Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**

30. svibnja 2014.

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Grafički ispitajte skup svih rješenja sustava nelinearnih jednadžbi*

$$f_1(x_1,x_2) \equiv x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \qquad f_2(x_1,x_2) \equiv x_1^2 - x_2^2 - \alpha = 0,$$

u ovisnosti o vrijednosti parametra: $0 < \alpha < 2$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$.

(b) *Napišite Jacobijan funkcija* f_1, f_2. *Ako je* $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ *početna aproksimacija, kako se po Newtonovoj metodi dolazi do sljedeće aproksimacije* $x^{(1)}$ *?*

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Odredite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x + 2$ *na potprostoru* $L[\varphi_0, \varphi_1]$, $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x^2$ *uz težinsku funkciju* $w(x) = 1$.

(b) *Napišite Grammovu matricu za bazne funkcije* $\varphi_i = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *na intervalu* $[-1,1]$ *uz* $w(x) = 1$.

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Napišite Fourierove koeficijente funkcije* $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$.

(b) *Za funkciju* $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, *odredite Fourierove koeficijente i Fourierov polinom stupnja* $n \geq 1$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Što znači da su funkcije* $f, g \in C[a,b]$ *ortogonalne?*

(b) *Ortogonalizirajte sustav funkcija* $\{1, x, x^2\}$ *na intervalu [-1, 1] uz težinsku funkciju* $w(x) = 1$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Navedite barem jednu funkciju koja nema primitivnu funkciju.*

(b) *Na koliko dijelova treba podijeliti interval* $[1,3]$ *da bi integral* $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$ *izračunali na 4 decimale točno uz primjenu Trapezne formule ?*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**

30. svibnja 2014.

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Za dani skup točaka* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \colon i = 1, \dots, m\}$ *treba odrediti točku* $c = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ *tako da suma kvadrata euklidskih udaljenosti od svih točaka* a^i *do točke* c *bude minimalna. Napišite funkciju cilja, njezin gradijent, Hessijan i stacionarne točke.*

(b) *Za niže zadani skup* $\mathcal{A}$ *odredite točku* c.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5	−5	−5	−1	7	8	−3	7	1	1
y_i	6	−7	7	0	9	6	−3	−9	−5	6

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Odredite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 1$ *na potprostoru* $L[\varphi_0, \varphi_1]$, $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$, *uz težinsku funkciju* $w(x) = 1$.

(b) *Napišite Grammovu matricu za bazne funkcije* $\varphi_i = x^i$, $i = 0, 1, \dots, n$ *na intervalu* $[0, 1]$ *uz* $w(x) = 1$.

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Napišite Fourierov polinom* n*-tog stupnja za funkciju* $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

(b) *Za funkciju* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, *odredite Fourierove koeficijente i Fourierov polinom stupnja* $n \geq 1$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Ako je* $\hat{\mathcal{P}}$ *skup svih normiranih polinoma stupnja* $\leq n$, *što je* $\operatorname*{argmin}_{P \in \hat{\mathcal{P}}_n} \|P\|_\infty$, *a što* $\min_{P \in \hat{\mathcal{P}}_n} \|P\|_\infty$ *?*

(b) *Riješite optimizacijski problem* $\operatorname*{argmin}_{P \in \mathcal{P}_2} \|x^3 + 1 - P\|_\infty$, *gdje je* $\mathcal{P}_2$ *skup svih polinoma stupnja* ≤ 2.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Napišite Simpsonovu formulu.*

(b) *Na koliko dijelova treba podijeliti interval* $[1, 3]$ *da bi integral* $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ *izračunali na 4 decimale točno uz primjenu Simpsonove formule ?*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).