Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
29. travnja 2009.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [20 bodova]

a) *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, takva da vrijedi $|f'(x)| > 0$, $\forall x \in [a,b]$, koja na intervalu $[a,b]$ ima nultočku ξ. Ako je $\bar{x}$ neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

b) *Zadovoljava li funkcija $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - 4$ prethodno navedene uvjete? Ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije $\bar{x} = 1.5$, u kojoj funkcija f postize vrijednost 0.875.*

c) *Metodom bisekcije odredite prve dvije aproksimacije nultočke funkcije f na intervalu $[1,3]$.*

R: a-b) $|\bar{x} - \xi| \le \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} \approx 0.21875$, *gdje je* $m_1 = f'(1) \approx 4$. *c)* $2, 1.5$

Zadatak 2 [30 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$.*

b) *Za funkciju f iz prethodnog zadatka definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe $f(x) = 0$.*

c) *Koliko bi iteracija trebalo napraviti da bi se postigla točnost $\varepsilon = 0.000005$?*

R: b) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, *gdje je* $\varphi(x) = \sqrt[3]{4-x}$, *c)* $n > 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln 3}$, *tj.* $n \ge 13$

Zadatak 3 [30 bodova]

a) *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ padajuća konveksna funkcija, koja na intervalu $[a,b]$ ima jedinstvenu nultočku ξ. Ako je $x_0 < \xi$, pokažite da je niz (x_n) dobiven Newtonovom metodom tangenti rastuć.*

b) *Ispunjava li funkcija f iz* Zadatka 1 *na intervalu $[1,3]$ uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode tangenti? Ako ispunjava, kako treba izabrati početnu aproksimaciju x_0?*

R: b) $f(x_0) f''(x_0) > 0$, *npr.* $x_0 = 3$

Zadatak 4 [20 bodova]

Metodom bisekcije odredite prve dvije aproksimacije funkcije f iz Zadatka 1*, a onda metodom sekanti odredite sljedeće dvije aproksimacije.*

R: $x_1 = 2, x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.41463, x_4 = 1.38133$

Zadatak 5 [20 bodova]

a) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava dvije nelinearne jednadžbe s dvije nepoznanice.*

a) *Ima li niže navedeni sustav rjesenje? Ako ima, izaberite početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odredite sljedeću aproksimaciju.*

$$\begin{aligned} -2x + y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

R: za $x_0 = (2,1)$, $x_1 = (1.33333, 1.83333)$

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [20 bodova]

a) *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna funkcija, takva da vrijedi* $|f'(x)| > 0, \forall x \in [a, b]$, *koja na intervalu* $[a, b]$ *ima nultočku* ξ. *Ako je* $\bar{x}$ *neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

b) *Zadovoljava li funkcija* $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x - 15$ *prethodno navedene uvjete? Ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije* $\bar{x} = 2$, *u kojoj funkcija* f *postiže vrijednost* -3.

c) *Metodom bisekcije odredite prve dvije aproksimacije nultočke funkcije* f *na intervalu* $[1, 3]$.

R: a-b) $|\bar{x} - \xi| \le \frac{|f(\bar{x})|}{m_1} \approx 0.6$, *gdje je* $m_1 = f'(1) = 5$. *c)* $2, 2.5$

Zadatak 2 [30 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe* $f(x) = 0$.

b) *Za funkciju* f *iz prethodnog zadatka definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe* $f(x) = 0$.

c) *Koliko bi iteracija trebalo napraviti da bi se postigla točnost* $\varepsilon = 0.000005$?

R: b) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, *gdje je* $\varphi(x) = \sqrt[3]{15 - 2x}$, *c)* , $n \ge 7$

Zadatak 3 [30 bodova]

a) *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *padajuća konveksna funkcija, koja na intervalu* $[a, b]$ *ima jedinstvenu nultočku* ξ. *Ako je* $x_0 < \xi$, *pokažite da je niz* (x_n) *dobiven Newtonovom metodom tangenti rastuć.*

b) *Ispunjava li funkcija* f *iz* Zadatka 1 *na intervalu* $[1, 3]$ *uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode tangenti? Ako ispunjava, kako treba izabrati početnu aproksimaciju* x_0?

R: b) $f(x_0)f''(x_0) > 0$, *npr.* $x_0 = 3$

Zadatak 4 [20 bodova]

Metodom bisekcije odredite prve dvije aproksimacije funkcije f *iz* Zadatka 1, *a onda metodom sekanti odredite sljedeće dvije aproksimacije.*

R: $x_1 = 2, x_2 = 2.5$, $x_3 = 2.17391, x_4 = 2.19447$

Zadatak 5 [20 bodova]

a) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava dvije nelinearne jednadžbe s dvije nepoznanice.*

a) *Ima li niže navedeni sustav rješenje? Ako ima, izaberite početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odredite sljedeću aproksimaciju.*

$$\begin{aligned} -4x + y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

R: za $x_0 = (1, 2)$, $x_1 = (0.83333, 1.83333)$

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).