Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
7. lipnja 2011.

4. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Zadan je skup podataka* $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 < \cdots < x_m,\ m \geq 1\}$. *Odredite parametar* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *u smislu najmanjih kvadrata, tj. odredite takav* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *za koji se postiže minimum funkcije* $F_{LS}(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{m}(y_i - \alpha x_i)^2$.

(b) *Napišite odgovarajuću minimizirajuću funkciju ako bi parametar* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *trebalo odrediti u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja.*

(c) *Za skup podataka* $\{(1,4),(2,4),(4,8)\}$ *odredite parametar* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *u smislu najmanjih kvadrata i u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja.*

Zadatak 2. [15 bodova]

(a) *Postavite opći problem najmanjih kvadrata. Napišite gradijent i Hessijan funkcije* $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i^2(a)$, *gdje je* $r_i(a) = y_i - f(x_i; a)$, *a* $x \mapsto f(x; a)$ *je neka model funkcija dvostruko neprekidno diferencijabilna po vektoru parametara* a.
(b) *Koristeći spomenute formule, napišite gradijent funkcije* F *u slučaju model funkcije* $f(x; \alpha, \beta) = \alpha + e^{\beta x}$.

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Izvedite Newtonov iterativni postupak za traženje lokalnog minimuma funkcije* $f \in C^2[a,b]$.
(b) *Zadana je kvadratna funkcija* $f(x) = x^2$ *i točka* $T_0 = (1,2)$. *Primjenom Newtonove metode minimizacije treba odrediti točku* $T_p = (x_p, y_p)$ *na grafu kvadratne funkcije najbližu točki* T_0. *Napišite minimizirajuću funkciju, izaberite početnu aproksimaciju i izračunajte sljedeću aproksimaciju točke* T_p.

Zadatak 4. [15 bodova]

(a) *Koje metode za rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata poznajete ?*
(b) *Napišite algoritam za jednu od spomenutih metoda.*

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Napišite barem jedan primjer funkcije koja nema primitivnu funkciju.*
(b) *Neka je* $f \in C^2[a,b]$. *Napišite približnu vrijednost integrala dobivenu trapeznom formulom i pripadnu pogrešku aproksimacije.*
(c) *Izračunajte integral* $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1)dx$. *Primjenom generalizirane trapezne formule izračunajte približnu vrijednost integrala tako da interval* $[1,3]$ *podijelite na četiri jednaka podintervala. Na koliko decimala je točan rezultat ?*

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Izračunajte približnu vrijednost integrala* $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1)dx$ *primjenom generalizirane Simpsonove formule tako da interval* $[1,3]$ *podijelite na četiri jednaka podintervala. Na koliko decimala je točan rezultat ?*

Napomena: Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**

7. lipnja 2011.

4. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Zadan je skup podataka* $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 < \cdots < x_m,\ m \geq 1\}$. *Odredite parametar* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *u smislu najmanjih kvadrata, tj. odredite takav* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *za koji se postiže minimum funkcije* $F_{LS}(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{m} (y_i - \alpha x_i)^2$.

(b) *Napišite odgovarajuću minimizirajuću funkciju ako bi parametar* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *trebalo odrediti u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja.*

(c) *Za skup podataka* $\{(1,2),(2,4),(4,4)\}$ *odredite parametar* $\alpha^\star \in \mathbb{R}$ *u smislu najmanjih kvadrata i u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja.*

Zadatak 2. [15 bodova]

(a) *Postavite opći problem najmanjih kvadrata. Napišite gradijent i Hessijan funkcije* $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i^2(a)$, *gdje je* $r_i(a) = y_i - f(x_i; a)$, *a* $x \mapsto f(x;a)$ *je neka model funkcija dvostruko neprekidno diferencijabilna po vektoru parametara* a.

(b) *Koristeći spomenute formule, napišite gradijent funkcije* F *u slučaju model funkcije* $f(x;\alpha,\beta) = e^{\alpha x} + \beta$.

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Izvedite Newtonov iterativni postupak za traženje lokalnog minimuma funkcije* $f \in C^2[a,b]$.

(b) *Zadana je kvadratna funkcija* $f(x) = x^2$ *i točka* $T_0 = (2,5)$. *Primjenom Newtonove metode minimizacije treba odrediti točku* $T_p = (x_p, y_p)$ *na grafu kvadratne funkcije najbližu točki* T_0. *Napišite minimizirajuću funkciju, izaberite početnu aproksimaciju i izračunajte sljedeću aproksimaciju točke* T_p.

Zadatak 4. [15 bodova]

(a) *Koje metode za rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata poznajete?*

(b) *Napišite algoritam za jednu od spomenutih metoda.*

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Napišite barem jedan primjer funkcije koja nema primitivnu funkciju.*

(b) *Neka je* $f \in C^2[a,b]$. *Napišite približnu vrijednost integrala dobivenu trapeznom formulom i pripadnu pogrešku aproksimacije.*

(c) *Izračunajte integral* $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1)dx$. *Primjenom generalizirane trapezne formule izračunajte približnu vrijednost integrala tako da interval* $[1,3]$ *podijelite na četiri jednaka podintervala. Na koliko decimala je točan rezultat?*

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Izračunajte približnu vrijednost integrala* $I = \int_1^3 (\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1)dx$ *primjenom generalizirane Simpsonove formule tako da interval* $[1,3]$ *podijelite na četiri jednaka podintervala. Na koliko decimala je točan rezultat?*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).