# PRVI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - A grupa

Zadatak 1. [2 boda + 2 boda + 1 bod]

a) Objasnite klasičan pristup definiranju vjerojatnosti.

b) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor gdje je $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ proizvoljan interval realnih brojeva, a $\mathcal{F}$ $\sigma$–algebra na $\Omega$ generirana svim otvorenim podintervalima skupa $\Omega$. Kako u tom slučaju, ako zanemarimo pretpostavku o jednakoj vjerojatnosti intervala jednake duljine, zadajemo vjerojatnost $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$?

c) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Precizno formulirajte svojstvo $\sigma$ - subaditivnosti vjerojatnosti.

Zadatak 2. [8 bodova]
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor te neka su dani događaji $A$, $B \in \mathcal{F}$. Dokažite da tada vrijedi

$$P(A \cap B) - P(B) \geq P(A) - 1.$$

Zadatak 3. [4+5 boda]
Diskretna slučajna varijabla $X$ zadana je sljedećom tablicom distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2p^2 & p & 4p^2 \end{pmatrix}.$$

Odredite:

a) numeričku vrijednost konstante $p$.

b) distribuciju slučajne varijable $Y = |X| - 1$.

Zadatak 4. [5+5 boda]
Iz kutije koja sadrži kuglice numerirane brojevima $1, 2, \ldots, 25$ slučajno biramo 3 kuglice, jednu po jednu (bez vraćanja). Kolika je vjerojatnost da izvučemo

a) 3 kuglice s neparnim brojevima?

b) 3 kuglice s uzastopnim brojevima u rastućem poretku?

Zadatak 5. [10 bodova]
Na raspolaganju imamo tri kutije. U prvoj kutiji nalaze se 2 crvene i 3 plave kuglice, u drugoj 3 crvene i 2 plave kuglice, a u trećoj 2 crvene i 2 plave kuglice. Iz svake kutije na slučajan način izvlačimo 2 kuglice i stavljamo u novu (četvrtu) kutiju. Iz četvrte kutije na slučajan način izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da niti jedna kuglica nije plave boje?

Zadatak 6. [8 bodova]
Neka su $x$ i $y$ slučajno odabrani brojevi iz segmenta $[0, 1]$. Ako je $x > y$, odredite vjerojatnost da je $x > 1/2$.

Nenad Šuvak i Ivan Papić

# PRVI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - B grupa

Zadatak 1. [2 boda + 2 boda + 1 bod]

a) Napišite aksiomatsku definiciju vjerojatnosti.

b) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor gdje je $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ proizvoljan interval realnih brojeva, a $\mathcal{F}$ $\sigma$–algebra na $\Omega$ generirana svim otvorenim podintervalima skupa $\Omega$. Kako u tom slučaju, uz pretpostavku o jednakoj vjerojatnosti intervala jednake duljine, zadajemo vjerojatnost $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$?

c) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kada za dva događaja $A, B \in \mathcal{F}$ kažemo da su nezavisni?

Zadatak 2. [8 bodova]
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor te neka su dani događaji $A$, $B \in \mathcal{F}$. Dokažite da tada vrijedi

$$P(A \cup B) \geq \frac{P(B) + P(A)}{2}.$$

Zadatak 3. [4+5 boda]
Diskretna slučajna varijabla $X$ zadana je sljedećom tablicom distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & 5p^2 & 7p^2 \end{pmatrix}.$$

Odredite:

a) numeričku vrijednost konstante $p$.

b) distribuciju slučajne varijable $Y = |X| - 1$.

Zadatak 4. [5+5 boda]
Iz kutije koja sadrži kuglice numerirane brojevima $1, 2, \ldots, 25$ slučajno biramo 4 kuglice, jednu po jednu (bez vraćanja). Kolika je vjerojatnost da izvučemo

a) 4 kuglice s parnim brojevima?

b) 4 kuglice s uzastopnim brojevima u rastućem poretku?

Zadatak 5. [10 bodova]
Na raspolaganju imamo tri kutije. U prvoj kutiji nalaze se 2 bijele i 2 crne kuglice, u drugoj 3 bijele i 2 crne kuglice, a u trećoj 2 bijele i 3 crne kuglice. Iz svake kutije na slučajan način izvlačimo 2 kuglice i stavljamo u novu (četvrtu) kutiju. Iz četvrte kutije na slučajan način izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da je barem jedna kuglica bijele boje?

Zadatak 6. [8 bodova]
Neka su $x$ i $y$ slučajno odabrani brojevi iz segmenta $[0, 1]$. Ako je $x < y$, odredite vjerojatnost da je $y < 1/2$.

Nenad Šuvak i Ivan Papić