

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

- (a) Odredite intervale koji separiraju realne nultočke funkcije $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$.
- (b) Odredite interval $[\alpha, \beta]$ u kome se nalazi najveća realna nultočka i na kome su ispunjeni uvjeti o konvergenciji Newtonove metode.
- (c) Možete li na tom intervalu definirati funkciju φ , tako da bude $f(x) = x - \varphi(x)$ i da na tom intervalu također budu ispunjeni uvjeti o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija?
- (d) Odredite brojeve $m_1 = \min_{x \in [\alpha, \beta]} |f'(x)|$ i $M_2 = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f''(x)|$
- R: (a) $[-1, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1.5]$, $I = [1.5, 3]$; (b) $[1.7, 3]$ (c) $\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, ne jer $\varphi(I) \not\subseteq I$ (d) $m_1 = 0.47$, $M_2 = 12$

Zadatak 2. [25 bodova]

- (a) Što je najbolja aproksimacija funkcije $f \in C[a, b]$ na potprostoru $\mathcal{P} \subset C[a, b]$ ako je na $C[a, b]$ definirana norma $\|\cdot\|$?
- (b) Odredite Fourierov polinom drugog stupnja za funkciju $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + |2x|$.
- (c) Skicirajte graf funkcije i Fourierovog polinoma.
- R: (a); (b) $T_2(x) = 2 - \frac{8}{\pi^2} \cos(\pi x)$ (c);

Zadatak 3. [25 bodova]

- (a) Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi i koja svojstva imaju?
- (b) Ortogonalizirajte sustav funkcija $\{1, x, x^2\}$ na intervalu $[-1, 1]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$.
- R: (a); (b) $\psi_0(x) = 1$, $\psi_1(x) = x$, $\psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

Zadatak 4. [25 bodova]

- (a) Kako se definira problem najmanjih kvadrata? Koje metode poznajete za rješavanje linearnog, a koje za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata?
- (b) Odredite parametre model-funkcije $f(x; a, b) = ax + bx^2$ koja u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže točkama $T_1 = (-1, 1)$, $T_2 = (0, 0)$, $T_3 = (1, 1)$, $T_4 = (2, 2)$
- R: (a); (b) $f(x) = -0.181818x + 0.636364x^2$.

Zadatak 5. [25 bodova]

- (a) Napišite barem jedan primjer funkcije koja nema primitivnu funkciju.
- (b) Izračunajte približnu vrijednost integrala $I = \int_1^3 (|x - 2| + 2|x - 1|) dx$ primjenom generaliziranog trapeznog pravila.
- (c) Izračunajte stvarnu vrijednost integrala I . Kolika je pogreška aproksimacije dobivene

generaliziranim trapeznim pravilom?

R: (a); (b) $I^ = 5, n = 2k, k \in \mathbb{N}$ (c) $I = 5, \Delta I = |I - I^*| = 0.$*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 125 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju).

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

- (a) Odredite intervale koji separiraju realne nultočke funkcije $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
- (b) Odredite interval $[\alpha, \beta]$ u kome se nalazi najmanja realna nultočka i na kome su ispunjeni uvjeti o konvergenciji Newtonove metode.
- (c) Možete li na tom intervalu definirati funkciju φ , tako da bude $f(x) = x - \varphi(x)$ i da na tom intervalu također budu ispunjeni uvjeti o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija?
- (d) Odredite brojeve $m_1 = \min_{x \in [\alpha, \beta]} |f'(x)|$ i $M_2 = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f''(x)|$
- R: (a) $[-1.5, 0]$, $[0, 1.5]$, $[1.5, 3]$; (b) $I = [-1.5, -0.5]$ (c) $\varphi(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x - 2$, ne jer $\varphi(I) \not\subseteq I$ (d) $m_1 = 1.75$, $M_2 = 13$.

Zadatak 2. [25 bodova]

- (a) Što je najbolja aproksimacija funkcije $f \in C[a, b]$ na potprostoru $\mathcal{P} \subset C[a, b]$ ako je na $C[a, b]$ definirana norma $\|\cdot\|$?
- (b) Odredite Fourierov polinom drugog stupnja za funkciju $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - |x|$.
- (c) Skicirajte graf funkcije i Fourierovog polinoma.
- R: (a); (b) $T_2(x) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \cos(\frac{\pi}{2}x)$ (c);

Zadatak 3. [25 bodova]

- (a) Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi i koja svojstva imaju?
- (b) Ortogonalizirajte sustav funkcija $\{1, x, x^2\}$ na intervalu $[-2, 2]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$.
- R: (a); (b) $\psi_0(x) = 1$, $\psi_1(x) = x$, $\psi_2(x) = x^2 - \frac{4}{3}$.

Zadatak 4. [25 bodova]

- (a) Kako se definira problem najmanjih kvadrata? Koje metode poznajete za rješavanje linearnog, a koje za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata?
- (b) Odredite parametre model-funkcije $f(x; \alpha, \beta) = \alpha x + \beta x^3$ koja u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže točkama $T_1 = (-1, 0)$, $T_2 = (0, -1)$, $T_3 = (1, 0)$, $T_4 = (2, 1)$
- R: (a); (b) $f(x) = -0.166667x + 0.166667x^3$.

Zadatak 5. [25 bodova]

- (a) Napišite barem jedan primjer funkcije koja nema primitivnu funkciju.
- (b) Izračunajte približnu vrijednost integrala $I = \int_2^4 (3|x - 3| + |x + 1|) dx$ primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila.
- (c) Izračunajte stvarnu vrijednost integrala I . Kolika je pogreška aproksimacije dobivene

generaliziranim Simpsonovim pravilom?

R: (a); (b) $I^ = 11, n = 2k, k \in \mathbb{N}$ (c) $I = 11, \Delta I = |I - I^*| = 0.$*

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 125 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju).