Newtonova metoda – dopuna

Pretpostavimo da funkcija $f \in C^2[a,b]$ u intervalu $I = [a,b]$ ima nultočku ξ. Izaberemo $x_0 \in I$ i u okolini te točke funkciju f aproksimiramo afinom funkcijom l, čiji je graf tangenta na graf Γ_f funkcije f.

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Sljedeću aproksimaciju x_1 dobit ćemo određivanjem nultočke afine funkcije l

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \qquad f'(x_0) \neq 0. \tag{2}$$

Ponavljanjem ove procedure dobivamo iterativni postupak poznat pod nazivom Newtonova metoda tangenti

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Opravdanje za ovakav postupak može se potražiti preko Taylorovog razvoja funkcije f u okolini tocke x_n i zadržavanjem na linearnom članu

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \tag{4}$$

ili preko Newton–Leibnizove formule uz primjenu teorema o srednjoj vrijednosti za integrale iz čega također slijedi (4)

Definicija 1. Kažemo da je funkcija $g : J \to \mathbb{R}$, $J = (a,b)$ Lipschitz–neprekidna s konstantom L i pišemo $g \in Lip_L(J)$ ako za svaki $x, y \in J$ vrijedi

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|. \tag{5}$$

Primjer 1. *Funkcija* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ *je Lipschitz-neprekidna s konstantom* $L = 1$ *na* $\mathbb{R}$ *jer je* $||x| - |y|| \leq 1 \cdot |x - y|$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$.

Za $x \neq y$ Lipschitzov uvjet (5) možemo zapisati u obliku

$$-L \leq \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \leq L \quad \forall x, y \in [a,b],$$

odakle se vidi da je relativna promjena (kvocijent diferencija) funkcije g ograničena između $-L$ i L. Ako x fiksiramo, a y pustimo prema x, onda možemo zaključiti da ako postoji derivacija funkcije g, ona je ograničena između $-L$ i L.

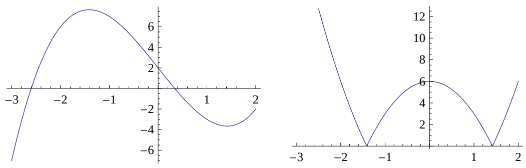
Primjedba 1. Svaka Lipschitz-neprekidna funkcija je neprekidna funkcija.
Ako je $f \in C^1[a,b]$, onda je $f \in Lip_L[a,b]$ (Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti), ali obrat ne vrijedi (vidi Primjer 4). Ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, koja ima po dijelovima neprekidnu derivaciju, onda primjenom Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti dobivamo konstantu $L = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ (Primjer 4).

Primjedba 2. Definicija Lipschitz-neprekidne funkcije lako se može proširiti na funkciju više varijabli $g\colon D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Takva funkcija je *Lipschitz-neprekidna* (zadovoljava *Lipschitzov uvjet*) ako postoji konstanta $L > 0$ tako da za svaki $x, y \in D$ vrijedi

$$|g(x) - g(y)| \leq L\|x - y\|,$$

gdje je $\|\cdot\|$ neka norma.

Primjer 2. *Treba odrediti Lipschitzovu konstantu funkcije* $f\colon [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x + 2$. *Iz Slike 1 može se vidjeti da je* $L = |f(-3)| = 21$.

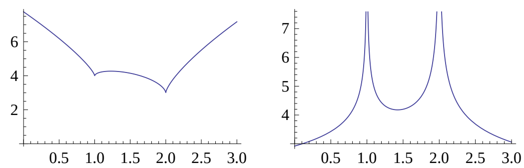


Slika 1: Funkcija $f(x) = x^3 - 6x + 2$ i $x \mapsto |f'(x)|$

Primjer 3. *Treba odrediti Lipschitzovu konstantu funkcije* $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} + 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$. *Njena derivacija*

$$f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x-1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

nije definirana u točkama iz $\{1, 2\}$ *(vidi Sliku 2), a Lipschitzova konstanta u ovom slučaju ne postoji.*

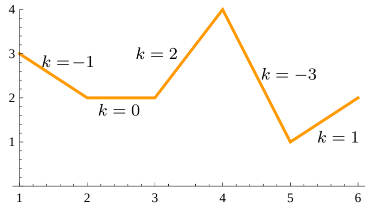


Slika 2: Funkcija $f(x) = 1 + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} + 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$ i $x \mapsto |f'(x)|$

Primjer 4. *Treba odrediti Lipschitzovu konstantu funkcije* $f\colon [1, 6] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2, & 2 \leq x \leq 3, \\ 2x - 4, & 3 \leq x \leq 4, \\ -3x + 16, & 4 \leq x \leq 5, \\ x - 4, & 5 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

čiji graf je prikazan na Slici 3. Očigledno je $L = 3$.



Slika 3: Koeficijenti smjera po dijelovima linearne funkcije f

Za derivabilnu funkciju f kažemo da je Lipschitz derivabilna ako je $f' \in Lip_L(J)$. Sljedeća lema daje ocjenu pogreške aproksimacije takve funkcije afinom funkcijom (1).

Lema 1. *Neka je $f : J \to \mathbb{R}$ funkcija, takva da je $f' \in Lip_L(J)$. Tada za proizvoljni $x_0, x \in J$ vrijedi*

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \le \tfrac{L}{2}(x - x_0)^2. \tag{6}$$

Dokaz. Iz Newton–Leibnizove formule slijedi

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt.$$

Oduzimanjem vrijednosti $\int_{x_0}^{x} f'(x_0)\, dt = f'(x_0)(x - x_0)$ lijevoj i desnoj strani dobivamo

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} \left(f'(t) - f'(x_0)\right) dt.$$

Budući da je $f' \in Lip_L(J)$ i da je $t - x_0 > 0$ za $t \in (x_0, x)$, imamo

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \le L \int_{x_0}^{x} (t - x_0)\, dt = L\frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

□

Ocjena iz *Leme 1* bliska je ocjeni iz Taylorove formule (vidi primjerice [3]), pri čemu je $|f''(\xi)|$ ocijenjen s L. Sljedeći teorem daje uvjete uz koje Newtonova metoda za Lipschitz derivabilnu funkciju ($f' \in Lip_L(J)$) zadržava kvadratnu brzinu konvergencije.

Teorem 1. *Neka je $f\colon J \to \mathbb{R}$ funkcija, takva da je $f' \in Lip_L(J)$. Nadalje, pretpostavimo da postoji $m_1 > 0$, tako da vrijedi $|f'(x)| \ge m_1$ za svaki $x \in J$.*

Ako postoji $\xi \in J$, takav da je $f(\xi) = 0$, onda postoji $\eta > 0$, takav da za proizvoljni[1] *$x_0 \in (\xi - \eta, \xi + \eta)$, niz generiran rekurzivnom formulom*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

konvergira prema ξ kvadratnom brzinom

$$|x_{n+1} - \xi| \le \tfrac{L}{2m_1}(x_n - \xi)^2. \tag{8}$$

[1] tj. za x_0 iz dovoljno malene okoline od ξ niz (7) konvergira prema ξ kvadratnom brzinom.

Dokaz. Neka je $\tau \in (0,1)$, a $\hat{\eta}$ radijus najvećeg otvorenog simetričnog intervala oko ξ sadržanog u J i neka je $\eta = \min\left\{\hat{\eta}, \tau\frac{2m_1}{L}\right\}$. Primijetite da to znači da $x_0 \in J$ treba birati tako da je

$$|x_0 - \xi| < \hat{\eta} \qquad \& \qquad |x_0 - \xi| < \tau\tfrac{2m_1}{L},$$

što može biti vrlo blizu ξ.

Najprije ćemo induktivno dokazati da vrijedi (8). Po pretpostavci je $|x_0 - \xi| \le \eta$. Nadalje slijedi

$$x_1 - \xi = x_0 - \xi - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \xi - \frac{f(x_0) - f(\xi)}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}\left[f(\xi) - f(x_0) - f'(x_0)(\xi - x_0)\right].$$

Koristeći *Lemu 1* dobivamo

$$|x_1 - \xi| \le \tfrac{1}{f'(x_0)}\tfrac{L}{2}(\xi - x_0)^2 \le \tfrac{L}{2m_1}(\xi - x_0)^2,$$

što je baza indukcije. Slično se pokaže i korak indukcije.

Nadalje, pokažimo da je cijeli niz (x_n) sadržan u okolini $(\xi - \eta, \xi + \eta)$. Po pretpostavci teorema za x_0 to je ispunjeno. Kako je $|x_0 - \xi| < \eta \le \tau\frac{2m_1}{L}$, iz *Leme 1* slijedi

$$|x_1 - \xi| \le \tfrac{L}{2m_1}|x_0 - \xi|^2 \le \tfrac{L}{2m_1}|x_0 - \xi|\,\tau\tfrac{2m_1}{L} = \tau|x_0 - \xi| < \tau\,\eta < \eta.$$

Uz pretpostavku da je $|x_n - \xi| < \eta$, na sličan način zaključujemo da je

$$|x_{n+1} - \xi| \le \tau|x_n - \xi| < \eta.$$

To znači da cijeli niz (x_n) ostaje u okolini $(\xi - \eta, \xi + \eta)$.

Pokažimo još da niz (x_n) konvergira prema ξ. Naime, iz

$$|x_{n+1} - \xi| \le \tau|x_n - \xi| \le \cdots \le \tau^{n+1}|x_0 - \xi| < \tau^{n+1}\eta,$$

slijedi

$$\lim_{n\to\infty}|x_{n+1} - \xi| = 0.$$

□

Literatura

[1] J. E. Dennis, R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996.

[2] D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004.

[4] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.