

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
7. rujna 2015.

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) Što je LU -dekompozicija matrice A ? Uz koje uvjete na elemente matrice A je moguće napraviti njenu LU -dekompoziciju?

(b) Ako je moguće, izračunajte LU -dekompoziciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Primjenom dobivene dekompozicije riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = [1, 2, 4, 4]^T$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) Napišite Lagrangeov i Newtonov oblik interpolacijskog polinoma čiji graf prolazi točkama $T_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n$.

(b) Zadane su točke u ravnini: $T_0 = (0, -2), T_1 = (1, 0), T_2 = (2, 6), T_3 = (-2, -18)$. Odredite interpolacijski polinom P_2 čiji graf prolazi kroz prve tri točke. Nakon toga, poznavajući polinom P_2 , odredite interpolacijski polinom P_3 čiji graf prolazi kroz sve četiri zadane točke.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) Kako se definira problem najmanjih kvadrata? Koje metode poznajete za rješavanje linearnog, a koje za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata?

(b) Odredite parametre model-funkcije $f(x; a, b) = ax + bx^3$ koja u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže točkama $T_1 = (-1, 1), T_2 = (0, 0), T_3 = (3, 21), T_4 = (2, 4)$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) Iskažite teorem o konvergenciji Newtonove metode za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) Provjerite ispunjava li funkcija $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x} + x^2 - 2$ uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode. Ako zadovoljava, odredite početnu aproksimaciju i nađite odgovarajuću aproksimaciju nultočke uz $\epsilon = 0.0005$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Navedite barem jednu funkciju koja nema primitivnu funkciju.

(b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 0.5]$ tako da primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_0^{0.5} \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$ s točnošću $\epsilon = 0.00005$?

(c) Primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_0^{0.5} \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$ s točnošću $\epsilon = 0.00005$.