Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
12. rujna 2016.

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Napišite formulu za procjenu apsolutne pogreške vrijednosti funkcije* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *u točki* $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star)$ *ako je* $x_1 = x_1^\star \pm \Delta x_1^\star$ *i* $x_2 = x_2^\star \pm \Delta x_2^\star$.

(b) *Zadan je jednakokračni trokut duljine osnovice* $a = 6 \pm 0.005$ *s krakovima duljine* $b = 18 \pm 0.005$. *Ocijenite apsolutnu i relativnu pogrešku pri računanju površine trokuta.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Kako definiramo* L_p *normu funkcije* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$?

(b) *Pokažite da je sustav funkcija* $\phi_i(x) = \cos(ix), i = 0, 1, \ldots, n$ *ortogonalan na* $[0, \pi]$ *uz težinsku funkciju* $\omega(x) = 1$.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Kako se definira problem najmanjih kvadrata? Koje metode poznajete za rješavanje linearnog, a koje za rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata?*

(b) *Odredite parametre model-funkcije* $f(x; a, b) = 2\alpha x^2 + \beta x^4$ *koja u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže točkama* $T_1 = (1, 4)$, $T_2 = (0, 0)$, $T_3 = (3, 20)$, $T_4 = (4, 50)$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Iskažite teorem o konvergenciji metode jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe* $f(x) = 0$, $f\colon I \to \mathbb{R}$.

(b) *Za funkciju* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + \ln(x - 0.5) - x^2$ *definirajte odgovarajući iterativni postupak koji će po metodi jednostavnih iteracija konvergirati prema rješenju jednadžbe* $f(x) = 0$. *Izaberite početnu aproksimaciju i odredite odgovarajuću aproksimaciju uz* $\epsilon = 0.005$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Napišite generalizirano trapezno pravilo i odgovarajuću pogrešku aproksimacije.*

(b) *Na koliko dijelova treba podijeliti interval* $[0, 1]$ *tako da primjenom generaliziranog trapeznog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala* $\int_0^1 (te^{-2t} + t^4)dt$ *s točnošću* $\epsilon = 0.05$?

(c) *Primjenom generaliziranog trapeznog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala* $\int_0^1 (te^{-2t} + t^4)dt$ *s točnošću* $\epsilon = 0.05$.