trebaju biti zaokruženi na 2 decimale.

7. Izradite kompjuterski program kojim ćete moći riješiti svaki zadatak tipa *Zadatka 3. i 5.*

8. Zajam od 80 000.00 treba otplatiti s 12 jednakih mjesecnih anuiteta plativih krajem mjeseca. Dekurzivna godišnja kamatna stopa je $p = 7.5$. Izračunajte veličinu mjesečnog anuiteta i izradite odgovarajući plan otplate kao u *Primjeru 10.40.* Nakon uplate sedmog anuiteta kamatna stopa se povećala, tako da su se preostalih 5 mjesečnih anuiteta povećali za 10%. Koliko iznosi nova godišnja kamatna stopa ?

9. Zajam od 100 000.00 treba otplatiti s 20 jednakih polugodišnjih anuiteta od 6 500.00. Kolika je dekurzivna godišnja kamatna stopa u slučaju prenumerando, a kolika u slučaju postnumerando uplata ?

   Rješenje: $p = 5.3503$ (prenumerando uplate),

10. Zajam od 30 000.00 treba otplatiti jednakim mjesečnim anuitetima od 2 000.00 plativih krajem mjeseca uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 12$. Treba izračunati broj i veličinu posljednjeg povećanog anuiteta.

    Rješenje: $n = 16$, $\quad a_{16} = 2512.23$.

11. Pretpostavimo da je u trenutku $t_0 = 0$ odobren zajam C_0 uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Pretpostavimo nadalje da smo godinu podijelili na m jednakih obračunskih razdoblja i da zajam treba vratiti s n jednakih anuiteta veličine a plativih početkom svakog obračunskog razdoblja počevši od trenutka odobrenja zajma. Broj n može biti manji ili veći od m. Treba odrediti veličinu anuiteta a i ostatak duga na početku k–tog obračunskog razdoblja. Neka je $C_0 = 75\ 000.00$, $p = 12$, $m = 4$ (obračunska razdoblja su kvartali) i $n = 20$. Izračunajte veličinu anuiteta i izradite plan otplate.

12. Ako u *Zadatku 11.* korisnik zajma nakon uplate desetog anuiteta uplati jos dodatno 20 000.00, koliko kvartalnih anuiteta iste veličine korisnik zajma treba još uplatiti ? Koliki je posljednji (povećani) anuitet ?

13. Zajam od 30 000.00, koji je odobren 12.travnja (u godini koja nije prestupna), treba otplatiti sa šest anuiteta koji se uplaćuju svakog prvog u narednim mjesecima uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope $p = 24$. Prvih pet anuiteta iznose redom: 2 000.00, 3 000.00, 5 000.00, 6 000.00 i 7 500.00. Treba odrediti šesti anuitet i izraditi plan otplate. Koliki je ostatak duga na dan 4. srpnja. Uputa: vidi *Primjer10.43*.

    Rješenje: $a_6 = 8\ 636.58$, ostatak duga =21 340.76.

14. Zajam od 20 000.00 odobren je na početku godine. Treba ga vratiti s 4 jednaka polugodišnja anuiteta plativa krajem polugodišta uz primjenu dekurzivne godišnje kamatne stope $p = 9$. Izračunajte veličinu anuiteta i izradite plan otplate.

    Rješenje: $a = 5\ 562.23$.

15. Izradite kompjuterski program kojim ćete moći riješiti proizvoljni zadatak tipa *Zadatka 13*.

16. Izradite kompjuterski program kojim ćete moći riješiti proizvoljni zadatak tipa *Zadatka 14*.

17. Dana 12.04. odobren je zajam u iznosu od 10 000.00 s rokom jednokratne otplate 01.10. iste godine. Koji iznos treba vratiti u slučaju konstantne dekurzivne godišnje kamatne stope $p = 15$, a koliko u slučaju dekurzivne godišnje kamatne stope, koja se mijenja svakog prvog u mjesecu na sljedeći način:

mjesec	04	05	06	07	08	09
p	15	18	18	20	17	19

    Rješenje: 10 680.78; 10 811.81.

18. Izradite kompjuterski program kojim ćete moći riješiti proizvoljni zadatak tipa *Zadatka 17*.

19. Zajam od 30 000.00 odobren je na početku godine treba otplatiti kroz 7 godina uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 12$ anuitetima plativim na početku godine. Izračunajte anuitet, izradite plan otplate te izračunajte ostatak duga na dan 29. srpnja 1995. godine. Uputa: vidi *Zadatak 3*.

    Rješenje: $a = 5\ 869.23$, ostatak duga = 15 046.67.

20. Zajam od 50 000.00 odobren je na početku godine treba vratiti kroz 4 godine anuitetima plativim početkom godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu $p = 20$. Ako je prvi anuitet 10 000.00, drugi 15 000.00, a treći 20 000.00, odredite četvrti anuitet i izradite plan otplate.

    Rješenje: 18 995.20.

21. Zajam C_0 odobren na početku godine treba vratiti s n jednakih otplatnih kvota R plativih početkom godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p. Prvi anuitet uplaćuje se u trenutku odobrenja zajma. Izračunajte ostatak duga na početku k–te godine i iznose pojedinih anuiteta. Neka je $C_0 = 50\ 000.00$, $n = 5$, $p = 9$. Izradite plan otplate.

22. Zajam od 30 000.00, koji je odobren 12.travnja (u godini koja nije prestupna), treba otplatiti sa šest anuiteta koji se uplaćuju svakog prvog u narednim mjesecima. Dekurzivna godišnja kamatna stopa u travnju je bila 21, u svibnju 18, u lipnju 20, u srpnju 26, u kolovozu 24, i u rujnu 28, Prvih pet anuiteta iznose redom: 2 000.00, 3 000.00, 5 000.00, 6 000.00 i 7 500.00. Treba odrediti šesti anuitet, izraditi plan otplate i odrediti ostatak duga na dan 29. srpnja. Uputa: vidi *Primjer 10.47.*

    Rješenje: $a_6 = 8\ 444.41$, ostatak duga = 21 448.43.

23. Zajam od 20 000.00, koji je odobren 3. siječnja (u godini koja nije prestupna), treba otplatiti s 20 jednakih „mjesečnih" anuiteta od 1 100.00, koji se uplaćuju svakog prvog u narednim mjesecima počevši od 1. travnja iste godine. Koja se dekurzivna godišnja kamatna stopa mora primijeniti ?

    Rješenje: Primjenom metode Regula falsi iz [18] na jednadžbu:

    $$1.1 = 20 \cdot r^{87/365}\, r^{20/12}\, \frac{r^{1/12} - 1}{r^{10/12} - 1}$$

    dobivamo $r = 1.090237$, odnosno $p = 9.0237$.

24. Zajam od 10 000.00, koji je odobren 14. ožujka, treba otplatiti do 1. siječnja sljedeće godine. Dogovoreno je da se anuiteti uplaćuju početkom mjeseca, ali tako da se prvi anuitet od 70.00 uplati 1. srpnja, drugi od 3 500.00 1. kolovoza, treći od 3 000.00 1. rujna, četvrti od 35.00 1. listopada, peti od 1 500.00 1. studenog i šesti u iznosu od 1 200.00 1. prosinca. Dekurzivne godišnje kamatne stope tijekom godine mijenjale su se kao u *Primjeru 10.49.* Treba izračunati posljednji anuitet koji dospjeva 1. siječnja. Izradite plan otplate, te izračunajte ostatak duga na dan 29. srpnja.

    Rješenje: $a_{10} = 1\ 456.37$, ostatak duga = 10 303.11. Plan otplate:

datum	broj dana	kam. stopa	prispjela kamata	otplatna kvota	anuitet	ostatak duga
14.03	-	-	-	-	-	10 000.00
01.04	18	12	56.04	0	0	10 056.04
01.05	30	10	79.09	0	0	10 135.13
01.06	31	11	90.23	0	0	10 225.36
01.07	30	9	72.68	0	70.00	10 228.05
01.08	31	10	83.13	2 416.87	2 500.00	7 811.18
01.09	31	12	75.55	2 924.45	3 000.00	4 886.72
01.10	30	12	45.73	0	45.00	4 887.45
01.11	31	10	39.72	1 960.28	2 000.00	2 927.18
01.12	30	8	18.57	1 481.43	1 500.00	1 445.75
01.01	31	9	10.62	1 445.75	1 456.37	0
$\sum$	293		571.37	10 228.78	10 571.37	

25. Izradi plan otplate zajma iz *Zadatka 24.* ako je prvi anuitet od 50.00 uplaćen 1. srpnja, drugi od 3 500.00 1. kolovoza, treći od 3 000.00 1. rujna, četvrti od 35.00 1. listopada, peti od 1 500.00 1. studenog i šesti od 1 200.00 1. prosinca. Koliki je

posljednji anuitet koji dospjeva 1. siječnja? Izradite plan otplate, te izračunajte ostatak duga na dan 29. srpnja.

Rješenje: $a_{10} = 1\ 255.15$, ostatak duga $=$ 10 323.25.

Literatura:

[1] K. Bosch, *Finanzmathematik*, R. Oldenbourg Verlag, München, 1987.

[2] E. Caprano, A. Gierl, *Finanzmathematik*, Verlag Franz Vahlen, München, 1992.

[3] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Nove strategije otplate zajma*, 4. Konferncija iz operacijskih istraživanja, Rab, 1994.

[4] A. Dabčević, N. Dravinac, I. Franić, B. Sekulić, B. Šego, *Primjena matematike za ekonomiste*, Informator, Zagreb, 1989.

[5] D. Francišković, *Generalizacija kontinuiranog ukamaćivanja i strategije otplate duga*, Ekonomska analiza, 24(1990), 179–198

[6] D. Francišković, *Continuous capitalization and debt menagement.* In R. Scitovski (Ed.), VII Conference on Applied Mathematics, University of Osijek, Osijek, 1990, 67–79.

[7] E. Kahle, *Grundkurs Finanzmathematik*, R. Oldenbourg Verlag, München, 1989.

[8] S. J. Khoury, T. D. Parsons, *Mathematical Methods in Finance and Economics*, North Holland, New York, 1986.

[9] L. Kruschwitz, *Finanzmathematik*, Verlag F. Vahlen, München, 1989.

[10] Lj. Martić, *Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize*, Informator, Zagreb, 1980.

[11] V. Muškardin, *Suvremeni pristup financijskoj matematici*, Ekonomska analiza, 19(1985), 75–99

[12] B. Relić, *Financijska matematika 1*, Birotehnika, Zagreb, 1990.

[13] B. Relić, B. Šego, *Financijska matematika 2*, Birotehnika, Zagreb, 1990.

[14] R. Scitovski, *Ispodgodišnje ukamaćivanje*, Ekonomska analiza, 21(1987), 243–257

[15] R. Scitovski, M. Šilac, D. Francišković, *Suvremeni pristup financijskoj matematici*, Privreda, 33(1989).

[16] R. Scitovski, *Problemi najmanjih kvadrata. Financijska matematika*, Ekonomski fakultet, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1993.

[17] R. Scitovski, B. Dukić, D. Jukić, D. Francišković, M. Šilac – Benšić, *Strategije otplate zajma*, Financijska praksa 1(1994), 15–26.

[18] R. Scitovski, R. Galić, M. Šilac – Benšić, *Numerička analiza. Vjerojatnost i statistika*, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1993.

[19] B. Šego, *Modeli otplate kredita s revalorizacijom. Primjena na otkup društvenih stanova i investicije u turističkoj privredi*, Informator, Zagreb, 1991.

[20] M. Šilac, *Otplata zajma varijabilnim anuitetima*, Ekonomska analiza, 23(1989), 185–197.

DODATAK

Njemačko – hrvatski rječnik pojmova financijske matematike

Abschreibung, die — *otpisivanje, amortizacija*
abzinsen — *diskontiranje (skidanje kamata)*
Abzinsungsfaktor, der — *diskontni faktor* $(1/r)$
anfallende Zinsen, die — *prispjele kamate*
Anfangskapital, der — *početni kapital*
Anfangsschuld, die — *početni dug*
anizipative Verzinsung, die — *anticipativno ukamaćivanje*
Anleihe, die — *zajam*
Anleiheschein, der — *obveznica*
Annuität, die — *anuitet*
Anzahl der Zinsperioden pro Jahr — *broj obračunskih razdoblja u godini*
Anzahlung, die — *učešće (kod kredita)*
Aufzinsungsfaktor, der — *kamatni faktor*
Bankeinlage, die — *ulog u banku*
Bargeld, das — *gotovina*
Barwert, der — *gotovina, početni kapital*
Betrag, der — *iznos (novca)*
Darlehen, das — *zajam*
Darlehenszinsen, die — *kamate na zajam*
dekursive Verzinsung, die — *dekurzivno ukamaćivanje*
diskontieren — *diskontiranje (skidanje kamata)*
Diskontierungsfaktor, der — *diskontni faktor*
effektiver Zinsfuss, der — *efektivna kamatna stopa*
effektiver Zinssatz, der — *efektivni kamatnjak*
einfache Verzinsung, die — *jednostavno ukamaćivanje*
einfache Zinsen, die — *jednostavne kamate*
Einnahme, die — *prihod*
Einzahlung, die — *uplaćivanje, uplata*
Endkapital, das — *konačni kapital*
Ersatzkapital, das — *fiktivni početni kapital*
ewige Rente, die — *vječna renta*
fällig — *plativ, dospio*
Gebühr, die — *plaćanje usluge (bankarske)*
Guthaben, das — *ušteđevina, kapital, potraživanje*

Guthaber, der — *vjerovnik*
Habenzinsen, die — *kamate koje netko treba dobiti*
Interpolationsverfahren, das — *inerpolacija*
Kapitaleingang, der — *ulaz (unos) kapitala*
Kapital, das — *kapital, glavnica*
Kapitalwert, der — *vrijednost kapitala*
kaufmännische Rechnen, das — *trgovački način obračuna*
konformer Zinsfuss, der — *konformna kamatna stopa*
konformer Zinssatz, der — *konformni kamatnjak*
Kredit, der — *kredit*
Laufzeit, die — *vrijeme (korištenja kapitala)*
Leibrente, die — *doživotna renta*
nachschüssige Rente, die — *postnumerando renta*
nachschüssiger Verzinsung, die — *dekurzivno ukamaćivanje*
Nennwert, der — *vrijednost kapitala*
nominaler Zinsfuss, der — *nominalna kamatna stopa*
nominaler Zinssatz, der — *nominalni kamatnjak*
Nominalkapital, das — *nominalni kapital*
Nutzungsdauer, die — *vrijeme (korištenja kapitala)*
postnumerando Rente, die — *postnumerando renta*
Prozent, das — *postotak*
Prozentsatz für Gebühren — *postotak na uslugu (bankarsku)*
Prozentsatz, der — *postotak*
pränumerando Rente, die — *prenumerando renta*
Realkapital, das — *realni kapital*
regelmässig gezahlte Rate (Rente), die — *ravnomjerno plative rate (rente)*
relativer Zinsfuss, der — *relativna kamatna stopa*
relativer Zinssatz, der — *relativni kamatnjak*
Rentenbarwert, der — *sadašnja vrijednost rente*
Restschuld, die — *ostatak duga*
Schuld, die — *dug*
Schulder, der — *dužnik*
Schuldverschreibung, die — *zapis duga, pismena obaveza*
Schuldzinsen, die — *kamate koje netko treba platiti (dugovne kamate)*
Sollzinsen, die — *kamate koje netko treba platiti (dugovne kamate)*
Sparbuch, das — *štedna knjižica*
stetige Verzinsung, die — *neprekidno ukamaćivanje*
Tilgung einer Schuld — *otplata zajma (duga)*
Tilgung, die — *otplata*
Tilgungsbetrag, die — *otplatni iznos (rata)*
Tilgungsplan, der — *plan otplate*
Tilgungsquote, die — *otplatna kvota*

Tilgungsrate, die — *otplatna rata*
unterjährliche Verzinsung, die — *ispodgodišnje ukamaćivanje*
verzinsen — *ukamaćivati*
Verzinsung, die — *ukamaćivanje*
vierteljährlich — *kvartalno*
vorschüssige Rente, die — *prenumerando renta*
vorschüssiger Verzinsung, die — *anticipativno ukamaćivanje*
Zeitpunkt, der — *vremenski trenutak*
Zinsbelastung, die — *opterećenje kamatama*
zinsen — *plaćati kamate, ukamaćivati*
Zinseszins, der — *složeno ukamaćivanje (kamate na kamate)*
Zinseszinsrechnung, die — *složeno ukamaćivanje (kamate na kamate)*
Zinsfaktor, der — *kamatni faktor*
Zinsfuss, der — *kamatna stopa*
Zinsperiode, die — *obračunsko (kamatno) razdoblje*
zinspflichtig — *dužan plaćati kamate*
Zinssatz, der — *kamatnjak*
Zinssteuer, die — *porez na kamate*