

1. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

- (a) Definirajte broj signifikantnih znamenki približnog broja a^* .
- (b) Ako je $a = 21.537 \pm 0.0005$, koliki je broj signifikantnih znamenki približnog broja a^* ? Kolika je njegova apsolutna i relativna pogreška u %?

Zadatak 2. [25 bodova]

- (a) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija i $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*$, $i = 1, 2$. Napišite formulu za određivanje apsolutne pogreške funkcije.
- (b) Neka je $r = 2.537 \pm 0.005$ radijus baze, a $h = 5.246 \pm 0.005$ visina pravilnog stošca. Odredite apsolutnu i relativnu pogrešku kod izračunavanja volumena stošca (π uzmite na 5 decimala i računajte kao da ne pridonosi grešci).
- (c) S kojom točnošću bismo morali imati radijus baze r^* , odnosno visinu h^* pravilnog stošca da se kod izračunavanja volumena stošca ne premaši dozvoljena apsolutna pogreška ϵ ?

Zadatak 3. [25 bodova]

- (a) Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija čije vrijednosti su poznate na diskretnom skupu točaka $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ i iznose $y_0 = y_n = 1$, $y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$. Napišite njezin interpolacijski polinom. Je li on jedinstven?
- (c) Ako je g^* neka aproksimacija funkcije f , kako možete izraziti njenu apsolutnu pogrešku u L_1, L_2 i L_∞ normi?

Zadatak 4. [25 bodova]

- (a) Iskažite teorem o pogrešci interpolacijskog polinoma. O čemu ovisi veličina pogreške?
- (b) Primjenom teorema o pogrešci interpolacijskog polinoma izvedite formulu za apsolutnu pogrešku interpolacijskog polinoma prvog reda za funkciju $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$?

Zadatak 5. [25 bodova]

- (a) Napišite sustav uvjeta koje treba ispunjavati prirodni kubični interpolacijski spline da bi interpolirao neprekidnu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ čije vrijednosti y_0, y_1, \dots, y_n poznajemo u $(n+1)$ čvorova $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$?
- (b) Napišite sustav jednadžbi iz kojeg možete odrediti vrijednosti s_1, \dots, s_{n-1} druge derivacije prirodnog kubičnog interpolacijskog splinea u čvorovima x_1, \dots, x_{n-1} . Kolika je vrijednost druge derivacije tog splinea u čvorovima x_0 i x_n ?

Napomena: Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).

1. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

- (a) Definirajte apsolutnu i relativnu pogrešku približnog broja a^* .
- (b) Ako je $a = 83722.61 \pm 0.0005$, koliki je broj signifikantnih znamenki približnog broja a^* ? Kolika je njegova apsolutna i relativna pogreška u %?

Zadatak 2. [25 bodova]

- (a) Neka je $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija i $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*$, $i = 1, 2$. Napišite formulu za određivanje apsolutne pogreške funkcije.
- (b) Neka je $a = 2.537 \pm 0.005$ duljina stranice baze, a $h = 5.246 \pm 0.005$ visina četverostrane piramide. Odredite apsolutnu i relativnu pogrešku kod izračunavanja volumena piramide.
- (c) S kojom točnošću bismo morali imati duljinu stranice baze a^* , odnosno visinu h^* četverostrane piramide da se kod izračunavanja volumena piramide ne premaši dozvoljena apsolutna pogreška ϵ ?

Zadatak 3. [25 bodova] (a) Uz koji uvjet na podatke (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ postoji jedinstveni interpolacijski polinom n -tog stupnja?

- (b) Napišite formulu za ocjenu pogreške interpolacijskog polinoma u točki $\bar{x} \in [x_0, x_n]$.
- (c) Koje metode poznajete za određivanje interpolacijskog polinoma? Odredite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji prolazi točkama $T_0(-2, 29)$, $T_1(0, 5)$, $T_2(1, 2)$, $T_3(3, -16)$.

Zadatak 4. [25 bodova] Napišite linearni interpolacijski spline za podatke iz prethodnog zadatka, nacrtajte njegov graf i napišite izraz za ocjenu pogreške.

Zadatak 5. [30 bodova] (a) Napišite sustav uvjeta koje treba ispunjavati prirodni kubični interpolacijski spline da bi interpolirao neprekidnu funkciju $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ čije vrijednosti y_0, y_1, \dots, y_n poznajemo u $(n+1)$ čvorova $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$?

- (b) Ako poznajemo vrijednosti $s_{i-1}, s_i \in \mathbb{R}$ druge derivacije i -tog kubičnog polinoma $C_i: [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$ u čvorovima x_{i-1}, x_i , napišite izraze za: $C_i''(x), C_i'(x), C_i(x)$.

Napomena: Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).