Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
30. travnja 2015.

1. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Napišite formulu za procjenu apsolutne pogreške vrijednosti funkcije* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *u točki* $x^\star = (x_1^\star, \ldots, x_n^\star)$ *ako je* $x_i = x_i^\star \pm \Delta x_i^\star$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) *Neka je* $a = 3.76 \pm 0.005$ *duljina baze, a* $k = 7.22 \pm 0.005$ *duljina kraka istokračnog trokuta. Procijenite apsolutnu pogrešku* ΔP *kod izračunavanja površine* P *tog trokuta.*

(c) *Ako je površinu trokuta potrebno dobiti s točnošću* $\Delta P = 0.0005$, *s kojom točnošću mora biti zadana duljina baze i duljina kraka?*

R: (a) Nastavni materijali ; *(b)* $\partial_a P^* = 3.231960258$, $\partial_k P^* = 1.947169338$, $\Delta P < 0.05$
(c) $\Delta a^* < 0.00005$, $\Delta k^* < 0.005$.

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Uz koji uvjet na podatke* $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *postoji jedinstveni interpolacijski polinom* n*-tog stupnja?. Obrazložite svoju tvrdnju.*

(b) *Napišite Lagrangeov i Newtonov oblik interpolacijskog polinoma čiji graf prolazi točkama* $T_0 = (-1, -10)$, $T_1 = (1, -8)$, $T_2 = (4, -20)$, $T_3 = (6, 32)$
R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $P_3(x) = x^3 - 5x^2 - 4$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Vrijednosti funkcije* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *poznate su u čvorovima* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Napišite sustav uvjeta na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*

(b) *Zadane su točke* $T_0 = (0, 4)$, $T_1 = (2, 2)$, $T_2 = (3, 3)$. *Odredite hat-funkcije* p_0, p_1, p_2 *i odgovarajući linearni interpolacijski spline.*
R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $p_0(x) = \ldots$, $p_1(x) = \ldots$, $p_2(x) = \ldots$,

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i p_i(x) = \begin{cases} 4 - x & , x \in [0, 2] \\ x & , x \in [2, 3] \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases}$$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) *Kako se definira broj uvjetovanosti matrice* A?

(b) *Procijenite relativnu promjenu rješenja sustava jednadžbi* $\begin{bmatrix} 100 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *ako se vektor slobodnih koeficijenata promijeni za* $\Delta b = (0.1, 0)^T$.
(c) *Riješite navedeni sustav linearnih jednadžbi svođenjem matrice sustava na donju trokutastu matricu.*
R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} = 0.00408163$; *(c)* $x = (\frac{1}{198}, \frac{49}{198})^T$

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Što je Cholesky-dekompozicija matrice A? Uz koje uvjete na elemente matrice A je moguće napraviti njenu Cholesky-dekompoziciju?*

(b) *Ako je moguće, izračunajte Cholesky-dekompoziciju matrice* $A = \begin{bmatrix} 100 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *Primjenom dobivene dekompozicije riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = (1, 1)^T$.*

R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $L = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0.2 & 1.98997 \end{bmatrix}$, $x = (0.0050505, 0.247476)^T$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
30. travnja 2015.

1. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Neka je* $a^\star = b^\star_m 10^m + b^\star_{m-1}10^{m-1} + \cdots$ *aproksimacija broja* $a = b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots$*. Kako se definira broj signifikantnih znamenki aproksimativnog broja* $a^\star$*?*

(b) *Neka su* $a = 2.3 \pm 0.05$ *i* $b = 5.5 \pm 0.05$ *katete paravokutnog trokuta. Procijenite apsolutnu pogrešku kod izračunavanja hipotenuze* c *tog trokuta.*
(c) *Ako je hipotenuzu trokuta potrebno dobiti s točnošću* $\Delta c = 0.005$*, s kojom točnošću moraju biti zadane duljine kateta?*

R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $\partial_a c^* = 0.3858061304$, $\partial_b c^* = 0.9225798771$, $\Delta c < 0.5$
(c) $\Delta a^* < 0.05$, $\Delta b^* < 0.005$.

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Napišite teorem o pogreški interpolacijskog polinoma.*

(b) *Odredite Lagrangeov i Newtonov oblik interpolacijskog polinoma čiji graf prolazi točkama* $T_0 = (0, 4)$, $T_1 = (1, 10)$, $T_2 = (3, 22)$, $T_3 = (6, -140)$
R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $P_3(x) = -2x^3 + 8x^2 + 4$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Funkciju* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *treba interpolirati polinomom* P_n*. Kako treba birati čvorove interpolacije, da pogreška bude minimalna? Obrazložite svoju tvrdnju!*

(b) *Odredite optimalne čvorove za interpolaciju funkcije* $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ *polinomom drugog stupnja.*
R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $x_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Što je* LU*-dekompozicija matrice* A*? Uz koje uvjete na elemente matrice* A *je moguće napraviti njenu* LU*-dekompoziciju?*

(b) *Odredite* LU*-dekompoziciju matrice* $A = \begin{bmatrix} 100 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$*. Primjenom dobivene dekompozicije riješite sustav* $Ax = b$*, gdje je* $b = (1, 1)^T$*.*
R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.02 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 100 & 2 \\ 0 & 3.96 \end{bmatrix}$, $x = (\frac{1}{198}, \frac{49}{198})^T$

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Neka su* a *i* b *dva vektora jednake euklidske norme. Definirajte Householderov vektor* u *i odgovarajuću Householderovu matricu* H *tako da bude* $Ha = b$*. Čemu je jednako* Hb*? Obrazložite!*

(b) *Konstruirajte Householderovu matricu* H *tako da poništi drugu komponentu vektora*

$a = (8, 6)^T$.

R: (a) Nastavni materijali; (b) $H = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $Ha = (-10, 0)^T$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju).