Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**

7. lipnja 2013.

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Grafički ispitajte skup svih rješenja sustava nelinearnih jednadžbi*
$f_1(x_1,x_2) \equiv x_1^2 + 9x_2^2 = 9, \qquad f_2(x_1,x_2) \equiv x_2 - x_1^2 + 2x_1 = 1.$

(b) *Napišite Jacobijan sustava.*
(c) *Izaberite povoljnu početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odredite prve dvije aproksimacije rješenja iz prvog kvadranta* $\mathbb{R}^2_{++} = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Što je najbolja aproksimacija funkcije* $f \in C[a,b]$ *na potprostoru* $\mathcal{P} \subset C[a,b]$ *ako je na* $C[a,b]$ *definirana norma* $\|\cdot\|$ *?*

(b) *Odredite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2|x|$ *na potprostoru* $L(1,x^2)$ *uz težinsku funkciju* $w(x) = 1$.
(c) *Skicirajte graf funkcije i aproksimacije i napišite izraz za pogrešku aproksimacije.*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Pokažite da vrijedi:* $\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cos qx dx = 0$ *za sve* $p,q \in \mathbb{N}$.

(b) *Odredite Fourierov polinom drugog stupnja za funkciju* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - |x|$.
(c) *Skicirajte graf funkcije i Fourierovog polinoma i napišite izraz za pogrešku aproksimacije.*

Zadatak 4. [20 bodova]

Ortogonalizirajte sustav funkcija $\{1, x, x^2\}$ *na intervalu* $[-3,3]$ *uz težinsku funkciju* $w(x) = 1$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi i koja svojstva imaju ?*
(b) *Odredite četvrti* T_4 *Čebiševljev polinom.*

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Napišite barem jedan primjer funkcije koja nema primitivnu funkciju.*
(b) *Neka je* $f \in C^2[a,b]$. *Napišite približnu vrijednost integrala dobivenu trapeznom formulom i pripadnu pogrešku aproksimacije.*
(c) *Izračunajte integral* $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1)dx$. *Primjenom generalizirane trapezne formule izračunajte približnu vrijednost integrala tako da interval* $[1,3]$ *podijelite na četiri jednaka podintervala. Na koliko decimala je točan rezultat ?*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
7. lipnja 2013.

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) Grafički ispitajte skup svih rješenja sustava nelinearnih jednadžbi
$f_1(x_1, x_2) \equiv 4x_1^2 + x_2^2 = 4, \qquad f_2(x_1, x_2) \equiv x_1 - x_2^2 = 0.$

(b) Napišite Jacobijan sustava.
(c) Izaberite povoljnu početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odredite prve dvije aproksimacije rješenja iz prvog kvadranta $\mathbb{R}^2_{++} = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) Napišite Gramovu matricu za bazne funkcije $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. *Uz koji uvjet je Gramova matrica nesingularna ?*

(b) Odredite najbolju L_2 *aproksimaciju funkcije* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - |x|$ *na potprostoru* $L(x, x^2)$ *uz težinsku funkciju* $w(x) = 1$.
(c) Skicirajte graf funkcije i aproksimacije i napišite izraz za pogrešku aproksimacije.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) Pokažite da vrijedi: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx dx = \pi\delta_{pq}$ *za sve* $p, q \in \mathbb{N}$ *gdje je* $\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$.

(b) Odredite Fourierov polinom drugog stupnja za funkciju $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + |x|$.
(c) Skicirajte graf funkcije i Fourierovog polinoma i napišite izraz za pogrešku aproksimacije.

Zadatak 4. [20 bodova]

Ortogonalizirajte sustav funkcija $\{1, x, x^2\}$ *na intervalu* $[-6, 6]$ *uz težinsku funkciju* $w(x) = 1$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi i koja svojstva imaju ?
(b) Odredite treći T_3 *Čebiševljev polinom.*

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) Napišite barem jedan primjer funkcije koja nema primitivnu funkciju.
(b) Neka je $f \in C^4[a, b]$. *Napišite približnu vrijednost integrala dobivenu Simpsonovom formulom i pripadnu pogrešku aproksimacije.*
(c) Izračunajte približnu vrijednost integrala $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1)dx$ *primjenom generalizirane Simpsonove formule tako da interval* $[1, 3]$ *podijelite na četiri jednaka podintervala. Na koliko decimala je točan rezultat ?*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).