

DRUGI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - A grupa

Zadatak 1. [2 boda + 1 bod + 2 boda]

- Definirajte varijancu slučajne varijable. Koristeći prethodnu definiciju dokažite da vrijedi  $\text{Var}X = EX^2 - (EX)^2$ .
- Neka je  $(X, Y)$  diskretan slučajan vektor na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Definirajte kovarijancu slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ .
- Neka je  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Objasnite postupak standardizacije slučajne varijable  $X$  te odgovorite ima li slučajna varijabla  $Y$  dobivena postupkom standardizacije ponovo eksponencijalnu distribuciju (obrazložite svoj odgovor).

Zadatak 2. [4 boda + 4 boda]

U kutiji se nalazi 6 bijelih i 4 crne kuglice. Osoba izvlači 3 kuglice zaredom i to

- bez vraćanja,
- s vraćanjem.

Odredite očekivani broj izvučenih crnih kuglica i vjerojatnost da je osoba izvukla točno dvije crne kuglice.

Zadatak 3. [4 boda + 3 boda]

Automat za igre na sreću u nekoj kockarnici programiran je tako da se prirodan broj  $n$  realizira s vjerojatnošću  $\frac{3}{4^n}$ , tj.

$$P(X = n) = \frac{3}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable  $X$ .

Zadatak 4. [4 boda + 4 boda]

Zadana je slučajna varijabla  $X$  s funkcijom gustoće

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} 2^\alpha x^{\alpha-1} e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

gdje je  $\alpha > 0$  zadani parametar distribucije.

- Odredite matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable  $X$ .
- Koristeći Čebiševljevu nejednakost ocijenite vjerojatnost

$$P\left(X \in \left\langle -\infty, \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\alpha} \right] \cup \left[ \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha}, +\infty \right\rangle\right).$$

Zadatak 5. [4 boda + 3 boda]

Neka je  $X \sim \mathcal{U}(2, 4)$ . Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable  $Y = e^X$ .

Zadatak 6. [4 boda + 2 boda + 2 boda + 2 boda]

U kutiji se nalazi 5 zelenih bombona po 5g i 4 žuta bombona po 4g. Na slučajan način izvlačimo odjednom 2 bombona bez vraćanja. Neka je  $X$  ukupna težina izvučenih bombona, a  $Y$  broj izvučenih žutih bombona. Odredite razdiobu slučajnog vektora  $(X, Y)$  i pripadne marginalne distribucije. Odredite distribuciju slučajne varijable  $X$  uz uvjet  $\{Y = 2\}$ . Jesu li slučajne varijable  $X$  i  $Y$  korelirane? Obrazložite!

DRUGI KOLOKVIJ IZ UVODA U VJEROJATNOST I STATISTIKU - B grupa

Zadatak 1. [2 boda + 1 bod + 2 boda]

- Definirajte varijancu slučajne varijable. Koristeći prethodnu definiciju dokažite da vrijedi  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}X$ , gdje su  $a$  i  $b$  realni brojevi.
- Neka je  $(X, Y)$  diskretan slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Definirajte koeficijent korelacije slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ .
- Neka je  $X$  geometrijska slučajna varijabla, tj.  $X \sim \mathcal{G}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ . Objasnite postupak standardizacije slučajne varijable  $X$  te odgovorite ima li slučajna varijabla  $Y$  dobivena postupkom standardizacije ponovo geometrijsku distribuciju (obrazložite svoj odgovor).

Zadatak 2. [4 boda + 4 boda]

U kutiji se nalaze 3 crvene i 7 zelenih kuglica. Osoba izvlači 3 kuglice zaredom i to

- bez vraćanja,
- s vraćanjem.

Odredite očekivani broj izvučenih zelenih kuglica i vjerojatnost da je osoba izvukla točno dvije zelene kuglice.

Zadatak 3. [4 boda + 3 boda]

Automat za igre na sreću u nekoj kockarnici programiran je tako da se prirodan broj  $n$  realizira s vjerojatnošću  $\frac{5}{6^n}$ , tj.

$$P(X = n) = \frac{5}{6^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable  $X$ .

Zadatak 4. [4 boda + 4 boda]

Zadana je slučajna varijabla  $X$  s funkcijom gustoće

$$f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} 3^\beta x^{\beta-1} e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

gdje je  $\beta > 0$  zadani parametar distribucije.

- Odredite matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable  $X$ .
- Koristeći Čebiševljevu nejednakost ocijenite vjerojatnost

$$P\left(X \in \left\langle \frac{\beta}{3} - \sqrt{\beta}, \frac{\beta}{3} + \sqrt{\beta} \right\rangle\right).$$

Zadatak 5. [4 boda + 3 boda]

Neka je  $X \sim \mathcal{U}(1, 3)$ . Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable  $Y = e^X$ .

Zadatak 6. [4 boda + 2 boda + 2 boda + 2 boda]

U kutiji se nalazi 7 crvenih bombona po 5g i 3 crna bombona po 4g. Na slučajan način izvlačimo odjednom 2 bombona bez vraćanja. Neka je  $X$  ukupna težina izvučenih bombona, a  $Y$  broj izvučenih crvenih bombona. Odredite razdiobu slučajnog vektora  $(X, Y)$  i pripadne marginalne distribucije. Odredite distribuciju slučajne varijable  $X$  uz uvjet  $\{Y = 2\}$ . Jesu li slučajne varijable  $X$  i  $Y$  korelirane? Obrazložite!