

**Pismeni ispit iz Numeričke matematike**

**Zadatak 1.** [20 bodova]

(a) Što je LU-dekompozicija matrice  $A$ ? Uz koje uvjete na elemente matrice  $A$  je moguće napraviti njenu LU-dekompoziciju?

(b) Ako je moguće, izračunajte LU-dekompoziciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Primjenom dobivene dekompozicije riješite sustav  $Ax = b$ , gdje je  $b = [1, 2, 4, 4]^T$ .

**Zadatak 2.** [20 bodova]

(a) Uz koji uvjet na podatke  $T_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  postoji jedinstveni interpolacijski polinom  $n$ -tog stupnja? Obrazložite svoju tvrdnju.

(b) Zadane su točke u ravnini:  $T_0 = (1, -6)$ ,  $T_1 = (2, -6)$ ,  $T_2 = (3, -5)$ ,  $T_3 = (6, 4)$ . Odredite interpolacijski polinom  $P_2$  čiji graf prolazi kroz prve tri točke. Nakon toga, poznavajući polinom  $P_2$ , odredite interpolacijski polinom  $P_3$  čiji graf prolazi kroz sve četiri zadane točke.

**Zadatak 3.** [20 bodova]

(a) Što je najbolja aproksimacija funkcije  $f \in C[a, b]$  na potprostoru  $\mathcal{P} \subset C[a, b]$  ako je na  $C[a, b]$  definirana norma  $\|\cdot\|$ ?

(b) Pronađite najbolju  $L_2$  aproksimaciju funkcije  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  na potprostoru svih polinoma stupnja  $\leq 2$  uz težinsku funkciju  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Zadatak 4.** [20 bodova]

(a) Iskažite teorem o konvergenciji Newtonove metode za rješavanje jednadžbe  $f(x) = 0$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

(b) Provjerite ispunjava li funkcija  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{\ln x}{x}$  uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode. Ako zadovoljava, izaberite početnu aproksimaciju i nađite odgovarajuću aproksimaciju nultočke uz  $\epsilon = 0.0005$ .

**Zadatak 5.** [20 bodova]

(a) Napišite izraz za određivanje broja podintervala primjenom Simsonovog pravila uz zadanu točnost  $\epsilon$ .

(b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval  $[0, 0.5]$  tako da primjenom generaliziranog Simsonovog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala  $\int_0^{0.5} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$  s točnošću  $\epsilon = 0.00005$ ?

(c) Primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala  $\int_0^{0.5} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$  s točnošću  $\epsilon = 0.00005$ .