



Upute

Vrijeme pisanja ispita je 120 minuta. Na ispitu je moguće ostvariti najviše 100 bodova, a korištenje pomoćnih materijala, osim kalkulatora, nije dozvoljeno.

Zadatak 1 (20 bodova). Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ slučajno odabrana točka iz skupa

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 \leq y \leq -(x-1)^2 + 1\}.$$

Ako su dani događaji

$$A = \{(x, y) \in \Omega : x \geq 1/2\}, \quad B = \{(x, y) \in \Omega : y \leq 1/2\},$$

odredite $P(B | A^c)$.

Zadatak 2 (20 bodova). Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Dokažite da tada vrijedi:

$$P(A \cup B) + (1 - \max\{P(A), P(B)\})^2 \leq 1.$$

Zadatak 3 (20 bodova). Neka je $X \sim \mathcal{E}(1)$. Odredite funkciju gustoće i funkciju distribucije slučajne varijable

$$Y = 1 - \ln\left(\frac{e^{-X}}{1 - e^{-X}}\right).$$

Zadatak 4 (20 bodova). Ana izlazi na pismeni ispit koji se sastoji od 20 pitanja, pri čemu svako pitanje ima 4 ponuđena odgovora i uvijek su 2 točna (Ana na svako pitanje zaokruži dva odgovora koja smatra točnima). Pitanje se smatra točno odgovorenim ukoliko su zaokružena oba točna odgovora. Kako bi se motivirala za ispit, Ana je odlučila potrošiti iznos kuna jednak kvadratu točnih odgovora na kupovinu odjeće. Odredite distribuciju i očekivanje potrošenog novca na kupovinu odjeće.

Zadatak 5 (20 bodova). Neka su X i Y slučajne varijable za koje vrijedi

$$E[X] = 0, \quad E[Y] = 1, \quad E[XY] = -4, \quad \text{Var}X = 2, \quad \text{Var}Y = 8.$$

Dokažite da tada vrijedi jednakost $Y = -2X + 1$.