Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**

17. svibnja 2011.

3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

a) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi.*

b) *Grafički provjerite da sljedeći sustav ima dva rješenja.*

$$\begin{aligned} x + 4y - 2 &= 0 \\ 9x^2 + 4y^2 - 36 &= 0 \end{aligned}$$

Provjerite je li $(2, 0)$ jedno rješenje. U cilju pronalaženja drugog rješenja, izaberite početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odedite sljedeće dvije aproksimacije.

Zadatak 2. [20 bodova]

a) *Napišite Fourierov polinom i Fourierove koeficijente funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija f da bi odgovarajući Fourireov red bio konvergentan ?*

b) *Zadana je funkcija $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+1), & x \in [-1, 0] \\ x(x-1), & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Od funkcije f konstruirajte funkciju $\tilde{f}$ definiranu na intervalu $[-\pi, \pi]$ i odredite njezin Fourierov polinom prvog stupnja.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Kako se definira Grammova matrica linearno nezavisnih funkcija $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C[a, b]$?*

(b) *Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1/6 \\ 1, & x > 1/6 \end{cases}$ na potprostoru svih polinoma stupnja ≤ 1 (težinska funkcija neka bude $\omega \equiv 1$)*

Zadatak 4. [20 bodova]

a) *Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi ? Napišite prva četiri T_0, T_1, T_2, T_3 Čebiševljeva polinoma.*

b) *Pokažite da Čebiševljevi polinomi čine ortogonalni sustav polinoma na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Koja još svojstva Čebiševljevih polinoma poznajete ?*

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Na prostoru $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja ≤ 1 odredite najbolju L_∞ aproksimaciju p^* funkcije $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$.*

(b) *Izračunajte $\Delta = \|f - p^*\|_\infty$. U kojim točkama iz intervala $[-1, 1]$ apsolutna pogreška aproksimacije $e(x) = |f(x) - p^*(x)|$ postiže vrijednost Δ ?*

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Neka je $r(x) = [3 - x, 1 - 2x, -x]^T$. Nacrtajte graf funkcije $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $F(x) = \|r(x)\|_\infty$ i potražite njezin globalni minimum.*

Napomena: Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
17. svibnja 2011.

3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

a) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi.*

b) *Grafički provjerite da sljedeći sustav ima dva rješenja.*

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 4 &= 0 \\ x^2 + 4y^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Provjerite je li $(0, 2)$ *jedno rješenje. U cilju pronalaženja drugog rješenja, izaberite početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odedite sljedeće dvije aproksimacije.*

Zadatak 2. [20 bodova]

a) *Napišite Fourierov polinom i Fourierove koeficijente funkcije* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$*. Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija* f *da bi odgovarajući Fourireov red bio konvergentan ?*

b) *Zadana je funkcija* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1), & x \in [-1, 0] \\ -x(x-1), & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Od funkcije f *konstruirajte funkciju* $\tilde{f}$ *definiranu na intervalu* $[-\pi, \pi]$ *i odredite njezin Fourierov polinom prvog stupnja.*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Kako se definira Grammova matrica linearno nezavisnih funkcija* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C[a, b]$ *?*

(b) *Pronađite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1/4 \\ 1, & x > 1/4 \end{cases}$ *na potprostoru svih polinoma stupnja* ≤ 1 *(težinska funkcija neka bude* $\omega \equiv 1$*)*

Zadatak 4. [20 bodova]

a) *Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi ? Napišite prva četiri* T_0, T_1, T_2, T_3 *Čebiševljeva polinoma.*

b) *Pokažite da Čebiševljevi polinomi čine ortogonalni sustav polinoma na intervalu* $[-1, 1]$ *s težinskom funkcijom* $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*. Koja još svojstva Čebiševljevih polinoma poznajete ?*

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Na prostoru* $\mathcal{P}_1$ *polinoma stupnja* ≤ 1 *odredite najbolju* L_∞ *aproksimaciju* p^* *funkcije* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.

(b) *Izračunajte* $\Delta = \|f - p^*\|_\infty$*. U kojim točkama iz intervala* $[-1, 1]$ *apsolutna pogreška aproksimacije* $e(x) = |f(x) - p^*(x)|$ *postiže vrijednost* Δ *?*

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Neka je* $r(x) = [3 - x, 2 - 2x, -x]^T$*. Nacrtajte graf funkcije* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $F(x) = \|r(x)\|_\infty$ *i potražite njezin globalni minimum.*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).