Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
14. lipnja 2012.

3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Odredite optimalni parametar* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *model-funkcije* $f(x;\alpha) = \alpha x$ *u smislu najmanjih kvadrata. Kolika je vrijednost optimalnog parametra* $\alpha^\star$ *za podatke* $\{(-1,2),(1,4),(2,4),(4,5)\}$*? Nacrtajte pripadnu sliku.*
(b) *Napišite odgovarajuću minimizirajuću funkciju ako bi parametar* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *trebalo odrediti u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja. Ako se zna da graf optimalne funkcije* $f(x;\alpha^\star) = \alpha^\star x$ *prolazi barem jednom točkom podataka, odredite optimalnu vrijednost* $\alpha^\star$ *u ovom slučaju. Nacrtajte pripadnu sliku.*

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Zadani su podaci* (x_i, y_i), $i = 1,\ldots,m$. *Postavite opći problem najmanjih kvadrata. Napišite gradijent i Hessijan funkcije* $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i^2(a)$, *gdje je* $r_i(a) = y_i - f(x_i;a)$, $x \mapsto f(x;a)$ *neka model funkcija dvostruko neprekidno diferencijabilna po vektoru parametara* a.
(b) *Koristeći spomenute formule, napišite Jacobijan* J *u slučaju model funkcije* $f(x;\alpha,\beta) = \beta + x^\alpha$. *Za koje vrijednosti od* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *će matrica* $J^T J$ *biti singularna?*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Postiže li funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ *globalni minimum?*
(b) *U kojoj točki ova funkcija postiže lokalni minimum?*
(c) *Za početnu aproksimaciju* $x_0 = -3$ *odredite prve dvije iteracije Newtonove metode minimizacije.*

Zadatak 4. [20 bodova] *Neka je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija.*
(a) *Odredite* $\int_a^b P_1(x)dx$, *gdje je* $P_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
(b) *Ocijenite* $\Delta = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_1(x)dx\right|$.

Zadatak 5. [20 bodova] *Izračunajte približnu vrijednost integrala* $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}(x-1)^2 - 1)dx$ *primjenom generalizirane Simpsonove formule tako da pogreška bude manja od* $\epsilon = 0.00005$. *Na koliko podintervala treba podijeliti interval* $[1,3]$*?*

Napomena: Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 110 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
14. lipnja 2012.

3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) Odredite optimalni parametar $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ model-funkcije $f(x;\alpha) = x+\alpha$ u smislu najmanjih kvadrata. Kolika je vrijednost optimalnog parametra $\alpha^\star$ za podatke $\{(-1,2),(1,4),(2,4),(4,5)\}$? Nacrtajte pripadnu sliku.
(b) Napišite odgovarajuću minimizirajuću funkciju ako bi parametar $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ trebalo odrediti u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja. Ako se zna da graf optimalne funkcije $f(x;\alpha^\star) = x + \alpha^\star$ prolazi barem jednom točkom podataka, odredite optimalnu vrijednost $\alpha^\star$ u ovom slučaju. Nacrtajte pripadnu sliku.

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) Zadani su podaci (x_i, y_i), $i = 1,\dots,m$. Postavite opći problem najmanjih kvadrata. Napišite gradijent i Hessijan funkcije $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i^2(a)$, gdje je $r_i(a) = y_i - f(x_i;a)$, $x \mapsto f(x;a)$ neka model funkcija dvostruko neprekidno diferencijabilna po vektoru parametara a.
(b) Koristeći spomenute formule, napišite Jacobijan J u slučaju model funkcije $f(x;\alpha,\beta) = \beta x^\alpha$. Za koje vrijednosti od $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ će matrica $J^T J$ biti singularna?

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) Postiže li funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ globalni minimum?
(b) U kojoj točki ova funkcija postiže lokalni minimum?
(c) Za početnu aproksimaciju $x_0 = 1$ odredite prve dvije iteracije Newtonove metode minimizacije.

Zadatak 4. [20 bodova] *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.*
(a) Odredite $\int_a^b P_1(x)dx$, gdje je $P_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
(b) Ocijenite $\Delta = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_1(x)dx\right|$.

Zadatak 5. [20 bodova] *Izračunajte približnu vrijednost integrala $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}(x-1)^2+1)dx$ primjenom generalizirane Simpsonove formule tako da interval $[1,3]$ podijelite na četiri jednaka podintervala. Na koliko decimala je točan rezultat?*

Napomena: Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 110 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).