

Od Galilea do Gosseta — prvih 275 gpdina statistike

Franka Miriam Brückler

Statistički seminar, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku

19. siječnja 2023.

Prije Graunta ...

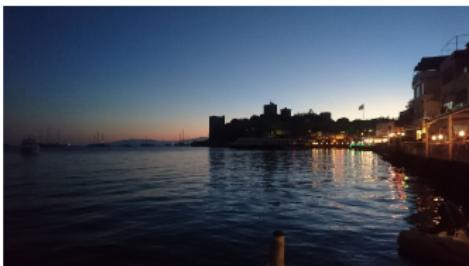
Statistički podaci bili su skupljani još od prvih **civilizacija**: popisi imovine, stanovništva, ... u svrhe oporezivanja, raspodjele imovine, vojske, ...



Nakon propasti Rimskog carstva, *redovni* popisi stanovništva nisu provođeni sve do 18. stoljeća.

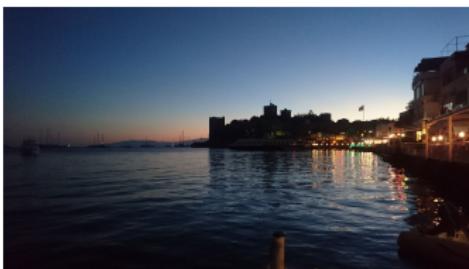
Herodot (5. st. pr. Kr.)

„Oni navode da tri stotine četrdeset i jedna generacija razdvaja prvog egipatskog kralja od zadnje spomenutog (Hefesta) i da je za svaku generaciju postojao pripadni kralj i visoki svećenik. Sad uzmimo tri generacije kao stotinu godina, tri stotine generacija čine deset tisuća godina, a preostalih četrdeset i jednu generaciju čine još tisuću tristo i četrdeset godina; tako dobijemo ukupno jedanaest tisuća tristo i četrdeset godina . . . “



Herodot (5. st. pr. Kr.)

„Oni navode da tri stotine četrdeset i jedna generacija razdvaja prvog egipatskog kralja od zadnje spomenutog (Hefesta) i da je za svaku generaciju postojao pripadni kralj i visoki svećenik. Sad uzmimo tri generacije kao stotinu godina, tri stotine generacija čine deset tisuća godina, a preostalih četrdeset i jednu generaciju čine još tisuću tristo i četrdeset godina; tako dobijemo ukupno jedanaest tisuća tristo i četrdeset godina . . . “



16. st.: Jakob Köbel—16 osoba da definira duljinu *Rute (16 Fuß)*



Od 16. st. počelo se sve češće skupljati razne podatke o stanovništvu, najčešće u porezne svrhe. Do 17. stoljeća značajno se povećalo i skupljanje znanstvenih (astronomskih) podataka.

Galileo Galilei (1564.–1642.)

- Samo je jedna točna vrijednost fizikalne veličine.
- Mjerenja nose grešku uslijed nesavršenosti promatrača i mjernog instrumenta.
- Greške se rasporeduju simetrično s obzirom na 0.
- Manje greške su vjerojatnije od velikih.



DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STUDIO DI PISA.
E Filosofo e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR.DVCA DI TOSCANA.
Duo si è compiuti di questo genere è d'alcune
Opere sue
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLERANCO E CORRIGENDO;
Propriamente intitolati al Signor Dugliola e Nelsone
ma per brevità, generalmente
INTITOLATI AL DIALOGO
CON PIU
VIEGLI

IN FIRENZE, Per Gio.Batt.Landi: MDCCXXXII.
CON LICENZA DEL AUTORE.



Otac deskriptivne statistike

John Graunt (1620.–1674.)

Engleski trgovac koji je prvi u povijesti iz statističkih (demografskih) podataka pokušao donijeti zaključke.

Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality (1662.): analiza izvješća o rođenim i umrlima u Londonu, posebno utjecaj kuge na brojnost i smrtnost stanovništva.

A TABLE of the
CHRISTENINGS and MORTALITY
For the Year 1661 and 1662.

Month	Year	Christenings		Deaths	
		1661	1662	1661	1662
Jan	1661	112	112	112	112
Feb	1661	112	112	112	112
Mar	1661	112	112	112	112
Apr	1661	112	112	112	112
May	1661	112	112	112	112
Jun	1661	112	112	112	112
Jul	1661	112	112	112	112
Aug	1661	112	112	112	112
Sep	1661	112	112	112	112
Oct	1661	112	112	112	112
Nov	1661	112	112	112	112
Dec	1661	112	112	112	112
Jan	1662	112	112	112	112
Feb	1662	112	112	112	112
Mar	1662	112	112	112	112
Apr	1662	112	112	112	112
May	1662	112	112	112	112
Jun	1662	112	112	112	112
Jul	1662	112	112	112	112
Aug	1662	112	112	112	112
Sep	1662	112	112	112	112
Oct	1662	112	112	112	112
Nov	1662	112	112	112	112
Dec	1662	112	112	112	112

The Year —————— 1661
The Year —————— 1662

Digitized by Google

A TABLE
Digitized by THE OHIO STATE UNIVERSITY

Otac deskriptivne statistike

John Graunt (1620.–1674.)

Engleski trgovac koji je prvi u povijesti iz statističkih (demografskih) podataka pokušao donijeti zaključke.

Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality (1662.): analiza izvješća o rođenim i umrlima u Londonu, posebno utjecaj kuge na brojnost i smrtnost stanovništva.

A TABLE of the
CHRISTENINGS and MORTALITY
For the Year 1660 and 1661.
Widow Single Married Divorced Total
1. January 1660 120 110 110 100 440
2. February 1660 110 100 100 90 300
3. March 1660 120 110 110 100 440
4. April 1660 110 100 100 90 300
5. May 1660 120 110 110 100 440
6. June 1660 110 100 100 90 300
7. July 1660 120 110 110 100 440
8. August 1660 110 100 100 90 300
9. September 1660 120 110 110 100 440
10. October 1660 110 100 100 90 300
11. November 1660 120 110 110 100 440
12. December 1660 110 100 100 90 300
1. January 1661 120 110 110 100 440
2. February 1661 110 100 100 90 300
3. March 1661 120 110 110 100 440
4. April 1661 110 100 100 90 300
5. May 1661 120 110 110 100 440
6. June 1661 110 100 100 90 300
7. July 1661 120 110 110 100 440
8. August 1661 110 100 100 90 300
9. September 1661 120 110 110 100 440
10. October 1661 110 100 100 90 300
11. November 1661 120 110 110 100 440
12. December 1661 110 100 100 90 300
The Total Number of Days in the Year 1660 and 1661
T. Petty London: Printed by J. Stansbury
A TABLE of the
CHRISTENINGS and MORTALITY
For the Year 1660 and 1661.

Primjer Grauntovog zaključka: Žene imaju tendenciju duljeg života od muškaraca, a liječnici tvrde da imaju podjednako ženskih i muških pacijenata, dakle ili liječnici bolje liječe ženske bolesti ili više muških umire od svojih poroka jer ne traže liječničku pomoć 😊



Edmond Halley (1656.–1742.)

Analizirao zapise o rođenjima i smrtima i dobima smrti u Wroclawu u razdoblju 1687.–1691. ⇒ *An estimate of the degrees of mortality of mankind, drawn from the curious tables of births and funerals in the City of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives.* Phil. Trans., 17 (1693), 596—610

7 zaključaka: 9/34 stanovništva „može nositi oružje“, vjerojatnosti preživljavanja i medijan preostalih godina života za svaki interval, o cjeni životnog osiguranja, izračuni životnih renti (običnih i zajedničkih za 2 ili 3 osobe)

Braća Huygens

1669.: Korespondencija Christiaana (1629.–1695.) i Lodewijka (1631.–1699.) o izračunavanju očekivanog i medijanskog životnog vijeka temeljem Grauntovih tablica — usporedba s lutrijom

De ratiociniis in ludo aleae (1656.)

Prva knjiga (zapravo, knjižica) o vjerojatnosti, ujedno i prvi spis u kom se razmatra ideja **očekivanja**.

Imamo dakle dva različita koncepta: očekivanje ili vrijednost buduće starosti neke osobe i starost u kojoj osoba ima jednaku šansu preživjeti ili ne. Prvo je za izračuvanje životnih renti, a drugo za klađenje.

(C. Huygens, 1669.)

Prvi testovi značajnosti 1712.

John Arbuthnott (1667.–1735.)

Škotski matematičar i liječnik te satiričar, priatelj Jonathana Swifta i Alexandra Popea.

An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observed in the Births of both Sexes: tablica krštene muške i ženske djece u Londonu 1629.–1710. Uočio je približno konstantan omjer $M : F > \frac{1}{2}$: „... we must observe that the external Accidents to which Males are subject (who must seek their Food with danger) do make a great havock of them, and that this loss exceeds far that of the other Sex, occasioned by Diseases incident to it, as Experience convinces us. To repair that Loss, provident Nature, by the Disposal of its wise Creator, brings forth more Males than Females, and that in almost a constant proportion.“

To pokušava potkrijepiti pomoću binomne razdiobe.



Willem Jacob 'sGravesande (1688.–1742.)

Nizozemski matematičar i filozof prirode iste godine popravlja Arbuthnottov test i testira hipotezu da je jednako vjerojatno rođenje muškog i ženskog djeteta:

- Od $\frac{7765}{15448} \approx 50,27\%$ do $\frac{4748}{8855} \approx 53,62\%$ godišnje rođenih M.
- U te 82 godine prosječni natalitet 11429 \Rightarrow 'nominalni' raspon 5745–6128 rođenja muške djece godišnje.
- Uzima da se radi o binomnoj distribuciji s $n = 11429$ i razmatra $5745 \leq k \leq 6128$.
- Ako je $p = \frac{1}{2}$, vjerojatnost da je uočeni višak muške djece plod slučaja jednak je 82. potenciji od

$$\sum_{n=5745}^{6128} \binom{11429}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11429} \approx 0,292.$$

Bernoulli, 2 od 7

Nicolaus I. Bernoulli (1687.–1759.)

U pismima racionalizira Arbuthnottove i 'sGravesandove ideje i svodi ih na zadatke da se temeljem opažanja procijeni vjerojatnost rođenja muškog djeteta, da se opažena distribucija usporedi s binomnom kako bi se vidjelo može li taj model objasniti varijacije u podacima i da se to matematički olakša dobrom aproksimacijom binomnih koeficijenata za veliki n .

Bernoulli, 2 od 7

Nicolaus I. Bernoulli (1687.–1759.)

U pismima racionalizira Arbuthnottove i 'sGravesandove ideje i svodi ih na zadatke da se temeljem opažanja procijeni vjerojatnost rođenja muškog djeteta, da se opažena distribucija usporedi s binomnom kako bi se vidjelo može li taj model objasniti varijacije u podacima i da se to matematički olakša dobrom aproksimacijom binomnih koeficijenata za veliki n .

Jacob Bernoulli (1655.–1705.)

Arc conjectandi (1713.): zakon velikih brojeva kojim je po prvi put povezana vjerojatnost *a priori* i *a posteriori*.

Primjer

Stvarni sastav urne je 3000 bijelih i 2000 crnih kuglica, ali to nije poznato osobi koja će iz urne izvlačiti kuglice jednu po jednu, s vraćanjem. Pitanje je, može li ta osoba to učiniti neki broj puta tako da 10, 100, 1000, ... puta bude vjerojatnije (i naponslijetu 'moralno sigurno') da omjer frekvencija izvučenih bijelih i crnih kuglica bude jednak stvarnom (3 : 2), nego da taj omjer bude neki drugi?

Koristeći „zlatni teorem“ zaključuje da ako želimo 1000 puta veću vjerojatnost da omjer absolutnih frekvencija bijelih i crnih kuglica bude 3 : 2 nego neki drugi, minimalni broj izvlačenja je 25500.

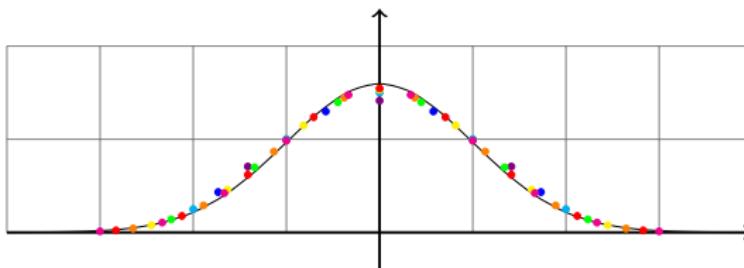
Abraham de Moivre (1667.–1754.)

Annuities upon Lives (1725.), koristeći Halleyeve podatke razvio formule za računanje s rentama (među ostalim i za njihovu podjelu i nasljeđivanje): Prva knjiga o matematici osiguranja.



Abraham de Moivre (1667.–1754.)

Annuities upon Lives (1725.), koristeći Halleyeve podatke razvio formule za računanje s rentama (među ostalim i za njihovu podjelu i nasljeđivanje): Prva knjiga o matematici osiguranja.



1733. otkrio normalnu raspodjelu kao aproksimaciju binomne (centralni granični teorem za $p = \frac{1}{2}$)

Izraz statistika

- Italija, 16. st.: *stato* — država, *statista* — osoba koja se bavi državnim poslovima ⇒ statistika kao skupljanje podataka od interesa državnicima
- Njemački povjesničar i pravnik **Gottfried Achenwall** (1719.–1772.): Prvo(?) korištenje izraza statistika (njemački: *Statistik*) u *Vorbereitung zur Staatswissenschaft der europäischen Reiche* (1748.) u smislu popisa sveukupnih karakteristika države vezanih za njen prosperitet.

Prosjek kao procjena

Prvo korištenje izraza **aritmetička sredina**: H. Gellibrand 1635. za prosjek minimalne i maksimalne vrijednosti.

Prosječek kao procjena

Prvo korištenje izraza **aritmetička sredina**: H. Gellibrand 1635. za prosjek minimalne i maksimalne vrijednosti.

Roger Cotes (1682.–1716.)

„Let p be the place of some object defined by observation, q, r, s , the places of the same object from subsequent observations. Let there also be weights P, Q, R, S reciprocally proportional to the displacements which may arise from the errors in the single observations, and which are given from the given limits of error; and the weights P, Q, R, S are conceived as being placed at p, q, r, s , and their center of gravity Z is found: I say the point Z is the most probable place of the object, and may be safely had for its true place“ (1722.):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \left(= \min \sum_i m_i (x - x_i)^2 \right).$$



Thomas Simpson (1710.–1761.): „*It is well known to your Lordship, that the method practiced by astronomers, in order to diminish the errors arising from the imperfections of instruments, and of the organs of sense, by taking the Mean of several observations, has not been generally received, but that some persons, of considerable note, have been of opinion, and even publickly maintained, that one single observation, taken with due care, was as much to be relied on as the Mean of a great number.*“
Simspon je eksperimentirao i s **krivuljom pogrešaka**, te je predložio ovisnosti tipa $(\pm e, r^e)$ i $(\pm e, kr^{e-k+1})$ za iznose grešaka $e \in N$ ($k = 1, \dots, e$).

Thomas Simpson (1710.–1761.): „*It is well known to your Lordship, that the method practiced by astronomers, in order to diminish the errors arising from the imperfections of instruments, and of the organs of sense, by taking the Mean of several observations, has not been generally received, but that some persons, of considerable note, have been of opinion, and even publickly maintained, that one single observation, taken with due care, was as much to be relied on as the Mean of a great number.*“
Simspon je eksperimentirao i s **krivuljom pogrešaka**, te je predložio ovisnosti tipa $(\pm e, r^e)$ i $(\pm e, kr^{e-k+1})$ za iznose grešaka $e \in N$ ($k = 1, \dots, e$).

Pierre-Simon Laplace 1774.: $\phi(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|}$ (kasnije:
 $\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{2a} \ln \frac{a}{|x|}$)

Daniel Bernoulli 1777.: „Astronomers as a class are men of the most scrupulous sagacity; it is to them therefore that I choose to propound these doubts that I have sometimes entertained about the universally accepted rule for handling several slightly discrepant observations of the same event. By these rules the observations are added together and the sum divided by the number of observations; the quotient is then accepted as the true value of the required quantity, until better and more certain information is obtained. In this way, if the several observations can be considered as having, as it were, the same weight, the center of gravity is accepted as the true position of the object under investigation. This rule agrees with that used in the theory of probability when all errors of observation are considered equally likely. But is it right to hold that the several observations are of the same weight or moment or equally prone to any and every error? Are errors of some degrees as easy to make as others of as many minutes? Is there everywhere the same probability? Such an assertion would be quite absurd, which is undoubtedly the reason why astronomers prefer to reject completely observations which they judge to be too wide of the truth, while retaining the rest and, indeed, assigning to them the same reliability.“



Problem regresijske krivulje

Ako imamo parove (x_i, y_i) izmjerениh vrijednosti dviju međuvisnih veličina x i y , kako dobiti regresijsku krivulju $y = f(x)$?

Josip Ruđer Bošković (1711.–1787.): S Englezom Christopherom Maireom je poduzeo istraživačko putovanje od Rima do Riminija da skupi podatke o dvama meridijanima. Pritom je osmislio metodu izravnjanja grešaka kao minimizaciju absolutnog odstupanja:

$$e(x) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i| \rightarrow \min .$$

Tu je metodu opisao u *De Litteraria expeditione per pontificam ditionem ad dimetiendo duos meridiani gradus a P.P. Maire et Boscovich* (1755.), a istu metodu opisao je i Laplace 1789.

Metoda najmanjih kvadrata

Ubrzo zatim su tu ideju poboljšali Adrien-Marie Legendre (1752.–1833.) i Carl Friedrich Gauß (1777.–1855.):

$$E(x) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Metoda najmanjih kvadrata

Ubrzo zatim su tu ideju poboljšali Adrien-Marie Legendre (1752.–1833.) i Carl Friedrich Gauß (1777.–1855.):

$$E(x) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Gauß je tu metodu razvio 1801. za izračunavanje putanje planetoida Ceresa (objavio: 1809. u *Theoria motus corporum coelestium*), no tvrdio je da ju je koristio od 1795. Legendre je pak, manje precizno, istu metodu objavio 1805., što je dovelo i do rasprave o prvenstvu.

Greške postaju normalne

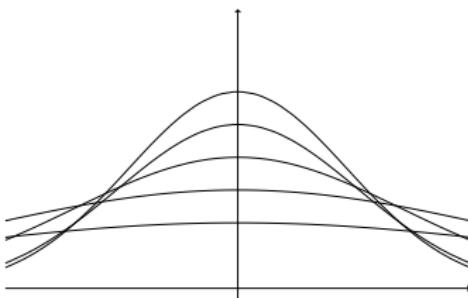
Gauß je među ostalim dokazao da je aritmetička sredina točka minimuma za kvadratna odstupanja (tj. da ona minimizira $\sum(x - x_i)^2$).

Razloge korištenja kriterija najmanjih kvadrata Gauß argumentira s tri prepostavke:

- ① Manje greške su vjerojatnije od većih.
- ② Za svaki realan broj e su greške e i $-e$ jednako vjerojatne.
- ③ Ako raspolažemo s više mjerena iste veličine, aritmetička sredina rezultata je najverojatniji stvarni iznos.¹

Iz navedenih prepostavki Gauß je kao krivulju pogrešaka dobio:

¹Tu je pretpostavku pokušao kasnije eliminirati.



$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

(h je pozitivna konstanta koju je Gauß interpretirao kao preciznost mjerjenja).

Detaljnije je metodu najmanjih kvadrata opisao Laplace u *Théorie Analytique des Probabilités* (1812.), kao i razne primjene vjerojatnosti na statistička pitanja. Laplace je 1810. koristeći centralni granični teorem opravdao treću pretpostavku pokazavši da je prosjek uzorka distribuiran normalno oko prosjeka populacije.



Još malo kasnije se S. D. Poisson bavio pitanjima primjene teorije vjerojatnosti u sudstvu (*Recherches sur la probabilité des judgements en matière criminelle et matière civile*, 1837.).

Još malo kasnije se S. D. Poisson bavio pitanjima primjene teorije vjerojatnosti u sudstvu (*Recherches sur la probabilité des judgements en matière criminelle et matière civile*, 1837.).

Lambert Adolphe Jaques Quetelet (1796.–1874.)

Belgijski matematičar i astronom, utemeljitelj primjena statistike u društvenim znanostima.

Uveo je koncept „prosječnog čovjeka“ (*l'homme moyen*, 1835.), oko čijih se osobina normalno raspodjeljuju osobine svih ljudi.

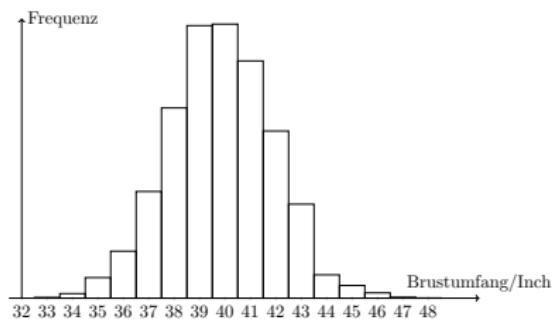
Quetelet je smatrao dužnošću države da skuplja i analizira demografske podatke. Sam je pak analizirao takve podatke i primijetio da se u većim ljudskim populacijama mnoge stvari pojavljuju s velikom pravilnošću i često s normalnom raspodjelom. Quetelet je uočio i da je godišnjih broj ubojstava u Francuskoj gotovo konstantan, te da su čak i omjeri brojeva upotrijebljenih ubojitih sredstava gotovo konstantni – pitanje slobodne volje i društvenog determinizma?!



Moderna statistika je rođena

Primjer

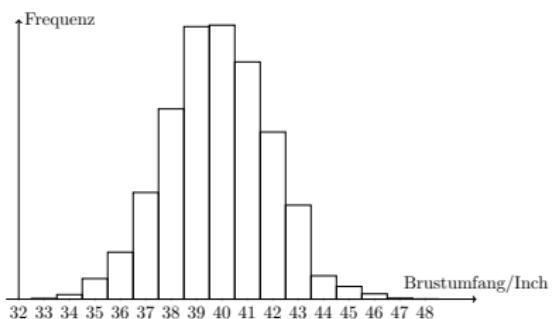
Quetelet (1846.): *Opsezi prsiju 5738 škotskih vojnika.*



Moderna statistika je rođena

Primjer

Quetelet (1846.): *Opsezi prsiju 5738 škotskih vojnika.*



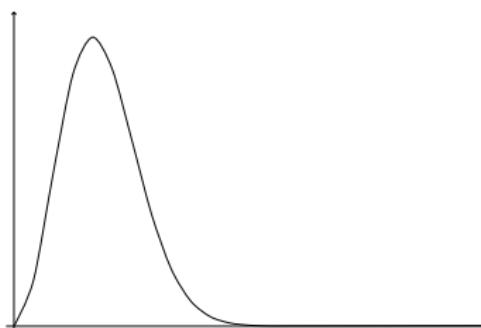
Quetelet je razvio i statističke metode za analize raznih tipova podataka, a 1853. je organizirao prvi međunarodni statistički kongres te se nakon njega izraz **statistika** više ne koristi u smislu „opis općih činjenica o nekoj državi“ nego danas uobičajenom.

Primjena u prirodnim znanostima

Svećenik i prirodoslovac **Gregor Mendel** (1822.–1884.) je pak utemeljio primjenu teorije vjerojatnosti u genetici.

S druge strane, ako se ljudsko društvo može gledati kao cjelina i statistički analizirati, to je još prirodnije za molekule u plinovima.

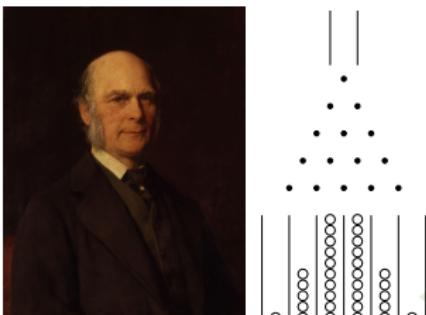
James Clerk Maxwell (1831.–1879.) i **Ludwig Boltzmann** (1844.–1906.) su tako oko 1860. utemeljili statističku termodinamiku.



Sir Francis Galton (1822.–1911.)

Darwinov rođak, utemeljitelj regresijske analize. Bio je poznat po sklonosti skupljanju svakakvih podataka, od temeprature čaja do atraktivnosti žena. Utemeljio je *Anthropometric Laboratory*, u kojeg se svatko mogao doći mjeriti. Rezultati tih mjerjenja su uvelike potvrdili Queteletove pretpostavke.

Bio je uvjeren u sveprisutnost normalne razdiobe te je skupa s Amerikancem C. S. Peircem i Nijemcem W. Lexisom autor tog naziva.

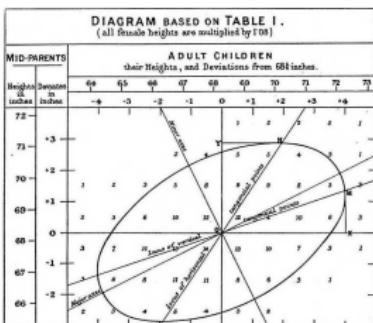


Regresija prema sredini

Usporedbom promjera sjemenki dviju generacija jedne biljke dobio je koreacijski dijagram i otkrio vezu koju je prvo nazvao reverzijom, a kasnije **regresijom**: Medijan promjera potomaka većeg sjemenja bio je manji nego medijan promjera roditelja i obrnuto.

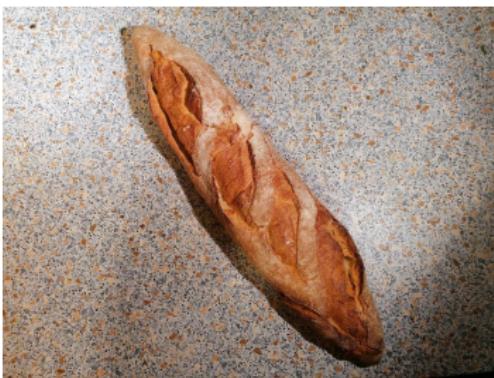
Regresija prema sredini

Usporedbom promjera sjemenki dviju generacija jedne biljke dobio je koreacijski dijagram i otkrio vezu koju je prvo nazvao reverzijom, a kasnije **regresijom**: Medijan promjera potomaka većeg sjemenja bio je manji nego medijan promjera roditelja i obrnuto. U takve koreacijske dijagrame ucrtavao je pravce koji su najbolje opisivali trendove, a njihove koeficijente smjera je uzimao kao indekse korelacije među dvjema varijablama.



Jules Henri Poincaré (1854.–1912.)

Svatko je u nju toliko uvjeren, rekao mi je jednog dana gospodin Lippmann, jer eksperimentalci smatraju da se radi o matematičkom teoremu, a matematičari, da je eksperimentalno potvrđena činjenica.



Karl Pearson (1857.–1936.)

Engleski matematičar, otac modernog statističkog testiranja, najzaslužniji za popularizaciju normalne razdiobe. U povijesti statistike ostao je zabilježen kao otac χ^2 -testa te matematičkog utemeljenja koeficijenta korelacije.

Prije više godina nazvao sam Laplace-Gaußovu krivulju normalnom, no dok tim nazivom izbjegavamo međunarodno pitanje prvenstva, on ima manu, da navodi ljudi na mišljenje da su drugačije razdiobe frekvencija na ovaj ili onaj način abnormalne. (1923.)



William Sealy Gosset (1876.–1937.)

Englez, studirao kemiju i matematiku u Oxfordu, ideje je razmjenjivao s K. Pearsonom i R. Fisherom.

1899. se zaposlio u pivovari *Guiness* u Dublinu. Kako bi iz malih uzoraka mogao dobiti zaključke u svrhu kontrole kvalitete razvio je t-test, odnosno distribuciju koja je danas poznata kao **studentova t-raspodjela**: *The probable error of a mean*, Biometrika, 6 (1908) 1—25.

William Sealy Gosset (1876.–1937.)

Englez, studirao kemiju i matematiku u Oxfordu, ideje je razmjenjivao s K. Pearsonom i R. Fisherom.

1899. se zaposlio u pivovari *Guiness* u Dublinu. Kako bi iz malih uzoraka mogao dobiti zaključke u svrhu kontrole kvalitete razvio je t-test, odnosno distribuciju koja je danas poznata kao **studentova t-raspodjela**: *The probable error of a mean*, Biometrika, 6 (1908) 1—25. Razlog neobičnog imena bila je zabrana objavljivanja tvorničkih tajni, te je Gosset svoje rezultate objavljivao kao „student”.



Literatura

- A. Bakker: *The Early History of Average Values and Implications for Education.* Journal of Statistics Education, 11:1 (2003)
- F. M. Brückler: *Geschichte der Mathematik kompakt - Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre.* Springer Spektrum, Berlin, 2017.
- A. Hald, *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2003.
- A. Meitzen & R. P. Falkner: *History, Theory, and Technique of Statistics. Part First: History of Statistics.* The Annals of the American Academy of Political and Social Science 1 (1891) 1—100.
- S. Raper: *The shock of the mean.* Significance 14(6) (2017) 12–17.
- Y. H. Said: *Eras in the History of Statistics and Data Analysis.* Journal of the Washington Academy of Sciences 93(1) (2007) 17–35.
- S. Stahl: *The Evolution of the Normal Distribution.* Mathematics Magazine 79(2) (2006) 96–113.
- J. M. Stanton: *Galton, Pearson, and the Peas: A Brief History of Linear Regression for Statistics Instructors,* Journal of Statistics Education, 9:3 (2001).
- S. Stigler: *The Seven Pillars of Statistical Wisdom.* Harvard Univ. Press, London, 2016.
- W. F. Willcox: *Definitions of Statistics.* Revue de l'Institut International de Statistique 3 (1926) 289–290