

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
13. srpnja 2016.

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) Što je LU dekompozicija matrice A ? Uz koje uvjete na elemente matrice A je moguće napraviti njenu LU dekompoziciju?

(b) Ako je moguće, izračunajte LU dekompoziciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Primjenom dobivene dekompozicije riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = [1, 1, 2, 1]^T$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) Napišite Lagrangeov i Newtonov oblik interpolacijskog polinoma čiji graf prolazi točkama $T_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n$.

(b) Zadane su točke u ravnini: $T_0 = (-2, -37), T_1 = (0, -1), T_2 = (1, -4), T_3 = (4, -25)$. Odredite interpolacijski polinom P_2 čiji graf prolazi kroz prve tri točke. Nakon toga, poznavajući polinom P_2 , odredite interpolacijski polinom P_3 čiji graf prolazi kroz sve četiri zadane točke.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) Pokažite da vrijedi: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx dx = \pi \delta_{pq}$ za sve $p, q \in \mathbb{N}$.

(b) Odredite Fourierov polinom trećeg stupnja za funkciju $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2} - |4x|$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) Iskažite teorem o konvergenciji Newtonove metode za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) Provjerite ispunjava li funkcija $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} \sin 2x + x - 1$ uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode. Ako zadovoljava, izaberite početnu aproksimaciju i nađite odgovarajuću aproksimaciju nultočke uz $\epsilon = 0.005$.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Napišite izraz za određivanje broja podintervala primjenom Simpsonovog pravila uz zadanu točnost ϵ .

(b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$ tako da primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_0^1 (te^{-2t} + \sin t) dt$ s točnošću $\epsilon = 0.005$?

(c) Primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_0^1 (te^{-2t} + \sin t) dt$ s točnošću $\epsilon = 0.005$.