

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) Odredite intervale koji separiraju realne nultočke funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

(b) Odredite interval $[\alpha, \beta]$ u kome se nalazi najveća realna nultočka i na kome su ispunjeni uvjeti o konvergenciji Newtonove metode. Pokažite da su ispunjeni ti uvjeti.

(c) Izaberite početnu aproksimaciju $x_0 \in [\alpha, \beta]$ i odredite sljedeće dvije aproksimacije Newtonovom metodom. Koliku ste točnost postigli?

R: (a) $I_1 = [-1, 0]$, $I_2 = [0, 2]$, $I_3 = [2, 3]$; (b) $[2.5, 3]$ (c)

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) Što je najbolja aproksimacija funkcije $f \in C[a, b]$ na potprostoru $\mathcal{P} \subset C[a, b]$ ako je na $C[a, b]$ definirana norma $\|\cdot\|$?

(b) Odredite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije iz Zadatka 1 na potprostoru $L(1, x)$ svih polinoma stupnja $n \leq 1$ na intervalu $[0, 1]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$. Kolika je pogreška aproksimacije?

R: (a)- (b) $f^*(x) = 2.3 - 2.1x$; $\|f - f^*\|_2 \approx 0.1$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) Pokažite da vrijedi: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qxdx = \pi \delta_{pq}$ za sve $p, q \in \mathbb{N}$.

(b) Odredite Fourierov polinom drugog stupnja za funkciju $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \pi - |\frac{x}{2}|$ i $\|f - F\|_2$.

R: (a)- (b) $F_2 = \frac{3\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x$; $\|f - F\|_2 \approx 1.76$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) Definirajte problem najmanjih kvadrata. Napišite gradijent i Hessijan minimizirajuće funkcije.

(b) Zadani su podaci: $(-2, 8), (-1, 6), (0, 3), (2, 5)$ i model funkcija $f(x; a, b) = a + bx^2$. Odredite optimalne parametre a^*, b^* u smislu metode najmanjih kvadrata i skicirajte odgovarajuću sliku.

R: (a)- (b) $f(x) = 4 + 2x^2/3$

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Napišite barem jednu funkciju koja nema primitivnu funkciju.

(b) Primjenom Simpsonove formule odredite $\int_0^1 f(x)dx$, gdje je f funkcija iz Zadatka 1. Kolika je stvarna vrijednost ovog integrala ?

R: (a) ; (b) $I = I^* = 1.25$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju).

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) Odredite intervale koji separiraju realne nultočke funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^3 + 6x + 2$.

(b) Odredite interval $[\alpha, \beta]$ u kome se nalazi najmanja po apsolutnoj vrijednosti realna nultočka, odaberite funkciju φ tako da su ispunjeni uvjeti o konvergenciji Metode jednostavnih iteracija. Pokažite da su ispunjeni ti uvjeti.

(c) Izaberite početnu aproksimaciju $x_0 \in [\alpha, \beta]$ i odredite sljedeće dvije aproksimacije Metodom jednostavnih iteracija. Koliku ste točnost postigli?

R: (a) $I_1 = [-2, -1]$, $I_2 = [-1, 0]$, $I_3 = [1, 2]$; (b) $[-.5, 0]$ (c)

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) Što je Grammova matrica i kada je nesingularna ?

(b) Odredite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije iz Zadatka 1 na potprostoru $L(1, x)$ svih polinoma stupnja $n \leq 1$ na intervalu $[-1, 1]$ uz težinsku funkciju $w(x) = 1$. Kolika je pogreška aproksimacije?

R: (a)- (b) $f^*(x) = 2 + 4.8x$; $\|f - f^*\|_2 \approx 0.43$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) Pokažite da vrijedi: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qxdx = \pi \delta_{pq}$ za sve $p, q \in \mathbb{N}$.

(b) Odredite Fourierov polinom drugog stupnja za funkciju $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \pi + |\frac{x}{2}|$ i $\|f - F\|_2$.

R: (a)- (b) $F_2 = \frac{5\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \cos x$; $\|f - F\|_2 \approx 0.14$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) Kako se definira najbolji reprezentant skupa podataka mjerenja: y_1, \dots, y_m u smislu najmanjih kvadrata i u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja?

(b) Zadani su podaci: $(-2, 4), (0, 2), (1, 0), (2, 2)$ i model funkcija $f(x; a, b) = ax + bx^2$. Odredite optimalne parametre a^*, b^* u smislu metode najmanjih kvadrata i skicirajte odgovarajuću sliku.

R: (a)- (b) $f(x) = -0.527027x + 0.743243x^2$

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Napišite generaliziranu trapeznu formulu i odgovarajuću pogrešku aproksimacije.

(b) Primjenom Trapezne formule odredite $\int_0^1 f(x)dx$, gdje je f funkcija iz Zadatka 1 s točnošću $\epsilon = 0.05$. Na koliko dijelova morate podijeliti interval integracije $[0, 1]$? Kolika je stvarna vrijednost integrala?

R: (a) ; (b) $I = 5.5$, $n = 4$, $I^* = 4.46875$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju).