

1. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [20 bodova] (a) Što znači da približni broj $a^* = b_m^* \times 10^m + b_{m-1}^* \times 10^{m-1} + \dots$ ima n signifikantnih znamenki? Odredite broj signifikantnih znamenki broja $a = 0.003527 \pm .0005$ i prema tome ga zaokružite.

(b) Ako je poznato $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*$, $i = 1, 2, 3$, napišite vrijednost i apsolutnu pogrešku funkcije $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 e^{-2x_3}$ u točki (x_1^*, x_2^*, x_3^*) .

[a] $n = 1, \quad a^* = .0004$

Zadatak 2 [20 bodova] Napišite izraze za rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 2px + q = 0$, $p, q > 0$, $p \gg q$, tako da imaju sto manju osjetljivost na veličine brojeva p, q .

[$x_1 = p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_2 = \frac{q}{p + \sqrt{p^2 - q}}$]

Zadatak 3 [25 bodova] (a) Uz koji uvjet na podatke (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ postoji jedinstveni interpolacijski polinom n -tog stupnja?

(b) Napišite formulu za ocjenu pogreške interpolacijskog polinoma u točki $\bar{x} \in [x_0, x_n]$.

(c) Koje metode poznajete za određivanje interpolacijskog polinoma? Primjenom Lagrangeove metode odredite interpolacijski polinom koji prolazi točkama $T_0(-2, 29), T_1(0, 5), T_2(1, 5), T_3(3, -1)$,

[$P_3(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 5$]

Zadatak 4 [25 bodova] Napisite linearni interpolacijski spline za podatke iz prethodnog zadatka, nacrtajte njegov graf i napisite izraz za ocjenu pogreske.

[$\|f - L(f)\|_\infty \leq \frac{M_2}{8} h_{max}^2$]

Zadatak 5 [30 bodova] (a) Napisite sustav uvjeta koje treba ispunjavati prirodni kubični interpolacijski spline da bi interpolirao neprekidnu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ čije vrijednosti y_0, y_1, \dots, y_n poznajemo u $(n + 1)$ čvorova $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$?

(b) Ako poznajemo vrijednosti $s_{i-1}, s_i \in \mathbb{R}$ druge derivacije i -tog kubičnog polinoma $C_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$ u čvorovima x_{i-1}, x_i , napišite izraze za: $C_i''(x), C_i'(x), C_i(x)$.

[$C_i''(x) = \frac{s_{i-1}}{h_i}(x_i - x) + \frac{s_i}{h_i}(x - x_{i-1})$]

$C_i'(x) = b_i - \frac{s_{i-1}}{2h_i}(x_i - x)^2 + \frac{s_i}{2h_i}(x - x_{i-1})^2,$

$C_i(x) = a_i + b_i x + \frac{s_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3 + \frac{s_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3,$

gdje je $a_i = -b_i x_{i-1} + y_{i-1} - s_{i-1} \frac{h_i^2}{6}, \quad b_i = d_i - (s_i - s_{i-1}) \frac{h_i}{6}, \quad d_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}.$

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).

1. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [20 bodova] (a) Što znači da približni broj $a^* = b_m^* \times 10^m + b_{m-1}^* \times 10^{m-1} + \dots$ ima n signifikantnih znamenki? Odredite broj signifikantnih znamenki broja $a = 0.0423637 \pm 0.0000238$ i prema tome ga zaokružite.

(b) Ako je poznato $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*$, $i = 1, 2, 3$, odredite vrijednost i apsolutnu pogrešku funkcije $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{-2x_3} + x_2$ u točki (x_1^*, x_2^*, x_3^*) .

[a) $n = 3$, $a^* = 0.0424$]

Zadatak 2 [20 bodova] Napišite izraze za rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 2px + q = 0$, $p, q > 0$, $p \gg q$, tako da imaju sto manju osjetljivost na veličine brojeva p, q .

$$[x_1 = p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_2 = \frac{q}{p + \sqrt{p^2 - q}}]$$

Zadatak 3 [25 bodova] (a) Uz koji uvjet na podatke (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ postoji jedinstveni interpolacijski polinom n -tog stupnja?

(b) Napišite formulu za ocjenu pogreške interpolacijskog polinoma u točki $\bar{x} \in [x_0, x_n]$.

(c) Koje metode poznajete za određivanje interpolacijskog polinoma? Odredite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji prolazi točkama $T_0(-2, 29), T_1(0, 5), T_2(1, 2), T_3(3, -16)$.

[koeficijenti iz Newtonovog oblika iznose redom: 29, -12, 3, -1]

Zadatak 4 [25 bodova] Napisite linearni interpolacijski spline za podatke iz prethodnog zadatka, nacrtajte njegov graf i napisite izraz za ocjenu pogreške.

$$[\|f - L(f)\|_\infty \leq \frac{M_2}{8} h_{max}^2]$$

Zadatak 5 [30 bodova] (a) Napisite sustav uvjeta koje treba ispunjavati prirodni kubični interpolacijski spline da bi interpolirao neprekidnu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ čije vrijednosti y_0, y_1, \dots, y_n poznajemo u $(n + 1)$ čvorova $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$?

(b) Ako poznajemo vrijednosti $s_{i-1}, s_i \in \mathbb{R}$ druge derivacije i -tog kubičnog polinoma $C_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$ u čvorovima x_{i-1}, x_i , napisite izraze za: $C_i''(x), C_i'(x), C_i(x)$.

$$[C_i''(x) = \frac{s_{i-1}}{h_i}(x_i - x) + \frac{s_i}{h_i}(x - x_{i-1})]$$

$$C_i'(x) = b_i - \frac{s_{i-1}}{2h_i}(x_i - x)^2 + \frac{s_i}{2h_i}(x - x_{i-1})^2,$$

$$C_i(x) = a_i + b_i x + \frac{s_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3 + \frac{s_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3,$$

$$gdje je a_i = -b_i x_{i-1} + y_{i-1} - s_{i-1} \frac{h_i^2}{6}, \quad b_i = d_i - (s_i - s_{i-1}) \frac{h_i}{6}, \quad d_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}.$$

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).