

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
8. srpnja 2015.

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

Ako je moguće, izračunajte Cholesky-dekompoziciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 13 & 13 & 17 \\ 5 & 13 & 42 & 27 \\ 4 & 17 & 27 & 62 \end{bmatrix}.$$

Primjenom dobivene dekompozicije riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = [1, 2, 3, 4]^T$.

Zadatak 2. [20 bodova]

Koristeći činjenicu da polinom $P_2(x) = 2x^2 - 4x + 3$ prolazi točkama $T_0 = (-1, 9)$, $T_1 = (1, 1)$, $T_2 = (2, 3)$ odredite interpolacijski polinom koji prolazi točkama T_0, T_1, T_2 i $T_3 = (3, 19)$. Direktna primjena Lagrangeovog ili Newtonovog oblika interpolacijskog polinoma neće se priznati.

Zadatak 3. [20 bodova]

Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ na potprostoru svih polinoma stupnja ≤ 2 uz težinsku funkciju $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Zadatak 4. [20 bodova]

Provjerite ispunjava li funkcija $f: [4, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x + \frac{5}{3} \sin x$ uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode. Ako zadovoljava, odredite početnu aproksimaciju i nađite odgovarajuću aproksimaciju nultočke uz $\epsilon = 0.005$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$ tako da primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.0005$?

(b) Primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.0005$.