Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
10. svibnja 2013.

1. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Neka je* $a^\star = b_m^\star 10^m + b_{m-1}^\star 10^{m-1} + \cdots$ *aproksimacija broja* $a = b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots$. *Kako se definira broj signifikantnih znamenki aproksimativnog broja* $a^\star$*?*

(b) *Neka je* $a = 0.004572 \pm 0.0005$. *Zaokružite* $a^\star$ *na signifikantne znamenke.*
R: (a) ; (b) ;$a^\star = 0.005$

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Napišite formule za procjenu apsolutnih pogrešaka* $\Delta x_i^\star$ *nezavisnih varijabli funkcije* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *u točki* $x^\star = (x_1^\star, \ldots, x_n^\star)$ *"po principu jednakih efekata", tako da apsolutna pogreška funkcije ne premaši broj* $\Delta f^\star$.

(b) *Izrađujemo pravilnu šesterostranu piramidu duljine brida baze* $a = 3.5$ *i duljine visine bočne stranice (pobočke)* $v = 7.2$. *Odredite najveće dopuštene apsolutne pogreške varijabli* a *i* v *pri izrađivanju te piramide tako da se oplošje izrađene piramide razlikuje najviše za* $\Delta O^* = 0.5$ *od predviđenog (koristite "princip jednakih efekata").*

R: (a) ; (b) $O = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} + 3av_1$, $\Delta a^* = 0.00628353$, $\Delta v^* = 0.0238095$

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Napišite Lagrangeov i Newtonov oblik interpolacijskog polinoma čiji graf prolazi točkama* $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama* $T_0 = (-1, 0)$, $T_1 = (0, 0)$, $T_2 = (3, 2)$, $T_3 = (4, 0)$, $T_4 = (6, 0)$
R: (a) ; (b) $P_4(x) = 2\frac{(x+1)x(x-4)(x-6)}{(3+1)3(3-4)(3-6)} = \frac{1}{18}(x+1)x(x-4)(x-6) = \frac{1}{18}(x^4 - 9x^3 + 14x^2 + 24x)$

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Vrijednosti funkcije* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *poznate su u čvorovima* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Napišite sustav jednadžbi iz kojeg možete odrediti vrijednosti* $s_1, \ldots, s_{n-1}$ *druge derivacije prirodnog kubičnog interpolacijskog splinea u čvorovima* $x_1, \ldots, x_{n-1}$. *Kolika je vrijednost druge derivacije tog splinea u čvorovima* x_0 *i* x_n *?*

(b) *Neka je* $C(x)$ *prirodni kubični interpolacijski spline funkcije* $f(x) = x^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)$ *dobiven interpolacijom u čvorovima* $0, 1, 2, 3$. *Odredite vrijednosti* $C''(x)$ *u čvorovima interpolacije.*
R: (a) ; (b) $s_0 = s_3 = 0$; $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -48 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1 = 0, s_2 = -12$

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Neka je* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna funkcija, takva da vrijedi* $|f'(x)| > 0$, $\forall x \in [a, b]$, *koja na intervalu* $[a, b]$ *ima nultočku* ξ. *Ako je* $\bar{x}$ *neka aproksimacija te nultočke, na* *osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

(b) *Zadovoljava li funkcija* $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 2x$ *prethodno navedene uvjete? Ako zadovoljava, ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije* $\bar{x} = 1.5$ *nultočke funkcije* f *i odredite broj signifikantnih decimala aproksimacije* $\bar{x}$.

(c) *Metodom bisekcije odredite prve tri aproksimacije nultočke funkcije* f *na intervalu* $[1,2]$.

R: (a) $|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}$; *(b)* $|\bar{x} - \xi| \leq \frac{0.375}{1} = 0.375$, $k = 1$; *(c)* $1.5, 1.25, 1.375$

Zadatak 6. [25 bodova]

(a) *Pokažite da funkcija* $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ *is prethodnog zadatka zadovoljava uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode. Kako treba birati početnu aproksimaciju* x_0*?*

(b) *Za izabranu početnu aproksimaciju* x_0 *odredite prvu aproksimaciju* x_1*, te ocijenite apsolutnu pogrešku* $|\xi - x_1|$.

(c) *Pokažite da Newtonova metoda ima kvadratnu brzinu konvergencije. Za funkciju* f *ocijenite omjer* $|\xi - x_{n+1}| : (\xi - x_n)^2$.

R: (a) $x_0 = 2$, $m_1 = 1$, $M_2 = 12$; *(b)* $x_1 = 8/5 = 1.6$, $|\xi - x_1| \leq 24/25 = 0.96$; *(c)* $\frac{M_2}{2m_1} = 12/2 = 6$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 130 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
10. svibnja 2013.

1. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Neka je* $a^\star = b_m^\star 10^m + b_{m-1}^\star 10^{m-1} + \cdots$ *aproksimacija broja* $a = b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots$. *Ako je broj signifikantnih znamenki aproksimativnog broja* $a^\star$: $n > m+1$, *koliko je njegovih decimalnih mjesta signifikantno ?*

(b) *Odredite broj signifikantnih znamenki i signifikantnih decimala broja* $a = 12.3056 \pm 0.005$ *i zaokružite ga na signifikantna decimalna mjesta.*

R: (a) $k = n - m - 1$; (b) $m = 1, n = 4, k = 2,\ a^\star = 12.31$

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Napišite formulu za procjenu apsolutne pogreške vrijednosti funkcije* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *u točki* $x^\star = (x_1^\star, \ldots, x_n^\star)$ *ako je* $x_i = x_i^\star \pm \Delta x_i^\star$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) *Neka je* $a = 3.76 \pm 0.005$ *duljina brida baze i* $v_1 = 7.22 \pm 0.005$ *duljina visine bočne stranice (pobočke) pravilne trostrane piramide. Odredite apsolutnu i relativnu pogrešku pri izračunavanju oplošja te piramide.*

R: (a) ; (b) $O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}av_1$, $\Delta O^* = 0.0986$, $\delta O^* = 0.002106$

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Napišite teorem o pogreški interpolacijskog polinoma.*

(b) *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama* $T_0 = (0,0)$, $T_1 = (1,0)$, $T_2 = (2,2)$, $T_3 = (3,0)$, $T_4 = (4,0)$

R: (a) ; (b) $P_4(x) = \frac{2x(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{2}x(x-1)(x-3)(x-4)$

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Vrijednosti funkcije* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *poznate su u čvorovima* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Napišite sustav uvjeta na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*

(b) *Neka je* $C(x)$ *prirodni kubični interpolacijski spline funkcije* $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ *dobiven interpolacijom u čvorovima* $0, 1, 2, 3$. *Odredite vrijednosti* $C''(x)$ *u čvorovima interpolacije.*

R: (a) ; (b) $s_0 = s_3 = 0$; $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1 = -\frac{16}{5}, s_2 = \frac{4}{5}$

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Iskažite teorem o konvergenciji metode jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe* $f(x) = 0$. *Pokažite da metoda iteracija ima linearnu brzinu konvergencije.*

(b) *Za funkciju* $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$ *definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe* $f(x) = 0$.

(c) Počevši od početne aproksimacije $x_0 = 0$ i koristeći: $e^{-1} \approx 0.4$, odredite prve dvije aproksimacije.
R: (a) ;   (b) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}(3 - e^{-x})$;   (c) $0, 1, 1.3$

Zadatak 6. [25 bodova]

(a) Pokažite da je funkcija $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ iz prethodnog zadatka Lipschitz neprekidna i odredite Lipschitzovu konstantu koristeći $e^{-2} \approx 0.13$.

(b) Pokažite da je za funkciju is prethodnog zadatka Lipschitz derivabilna i odredite Lipschitzovu konstantu funkcije f'.

(c) Ocijenite omjer $|\xi - x_{n+1}| : (\xi - x_n)^2$.
R: (a) $L \approx 1.87$;   (b) $L = 1$;   (c) $m_1 = 1$, $\frac{L}{2m_1} = 0.5$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 130 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).