Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
15. travnja 2016.

## 1. kolokvij iz Numeričke matematike

**Zadatak 1.** [20 bodova]

(a) *Napišite formulu za procjenu apsolutne pogreške vrijednosti funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ u točki $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star)$ ako je $x_1 = x_1^\star \pm \Delta x_1^\star$ i $x_2 = x_2^\star \pm \Delta x_2^\star$.*

(b) *Neka je $a = 5.5 \pm 0.05cm$ radijus baze, a $h = h = 8.25 \pm 0.005cm$ visina stošca. Procijenite apsolutnu pogrešku $\Delta V$ kod izračunavanja volumena $V$ tog stošca.*

(c) *Ako je volumen stošca potrebno dobiti s točnošću $\Delta V = 0.05cm^3$, s kojom točnošću mora biti zadan radijus baze i visina tog stošca?*

*R: (a) Nastavni materijali ;* *(b)* $\Delta V \approx 4.91cm^3$ *(c)* $\Delta a \approx 0.00026cm$, $\Delta h \approx 0.00079cm$

**Zadatak 2.** [20 bodova]

(a) *Uz koji uvjet postoji jedinstveni interpolacijski polinom oblika $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, $b, c, d \in \mathbb{R}$ čiji graf prolazi točkama $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2$?*

(b) *Odredite interpolacijski polinom $P$ čiji graf prolazi točkama $T_0 = (-1, -11)$, $T_1 = (2, 7)$, $T_2 = (3, 21)$.*

*R: (a) Nastavni materijali ;* *(b)* $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

**Zadatak 3.** [20 bodova]

(a) *Iskažite teorem o ocjeni pogreške interpolacijskog polinoma.*

(b) *Zadana je funkcija $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ i čvorovi interpolacije $\{0, 1, 2\}$. Odredite odgovarajući interpolacijski polinom drugog stupnja.*

(c) *Napišite i odredite apsolutnu pogrešku aproksimacije.*

*R: (a) Nastavni materijali ;* *(b)* $P(x) = 1 - \frac{1}{2}(3 - 4e + e^2)x + \frac{1}{2}(e-1)^2x^2$; *c)* $\frac{e^2\sqrt{3}}{27} \approx 0.474$

**Zadatak 4.** [20 bodova]

(a) *Kako se definira broj uvjetovanosti matrice $A$?*

(b) *Odredite broj uvjetovanosti matrice sustava i procijenite relativnu promjenu rješenja sustava jednadžbi* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^2 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *ako se vektor slobodnih koeficijenata promijeni za $\Delta b = (0.1, 0, -0.1)^T$.*

*R: (a) Nastavni materijali;* *(b)* $cond(A) = 56$, $\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \le 5.6.$

**Zadatak 5.** [20 bodova]

(a) *Za kakvu matricu $A$ je moguće provesti $LU$-dekompoziciju?*

*(b) Je li za matricu iz prethodnog zadatka moguće provesti LU-dekompoziciju? Ako je to moguće, pronađite odgovarajuće matrice $L$ i $U$, te riješite sustav jednadžbi $Ax = b$ iz prethodnog zadatka.*

*R: (a) Nastavni materijali; (b) Da;* $L = \{\{1, 0, 0\}, \{4, 1, 0\}, \{8, 2, 1\}\}$, $U = \{\{1, 0, 0\}, \{0, 8, 0\}, \{0, 0, 32\}\}$, $x = (1, -3/8, -1/32)^T$

**Zadatak 6.** [20 bodova]

*(a) Napišite u matričnom obliku Gauss-Seidelovu metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$.*

*(b) Za početnu iteraciju $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ odredite sljedeće dvije iteracije Gauss-Seidelove metode kod rješavanja sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$ gdje je $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ i $b = (4, 2, 4)^T$.*

*R: (a) Nastavni materijali; (b)* $x^{(1)} = (0.75, 1.125, 0.34375)^T$, $x^{(2)} = (1.11, 0.62, 0.29)^T$.

---

**Napomena** Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**

15. travnja 2016.

**1. kolokvij iz Numeričke matematike**

**Zadatak 1.** [20 bodova]

(a) *Napišite formulu za procjenu apsolutne pogreške vrijednosti funkcije* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *u točki* $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star)$ *ako je* $x_i = x_i^\star \pm \Delta x_i^\star$, $i = 1, 2, 3$.

(b) *Neka je* $a = 5.5 \pm 0.05cm$ *radijus baze, a* $s = 9.92 \pm 0.005cm$ *izvodnica stošca. Procijenite apsolutnu pogrešku* $\Delta O$ *kod izračunavanja oplošja* $O$ *tog stošca.*

(c) *Ako je oplošje stošca potrebno dobiti s točnošću* $\Delta O = 0.05cm^2$, *s kojom točnošću mora biti zadan radijus baze i izvodnica tog stošca?*

*R: (a) Nastavni materijali ;* *(b)* $\Delta O = 3.3725cm^2$ *(c)* $\Delta a \approx 0.00038cm$, $\Delta s \approx 0.00145cm$

**Zadatak 2.** [20 bodova]

(a) *Uz koji uvjet postoji jedinstveni interpolacijski polinom oblika* $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ *čiji graf prolazi točkama* $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2$*?*

(b) *Odredite interpolacijski polinom* $P$ *čiji graf prolazi točkama* $T_0 = (0, 4)$, $T_1 = (1, 10)$, $T_2 = (2, 4)$.

*R: (a) Nastavni materijali ;* *(b)* $P(x) = -2x^4 + 8x^2 + 4$

**Zadatak 3.** [20 bodova]

(a) *Vrijednosti funkcije* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *poznate su u čvorovima* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Napišite sustav uvjeta na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*

(b) *Zadane su točke* $T_0 = (0, 2)$, $T_1 = (2, 4)$, $T_2 = (3, 3)$. *Odredite hat-funkcije* $p_0, p_1, p_2$ *i odgovarajući linearni interpolacijski spline.*

*R: (a) Nastavni materijali;* *(b)* $p_0(x) = \ldots$, $p_1(x) = \ldots$, $p_2(x) = \ldots$,

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i p_i(x) = \begin{cases} 2 + x & , x \in [0, 2] \\ 6 - x & , x \in [2, 3] \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases}$$

**Zadatak 4.** [20 bodova]

(a) *Kako se definira matrična norma* $\|A\|_1$ *i* $\|A\|_\infty$*?*

(b) *Odredite broj uvjetovanosti matrice sustava i procijenite relativnu promjenu rješenja sustava jednadžbi* $\begin{bmatrix} 1 & 2^2 & 2^3 \\ 0 & 2^3 & 2^4 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *ako se vektor slobodnih koeficijenata promijeni za* $\Delta b = (-0.1, 0, 0.1)^T$.

*R: (a) Nastavni materijali;* *(b)* $cond(A) = 48$, $\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq 4.8$.

**Zadatak 5.** [20 bodova]

*(a) Za koju matricu kažemo da je ortogonalna?*

*(b) Pokažite da matrice* $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ *čine QR-dekompoziciju matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. *Primjenom QR-dekompozicije riješite sustav jednadžbi* $Ax = b$, *gdje je* $b = (1, 1, 1)^T$.

*R: (a) Nastavni materijali;* *(b)* $Rx = Q^T b, \Rightarrow x = (0, \frac{1}{2}, 0)^T$.

**Zadatak 6.** [20 bodova]

*(a) Napišite u matričnom obliku Jacobijevu metodu za rješavanje sustava linearnih jednadžbi* $Ax = b$.

*(b) Za početnu iteraciju* $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ *odredite sljedeće tri iteracije Jacobijeve metode kod rješavanja sustava linearnih jednadžbi* $Ax = b$ *gdje je* $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *i* $b = (4, 2, 4)^T$.

*R: (a) Nastavni materijali;* *(b)* $x^{(1)} = (1, 1, 1)^T$, $x^{(2)} = (0.75, 1., 0.25)^T$, $x^{(3)} = (1.125, 0.75, 0.375)^T$.

---

**Napomena** Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju).