Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
27. ožujka 2011.

1. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [10 bodova]
(a) *Kako se definiraju signifikantne znamenke aproksimacije* $a^\star$ *realnog broja* $a \in \mathbb{R}$*?*
(b) *Broj* $a^\star = 21.31257$ *zaokružite na dvije, tri ili četiri decimale.*

Zadatak 2. [20 bodova] *Neka je* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *realna funkcija.*
(a) *Napišite formulu za procjenu apsolutne pogreške vrijednosti funkcije* f *u točki* $x^\star = (x_1^\star \ldots, x_2^\star)$ *ako je* $x_i = x_i^\star \pm \Delta x_i^\star$, $i = 1, \ldots, n$.
(b) *Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku pri izračunavanju volumena torusa* $V = 2ar^2\pi^2$*, koji nastaje rotacijom kruga radijusa* r*, čije je središte za* a *udaljeno od centra rotacije ako je* $r = 25.00 \pm 0.05$, $a = 90.00 \pm 0.05$. *Uzmite da je* $\pi = 3.14159$ *bez greške.*
(c) *Kolike smiju biti apsolutne pogreške veličina* r *i* a*, tako da apsolutna pogreška volumena torusa uz primjenu principa jednakih efekata ne bude veća od* $\Delta V^\star = 0.005$*?*

Zadatak 3. [15 bodova] *Zadane su točke* $T_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
(a) *Definirajte problem interpolacije.*
(b) *Odredite interpolacijski polinom za točke* $T_0 = (-1, 0)$, $T_1 = (0, 3)$, $T_2 = (2, 3)$, $T_3 = (3, 12)$.

Zadatak 4. [20 bodova] *Vrijednosti funkcije* $f \in C^{(n+1)}[a, b]$ *u čvorovima* $x_i = i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *su* $y_i = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } i = 2 \\ 0, & \textit{ako je } i \neq 2 \end{cases}$.
(a) *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama* $T_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
(b) *Procijenite pogrešku interpolacijskog polinoma u točki* x_0 *i u točki* $\bar{x} = \frac{1}{2}$ *ako je* $n = 5$ *i* $\max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(6)}(x)| \leq 48$.

Zadatak 5. [15 bodova] *Poznat je interpolacijski polinom* $P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$*, koji prolazi točkama* $T_0 = (-1, 6)$, $T_1 = (1, 0)$, $T_2 = (3, 10)$.
(a) *Koristeći to, odredite interpolacijski polinom* P_3 *koji prolazi točkama* T_0, T_1, T_2 *i* $T_3 = (0, 7)$.
(b) *Uz primjenu Hornerove sheme odredite vrijednost interpolacijskog polinoma* P_3 *u točki* $\hat{x} = 5$.

Zadatak 6. [10 bodova] *Odredite linearni interpolacijski spline koji prolazi točkama* $T_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *zadanih u Zadatku 4.*

Zadatak 7. [20 bodova] *Poznate su vrijednosti funkcije* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *u točkama* $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
(a) *Napišite uvjete na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*
(b) *Za točke* $T_0 = (0, 10), T_1 = (1, 12), T_2 = (2, 10), T_3 = (3, 12)$ *odredite vrijednosti drugih derivacija prirodnog kubičnog interpolacijskog splinea u čvorovima interpolacije.*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
27. ožujka 2011.

1. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [10 bodova]
(a) *Kako se definiraju signifikantne znamenke aproksimacije $a^\star$ realnog broja $a \in \mathbb{R}$?*
(b) *Broj $a^\star = 61.95295$ zaokružite na dvije, tri ili četiri decimale.*

Zadatak 2. [20 bodova] *Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna funkcija.*
(a) *Napišite formulu za procjenu apsolutne pogreške vrijednosti funkcije f u točki $x^\star = (x_1^\star \ldots, x_2^\star)$ ako je $x_i = x_i^\star \pm \Delta x_i^\star$, $i = 1, \ldots, n$.*
(b) *Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku pri izračunavanju oplošja torusa $O = 4ar\pi^2$, koji nastaje rotacijom kruga radijusa r, čije je središte za a udaljeno od centra rotacije ako je $r = 25.00 \pm 0.05$, $a = 90.00 \pm 0.05$. Uzmite da je $\pi = 3.14159$ bez greške.*
(c) *Kolike smiju biti apsolutne pogreške veličina r i a, tako da apsolutna pogreška oplošja torusa uz pretpostavku da pogreška u r na nju utječe dva puta više od pogreške u a ne bude veća od $\Delta O^\star = 0.005$?*

Zadatak 3. [15 bodova] *Zadane su točke $T_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, n$.*
(a) *Definirajte problem interpolacije.*
(b) *Odredite interpolacijski polinom za točke $T_0 = (-1, 1)$, $T_1 = (0, 0)$, $T_2 = (2, -2)$, $T_3 = (3, 9)$.*

Zadatak 4. [20 bodova] *Vrijednosti funkcije $f \in C^{(n+1)}[a, b]$ u čvorovima $x_i = i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, n$ su $y_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = 1 \\ 0, & \text{ako je } i \neq 1 \end{cases}$.*
(a) *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama $T_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, n$.*
(b) *Procijenite pogrešku interpolacijskog polinoma u točki x_0 i u točki $\bar{x} = \frac{1}{2}$ ako je $n = 5$ i $\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(6)}(x)| \leq 48$.*

Zadatak 5. [15 bodova] *Poznat je interpolacijski polinom $P_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$, koji prolazi točkama $T_0 = (-1, 6)$, $T_1 = (1, 0)$, $T_2 = (3, 10)$.*
(a) *Koristeći to, odredite interpolacijski polinom P_3 koji prolazi točkama T_0, T_1, T_2 i $T_3 = (0, 4)$.*
(b) *Uz primjenu Hornerove sheme odredite vrijednost interpolacijskog polinoma P_3 u točki $\hat{x} = 5$.*

Zadatak 6. [10 bodova] *Odredite linearni interpolacijski spline koji prolazi točkama $T_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, n$ zadanih u Zadatku 4.*

Zadatak 7. [20 bodova] *Poznate su vrijednosti funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točkama $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.*
(a) *Napišite uvjete na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*
(b) *Za točke $T_0 = (1, 12), T_1 = (2, 10), T_2 = (3, 12), T_3 = (4, 10)$ odredite vrijednosti drugih derivacija prirodnog kubičnog interpolacijskog splinea u čvorovima interpolacije.*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).