A

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
8. lipnja 2010.

3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

a) *Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi? Napišite prva četiri* T_0, T_1, T_2, T_3 *Čebiševljeva polinoma.*

b) *Pokažite da Čebiševljevi polinomi čine ortogonalni sustav polinoma na intervalu* $[-1,1]$ *s težinskom funkcijom* $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *Koja još svojstva Čebiševljevih polinoma poznajete?*

Zadatak 2. [20 bodova]

a) *Na prostoru* $\mathcal{P}_1$ *polinoma stupnja* ≤ 1 *odredite najbolju* L_∞ *aproksimaciju* p^* *funkcije* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.

b) *Izračunajte* $\Delta = \|f - p^*\|_\infty$. *U kojim točkama iz intervala* $[-1,1]$ *apsolutna pogreška aproksimacije* $e(x) = |f(x) - p^*(x)|$ *postiže vrijednost* Δ *?*

Zadatak 3. [20 bodova]

a) *Kako se definira najbolja* l_p, $p \geq 1$ *aproksimacija podataka mjerenja* $y_1, \ldots, y_m$ *?*

b) *Odredite najbolje* l_1, l_2, l_∞ *aproksimacije mjerenja* $4, 3.5, 5, 4.5, 4.5, 4$ *?*

Zadatak 4. [20 bodova]

Primjenom Newtonove metode treba odrediti minimum funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$. *Počevši od* $x_0 = 1$, *odredite sljedećih pet iteracija.*

Zadatak 5. [20 bodova]

a) *Napišite algoritam koji će uz primjenu Newtonove metode tražiti stacionarnu točku dvostruko neprekidno derivabilne funkcije* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *?*

b) *Zadani su podaci* $(x_i, y_i)\, i = 1, \ldots, m$ *i model funkcija* $x \mapsto f(x; a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $n \ll m$. *Definirajte odgovarajući problem najmanjih kvadrata.*

c) *Napišite algoritam koji će uz primjenu Gauss-Newtonove metode tražiti rješenje nelinearnog problema najmanjih kvadrata.*

Zadatak 6. [20 bodova]

a) *Na koliko dijelova treba podijeliti intervala* $[0,1]$ *da bi se s točnošću na dvije decimale odredila aproksimacija integrala* $\int_0^1 (x^6 - x)dx$ *uz primjenu generalizirane Simpsonove formule?*

b) *Napišite trapezno pravilo za traženje aproksimacije integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *i ocjenu pogreške.*

Napomena: Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 125 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u prethodnim zadaćama).

B

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
8. lipnja 2010.

3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

a) *Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi? Napišite prva četiri* T_0, T_1, T_2, T_3 *Čebiševljeva polinoma.*

b) *Pokažite da Čebiševljevi polinomi čine ortogonalni sustav polinoma na intervalu* $[-1,1]$ *s težinskom funkcijom* $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *Koja još svojstva Čebiševljevih polinoma poznajete?*

Zadatak 2. [20 bodova]

a) *Na prostoru* $\mathcal{P}_1$ *polinoma stupnja* ≤ 1 *odredite najbolju* L_∞ *aproksimaciju* p^* *funkcije* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$.

b) *Izračunajte* $\Delta = \|f - p^*\|_\infty$. *U kojim točkama iz intervala* $[-1,1]$ *apsolutna pogreška aproksimacije* $e(x) = |f(x) - p^*(x)|$ *postiže vrijednost* Δ *?*

Zadatak 3. [20 bodova]

a) *Kako se definira najbolja* l_p, $p \geq 1$ *aproksimacija podataka mjerenja* $y_1, \ldots, y_m$ *?*

b) *Odredite najbolje* l_1, l_2, l_∞ *aproksimacije mjerenja* $2, 1.5, 3, 2.5, 2.5, 2$ *?*

Zadatak 4. [20 bodova]

Primjenom Newtonove metode treba odrediti minimum funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$. *Počevši od* $x_0 = 1$, *odredite sljedećih pet iteracija.*

Zadatak 5. [20 bodova]

a) *Napišite algoritam koji će uz primjenu Newtonove metode tražiti stacionarnu točku dvostruko neprekidno derivabilne funkcije* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *?*

b) *Zadani su podaci* (x_i, y_i) $i = 1, \ldots, m$ *i model funkcija* $x \mapsto f(x; a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $n \ll m$. *Definirajte odgovarajući problem najmanjih kvadrata.*

c) *Napišite algoritam koji će uz primjenu Gauss-Newtonove metode tražiti rješenje nelinearnog problema najmanjih kvadrata.*

Zadatak 6. [20 bodova]

a) *Na koliko dijelova treba podijeliti intervala* $[0,1]$ *da bi se s točnošću na dvije decimale odredila aproksimacija integrala* $\int_0^1 (x^6 - x)dx$ *uz primjenu generalizirane trapezne formule?*

b) *Napišite Simpsonovo pravilo za traženje aproksimacije integrala* $\int_a^b f(x)dx$ *i ocjenu pogreške.*

Napomena: Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 125 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u prethodnim zadaćama).