Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
18. lipnja 2009.

4. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [25 bodova]

Zadana je model-funkcija $f(x;a,b) = e^{ax} + e^{-bx}$.
(a) *Postavite problem najmanjih kvadrata za ovu model-funkcija i podatke* $(x_i, y_i)\, i = 1,\dots,m$. (b) *Ako je* $x_i = i$, $i = 1,\dots,m$, *napišite Jacobijan* J *i aproksimaciju Hessijana* $J^T J$ *u točki* $(1,1)$. *Ispitajte definitnost matrice* $J^T J$ *u točki* $(1,1)$.

R: b) $J_{i1} = x_i e^{ax_i}$, $J_{i2} = -x_i e^{-bx_i}$, $i = 1,\dots,m$. $J[1,1]$ *je pozitivno definitna.*

Zadatak 2 [23 boda] *Napišite algoritme za Gauss-Newtonovu metodu bez regulacije duljine koraka za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata. Poznajete li još neku metodu za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata ?*

[Vidi prilog]

Zadatak 3 [22 boda] *Neka je* $f \in C[a,b]$. *Izraz* $I^* = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$ *daje aproksimaciju integrala* $I = \int_a^b f(x)\,dx$ *uz primjenu trapezne formule, a* $I_n^* = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left(f(a + \frac{b-a}{n}) + \cdots + f(a + (n-1)\frac{b-a}{n})\right) + f(b)\right]$ *aproksimaciju integrala* $I = \int_a^b f(x)\,dx$ *uz primjenu generalizirane trapezne formule. Kako se može izraziti pogreška aproksimacije* $I - I^*$, *a kako* $I - I_n^*$ *?*

[$I - I^* = -\frac{b-a}{12} f"(c)$, *gdje je* $c \in (a,b)$, $I - I_n^* = -\frac{(b-1)^3}{12n^2} f"(d)$, *gdje je* $d \in (a,b)$*]*

Zadatak 4 [25 bodova]
(a) *Na koliko podintervala treba podijeliti interval* $[0,1]$ *tako da primjenom trapezne formule dobijemo približnu vrijednost integrala* $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx$, *čija apsolutna pogreška neće premašiti broj* $\varepsilon = 0.005$ *?*
(b) *Primjenom generalizirane trapezne formule odredite približnu vrijednost ovog integrala na jednu decimalu točno.*
(c) *Kolika je prava vrijednost integrala* I *?*

a) $M_2 = 1, \quad n = 5$, *b)* $n = 2$, $I^* = 1.4$ *c)* $I = \sqrt{3} - 1/3$

Zadatak 5 [25 bodova]
(a) *Primjenom Newton-Cotesovih formula izvedite Simpsonovo pravilo za izračunavanje vrijednosti integrala* $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.
(b) *Na koliko podintervala treba podijeliti interval* $[0,1]$ *tako da primjenom generalizirane Simpsonove formule dobijemo približnu vrijednost integrala* $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx$, *čija apsolutna pogreška neće premašiti broj* $\varepsilon = 0.005$ *?*

b) $n > 2.02052 \Rightarrow n = 4$

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
18. lipnja 2009.

4. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [25 bodova]

Zadana je model-funkcija $f(x;a,b) = e^{-ax} + e^{bx}$.
(a) *Postavite problem najmanjih kvadrata za ovu model-funkcija i podatke* (x_i, y_i) $i = 1,\ldots,m$. (b) *Ako je* $x_i = i$, $i = 1,\ldots,m$, *napišite Jacobijan* J *i aproksimaciju Hessijana* $J^T J$ *u točki* $(1,1)$. *Ispitajte definitnost matrice* $J^T J$ *u točki* $(1,1)$.

R: b) $J_{i1} = -x_i e^{-ax_i}$, $J_{i2} = x_i e^{bx_i}$, $i = 1,\ldots,m$. $J[1,1]$ *je pozitivno definitna.*

Zadatak 2 [23 boda] *Napišite algoritme za Gauss-Newtonovu metodu bez regulacije duljine koraka za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata. Poznajete li još neku metodu za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata ?*

[Vidi prilog]

Zadatak 3 [22 boda] *Neka je* $f \in C[a,b]$. *Izraz* $I^* = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ *daje aproksimaciju integrala* $I = \int_a^b f(x)\,dx$ *uz primjenu trapezne formule, a* $I_n^* = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left(f(a+\frac{b-a}{n}) + \cdots + f(a+(n-1)\frac{b-a}{n})\right) + f(b)\right]$ *aproksimaciju integrala* $I = \int_a^b f(x)\,dx$ *uz primjenu generalizirane trapezne formule. Kako se može izraziti pogreška aproksimacije* $I - I^*$, *a kako* $I - I_n^*$ *?*

[$I - I^* = -\frac{b-a}{12} f"(c)$, *gdje je* $c \in (a,b)$, $I - I_n^* = -\frac{(b-1)^3}{12n^2} f"(d)$, *gdje je* $d \in (a,b)$*]*

Zadatak 4 [25 bodova]
(a) *Na koliko podintervala treba podijeliti interval* $[-1,0]$ *tako da primjenom trapezne formule dobijemo približnu vrijednost integrala* $I = \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-2x}\,dx$, *čija apsolutna pogreška neće premašiti broj* $\varepsilon = 0.005$ *?*
(b) *Primjenom generalizirane trapezne formule odredite približnu vrijednost ovog integrala na jednu decimalu točno.*
(c) *Kolika je prava vrijednost integrala* I *?*

a) $M_2 = 1, \quad n = 5$, *b)* $n = 2$, $I^* = 1.4$ *c)* $I = \sqrt{3} - 1/3$

Zadatak 5 [25 bodova]
(a) *Primjenom Newton-Cotesovih formula izvedite Simpsonovo pravilo za izračunavanje vrijednosti integrala* $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.
(b) *Na koliko podintervala treba podijeliti interval* $[-1,0]$ *tako da primjenom generalizirane Simpsonove formule dobijemo približnu vrijednost integrala* $I = \int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-2x}\,dx$, *čija apsolutna pogreška neće premašiti broj* $\varepsilon = 0.005$ *?*

b) $n > 2.02052 \Rightarrow n = 4$

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).

Algoritam Gauss–Newton bez regulacije duljine koraka
Definirati:

model funkciju	$x \mapsto f(x; a)$
Jacobijan	$J(a)$
vektor reziduala	$r(a) = y - f(x; a)$

Korak 0 Ucitati podatke (x_i, y_i), $i = 1, m$, pocetnu aproksimaciju a^0, tocnost $\epsilon > 0$; Staviti $k = 0$

Korak 1 If $\|J^T(a^k)r(a^k)\| < \epsilon$, STOP; U protivnom prijeci na Korak 2;

Korak 2 Rijesiti linearni problem najmanjih kvadrata $J(a^k)s \simeq -r(a^k)$ i rjesenje oznaciti sa s^k;

Korak 3 Staviti $a^{k+1} = a^k + s^k$, $k = k + 1$ i prijeci na Korak 1