Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
18. travnja 2014.

1. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Neka je* $a^\star = b_m^\star 10^m + b_{m-1}^\star 10^{m-1} + \cdots$ *aproksimacija broja* $a = b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots$. *Kako se definira broj signifikantnih znamenki aproksimativnog broja* $a^\star$*?*

(b) *Neka je* $a = 123.004567 \pm 0.00005$ *i* $b = 3.4567 \pm 0.0005$. *Odredite broj signifikantnih znamenki brojeva* a *i* b *i zaokružite ih na signifikantne znamenke. Procijenite apsolutnu pogrešku broja* $z = a + b$.
R: (a) ; *(b)* $n(a) = 7,\ a^\star = 123.0046;\ n(b) = 4,\ b^\star = 3.457;\ \Delta z^\star \leq \Delta a^\star + \Delta b^\star = 0.00055$

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Napišite Lagrangeov i Newtonov oblik interpolacijskog polinoma čiji graf prolazi točkama* $T_i = (x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n$.

(b) *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama* $T_0 = (-2, -6)$, $T_1 = (1, 3)$, $T_2 = (3, 49)$, $T_3 = (4, 120)$
R: (a) ; *(b)* $P_3(x) = 2x^3 - 3x + 4$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Vrijednosti funkcije* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *poznate su u čvorovima* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Napišite sustav jednadžbi iz kojeg možete odrediti vrijednosti* $s_1, \ldots, s_{n-1}$ *druge derivacije prirodnog kubičnog interpolacijskog splinea u čvorovima* $x_1, \ldots, x_{n-1}$. *Kolika je vrijednost druge derivacije tog splinea u čvorovima* x_0 *i* x_n *?*

(b) *Neka je* $C(x)$ *prirodni kubični interpolacijski spline funkcije* $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ *dobiven interpolacijom u čvorovima* $0, 1, 2, 3, 4$. *Odredite vrijednosti* $C''(x)$ *u čvorovima interpolacije.*

R: (a) ; *(b)* $s_0 = s_4 = 0;\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1 = -6/7, s_2 = 24/7, s_3 = -6/7.$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) *Neka je* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna funkcija, takva da vrijedi* $|f'(x)| > 0,\ \forall x \in [a, b]$, *koja na intervalu* $[a, b]$ *ima nultočku* ξ. *Ako je* $\bar{x}$ *neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

(b) *Pokažite da funkcija* $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x$ *zadovoljava prethodno navedene uvjete. Ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije* $\bar{x} = 1.5$ *nultočke funkcije* f *i odredite broj signifikantnih decimala aproksimacije* $\bar{x}$.
R: (a) $|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}$*;* *(b)* $|\bar{x} - \xi| \leq .375,\ k = n - m - 1 = 0.$

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Neka je* $f \in C^2[a,b]$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$. *Pokažite da je niz* (x_n) *zadan rekurzivnom formulom* $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$ *konvergentan.*

(b) *Pokažite da funkcija* $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ *is prethodnog zadatka zadovoljava uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode. Kako treba birati početnu aproksimaciju* x_0*?*

(c) *Za izabranu početnu aproksimaciju* x_0 *odredite prvu aproksimaciju* x_1, *te ocijenite apsolutnu pogrešku* $|\xi - x_1|$.
R: (b) $x_0 = 2$, *(c)* $m_1 = 1$, $M_2 = 12$; $x_1 = 8/5 = 1.6$, $|\xi - x_1| \le (12/2)(x_1 - x_0)^2 = .96$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**

18. travnja 2014.

1. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Napišite formulu za procjenu apsolutne pogreške vrijednosti funkcije* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *u točki* $x^\star = (x_1^\star, \dots, x_n^\star)$ *ako je* $x_i = x_i^\star \pm \Delta x_i^\star$, $i = 1, \dots, n$.

(b) *Neka je* $a = 3.76 \pm 0.005$ *duljina brida baze, a* $h = 7.22 \pm 0.005$ *duljina visine pravilne četverostrane piramide. Odredite oplošje te piramide. Procijenite apsolutne pogreške kod izračunavanja površine baze* B*, površine pobočne stranice* P *i oplošja piramide* O.

R: (a) ; (b) $v^\star = 7.460750632, \Delta v^\star = 0.005468618643, O = a^2 + 2av \approx 70.242445$, $\Delta B^* \leq 2|a^\star|\Delta a^\star \approx 0.0376$, $\Delta P^* \leq |a^\star/2|\Delta v^\star + |v^\star/2|\Delta a^\star \approx 0.02893288$, $\Delta O^* \approx 2(a^\star + v^\star)\Delta a^\star + 2a^\star \Delta v^\star \approx 0.1533315$

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Napišite teorem o pogreški interpolacijskog polinoma.*

(b) *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama* $T_0 = (-1, 9)$, $T_1 = (1, 7)$, $T_2 = (3, 13)$, $T_3 = (5, -21)$

R: (a) ; (b) $P_3(x) = -x^3 + 4x^2 + 4$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Vrijednosti funkcije* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *poznate su u čvorovima* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Napišite sustav uvjeta na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*

(b) *Neka je* $C(x)$ *prirodni kubični interpolacijski spline odredjen točkama* T_i, $i = 0, \dots, 3$ *iz prethodnog zadatka. Odredite* $I_1 = \int\limits_{-1}^{1} (C''(x))^2 dx$.

R: (a) ; (b) $s_0 = s_3 = 0$; $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -120 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1 = 36/5, s_2 = -84/5$, $C_1''(x) = \frac{18}{5}(x + 1)$, $I_1 = \frac{18^2}{5^2} \int\limits_{-1}^{1} (x + 1)^2 = \frac{864}{25} = 34.56$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) *Iskažite teorem o konvergenciji metode jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe* $f(x) = 0$. *Pokažite da metoda iteracija ima linearnu brzinu konvergencije.*

(b) *Za funkciju* $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + 2x - 3$ *definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe* $f(x) = 0$.

R: (a) ; (b) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}(3 - \ln x)$

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) Neka je $f \in C^2[a,b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$. Pokažite da je niz (x_n) zadan rekurzivnom formulom $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$ konvergentan.

(b) Pokažite da funkcija $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ iz prethodnog zadatka zadovoljava uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode. Kako treba birati početnu aproksimaciju x_0?

(c) Za izabranu početnu aproksimaciju x_0 odredite prvu aproksimaciju x_1, te ocijenite apsolutnu pogrešku $|\xi - x_1|$.
R: (b) $x_0 = 1$, (c) $m_1 = 2.5$, $M_2 = 1$; $\quad x_1 = 4/3, \quad |\xi - x_1| \leq (1/5)(x_1 - x_0)^2 = 0.0222222$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).