Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
17. svibnja 2012.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Uz koje dodatne uvjete na funkciju $f \in C^2[a,b]$ Newtonova metoda tangenti konvergira prema jedinstvenoj nultočki $\xi \in [a,b]$?*

(b) *Provjerite zadovoljava li funkcija $f\colon [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{2}$ uvjete o konvergenciji Newtonove metode i ako zadovoljava, izaberite početnu i odredite sljedeću aproksimaciju.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Što znači da je funkcija $f\colon \mathcal{I} = [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna s konstantom $L > 0$?*

(b) *Napišite ocjenu pogreške aproksimacije Lipschitz-neprekidne funkcije u točki $x \in \mathcal{I}$ pomoću linearne funkcije, čiji je graf tangenta na funkciju f u točki $x_0 \in \mathcal{I}$.*

(c) *Skicirajte graf funkcije $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ -(x-2)^3, & 1 < x \le 3 \end{cases}$ i odredite njenu Lipschitzovu konstantu L.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Koji je geometrijski smisao rješenja sljedećeg sustava nelinearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &\equiv x_2 - x_1^2 = 0 \\ g(x_1,x_2) &\equiv x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

(b) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi.*
(c) *Uz početnu aproksimaciju $x^{(0)} = (1,1)$, odredite sljedeće dvije aproksimacije Newtonove metode za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi. Koja točnost je postignuta?*

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Kako se definira Grammova matrica linearno nezavisnih funkcija $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$?*
(b) *Odredite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1/2 \\ 0, & x > 1/2 \end{cases}$ na potprostoru svih polinoma stupnja ≤ 1 (težinska funkcija neka bude $\omega \equiv 1$)*

Zadatak 5. [25 bodova]

a) *Napišite Fourierov polinom i Fourierove koeficijente funkcije $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$. Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija f da bi odgovarajući Fourireov red bio konvergentan ?*

b) *Skicirajte graf funkcije $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+1), & x \in [-1,0] \\ x(x-1), & x \in [0,1] \end{cases}$$

Kako od funkcije f možete sagraditi funkciju $\tilde{f}$ definiranu na intervalu $[-\pi,\pi]$?

Napomena: Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
17. svibnja 2012.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Uz koje dodatne uvjete na funkciju $f \in C^2[a,b]$ Newtonova metoda tangenti konvergira prema jedinstvenoj nultočki $\xi \in [a,b]$?*

(b) *Provjerite zadovoljava li funkcija $f\colon [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} - \frac{x}{2}$ uvjete o konvergenciji Newtonove metode i ako zadovoljava, izaberite početnu i odredite sljedeću aproksimaciju.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Što znači da je funkcija $f\colon \mathcal{I} = [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna s konstantom $L > 0$?*

(b) *Napišite ocjenu pogreške aproksimacije Lipschitz-neprekidne funkcije u točki $x \in \mathcal{I}$ pomoću linearne funkcije, čiji je graf tangenta na funkciju f u točki $x_0 \in \mathcal{I}$.*

(c) *Skicirajte graf funkcije $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2, \\ 4-(x-2)^3, & 2 < x \le 3 \end{cases}$ i odredite njenu Lipschitzovu konstantu L.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Koji je geometrijski smisao rješenja sljedećeg sustava nelinearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &\equiv x_2 - 2x_1^2 = 0 \\ g(x_1,x_2) &\equiv x_1^2 + 4x_2^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

(b) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi.*
(c) *Uz početnu aproksimaciju $x^{(0)} = (1,1)$, odredite sljedeće dvije aproksimacije Newtonove metode za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi. Koja točnost je postignuta?*

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Kako se definira Grammova matrica linearno nezavisnih funkcija $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$?*
(b) *Odredite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1/2 \\ 0, & x > 1/2 \end{cases}$ na potprostoru svih polinoma stupnja ≤ 1 (težinska funkcija neka bude $\omega \equiv 1$)*

Zadatak 5. [25 bodova]
a) *Napišite definiciju i svojstva Čebiševljevih polinoma. Napišite prvih pet Čebiševljevih polinoma.*
b) *Skicirajte graf funkcije $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2), & x \in [-2,0] \\ -x(x-2), & x \in \langle 0,2] \end{cases}$$

Kako od funkcije f možete sagraditi funkciju $\tilde{f}$ definiranu na intervalu $[-\pi,\pi]$?

Napomena: Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama.