Sadržaj

1 Slučajan pokus i prostor elementarnih događaja

Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti koji se ne definiraju, već objašnjavaju primjerima su **pokus** (eksperiment) i njegov **ishod** (elementarni događaj).
Ako pod određenim uvjetima promatramo neki pokus, uočavamo da ishod može biti: **determiniran** (jednoznačno određen), ili **nedeterminiran** (nije jednoznačno određen), tj. slučajan je (**stohastičan**).

Primjer 1.

Na raspolaganju imamo kutiju u kojoj se nalazi 10 bijelih kuglica. Promotrimo pokus koji se sastoji od izvlačenja dviju kuglica iz kutije. Što možete reći o boji izvučenih kuglica?

Primjer 2.

Promotrimo pokus koji se sastoji od zagrijavanja određene količine vode pod normalnim atmosferskim tlakom na temperaturu od $100^o C$. Rezultat ovog pokusa jednoznačno je određen uvjetima u kojima se pokus odvija, a sastoji se od promjene agregatnog stanja vode (iz tekućeg u plinovito stanje).

Za događaje opisane u Primjerima 1 i 2 kažemo da su **determinirani događaji**. Međutim, postoje pokusi čiji ishodi nisu jednoznačno određeni, ali ukazuju na skup mogućih ishoda. Takve pokuse nazivamo **slučajnim pokusima**. Uvjete u kojima se oni odvijaju moraju biti točno opisani i mora se točno znati što registriramo kao ishod pokusa. Slijedi nekoliko primjera:

Primjer 3.

Promotrimo bacanje pravilno izrađenog novčića i pri tome registrirajmo je li ishod bacanja pismo (P) ili glava (G). Ukoliko je novčić pravilan (tj. ima oblik pravilnog valjka) i napravljen je od homogenog materijala (tj. težište mu se nalazi u središtu pravilnog valjka), pri bilo kojem izvođenju pokusa ne možemo sa sigurnošću tvrditi da će pasti pismo ili glava. Dakle, rezultat bacanja novčića nije jednoznačno određen uvjetima u kojima se odvija. Na osnovu toga zaključujemo da je bacanje pravilnog novčića slučajan pokus čiji su mogući ishodi elementi sljedećeg dvočlanog skupa $\{P, G\}$.

Definicija 1.

Svaki ishod slučajnog pokusa je jedan **elementarni događaj** i obično se označava slovom ω. Skup svih mogućih ishoda nekog slučajnog pokusa (tj. elementarnih događaja) naziva se **prostor elementarnih događaja** i označava se s Ω.

Definicija 2.

Neka je dan konačan prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Ako je $A \subset \Omega$, onda kažemo da je A **slučajni događaj** ili samo **događaj**. Smatramo da se događaj $A = \{\omega_{a1}, \ldots, \omega_{ar}\} \subset \Omega$ realizirao ako se u pokusu realizirao bilo koji od ishoda $\omega_{ai} \in A$, $i = 1, \ldots, r$.

Primjedba 1.

Ako je Ω konačan, skup svih mogućih događaja nekog slučajnog pokusa je skup $\mathcal{P}(\Omega)$. Primijetimo da je $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$ i da Ω sadrži sve moguće ishode. Zbog toga za Ω kažemo da je **siguran događaj**. Nasuprot tome, $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$ ne sadrži nikakav ishod pa je $\emptyset$ **nemoguć događaj**. Elementarni događaji iz Primjera 3 su $P =$'palo je pismo' i $G =$'pala je glava', a prostor elementarnih događaja je skup $\Omega = \{P, G\}$.

2 Zadaci

Zadatak 1.

Konstruirajte prostor elementarnih događaja za sljedeće slučajne pokuse:

a) uzastopno bacanje pravilno izrađenog novčića dva puta,

b) uzastopno bacanje pravilno izrađene igraće kockice dva puta,

c) uzastopno bacanje pravilno izrađene igraće kockice n puta, $n \in \mathbb{N}$,

d) slučajan izbor delegacije od dva člana iz skupa osoba $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Zadatak 2.

Slučajan pokus sastoji se od istovremenog bacanja pravilno izrađenog novčića i pravilno izrađene igraće kockice, pri čemu se kao ishod registriraju pojava pisma ili glave na novčiću i broj na gornjoj strani kockice, redom. Modelirajte prostor elementarnih događaja.

Zadatak 3.

U kutiji se nalaze četiri papirića numerirana brojevima 1, 2, 3, i 4. Iz kutije se na slučajan način izvlači po jedan papirić i to: a) bez vraćanja, b) sa vraćanjem, sve dok se ne izvuče papirić na kojem je neparan broj. Ako se kao ishod ovog slučajnog pokusa registriraju izvučeni brojevi, modelirajte pripadni prostor elementarnih događaja.

Zadatak 4.

Strijelac gađa cilj oblika kružne mete polumjera R, pri čemu se mjeri udaljenost od mjesta pogotka do središta mete. Modelirajte pripadni prostor elementarnih događaja.

Zadatak 5.

Strijelac gađa metu 4 puta pri čemu se registriraju i pogoci i promašaji. Modelirajte prostor elementarnih događaja i sljedeće događaje:

a) $A =$'gađanje je započelo promašajem',

b) $B =$'rezultat svih gađanja je isti',

c) $C =$'cilj je pogođen 2 puta',

d) $D =$'cilj je pogođen barem 2 puta'.

3 Osnove algebre skupova

Osnovni pojmovi

Definicija 3.

1. Skup A je podskup skupa B ($A \subseteq B$) ako je svaki element skupa A ujedno element i skupa B.
2. Skup A jednak je skupu B ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
3. Unija skupova A i B je skup $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$.
4. Presjek skupova A i B je skup $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.
5. Razlika skupova A i B je skup $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$.
6. Simetrična razlika skupova A i B je skup $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Definicija 4.

7. Komplement skupa (događaja) $A \subseteq \Omega$ je skup $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ kojeg nazivamo **suprotan događaj** događaja A.

8. Komplement prostora elementarnih događaja je prazan skup, tj. $\Omega^C = \emptyset$. Cijeli prostor elementarnih događaja Ω nazivamo **siguran događaj**, a njegov komplement **nemoguć događaj**.

9. Konačna unija skupova (događaja) $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq \Omega$ je skup:

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2 \vee \ldots \vee \omega \in A_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ t.d. } \omega \in A_i\}. \end{aligned}$$

Definicija 5.

10. Konačan presjek skupova (događaja) $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq \Omega$ je skup:

$$\begin{aligned} A_1 \cap \ldots \cap A_n &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \wedge \omega \in A_2 \wedge \ldots \wedge \omega \in A_n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}. \end{aligned}$$

Osnovna svojstva skupovnih operacija

1.	$A \cup B = B \cup A$	Komutativnost
2.	$A \cap B = B \cap A$	
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Asocijativnost
4.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
5.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivnost
6.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
7.	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	De Morganovi zakoni
8.	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	

Zadatak 6.

Neka je Ω prostor elementarnih događaja pridružen nekom slučajnom pokusu, te neka su A, B i C događaji ($A, B, C \subseteq \Omega$). Pomoću događaja A, B i C izrazite sljedeće događaje:

a) realizirao se samo događaj A,

b) realizirali su se događaji A i B,

c) realizirala su se sva tri događaja,

d) realizirao se *barem* jedan od događaja A, B i C,

e) realizirao se *točno* jedan od događaja A, B i C,

f) realizirali su se *barem* dva od događaja A, B i C,

g) realizirali su se *točno* dva od događaja A, B i C,

h) realizirali su se *najviše* dva od događaja A, B i C,

i) nije se realizirao *niti jedan* od događaja A, B i C.

Zadatak 7.

Među studentima prisutnim na nekom predavanju slučajno se bira jedan student. Pomoću događaja:

- A = student je muškog spola,
- B = student je nepušač,
- C = student živi u studentskom domu.

izrazite sljedeće događaje:

a) student je muškog spola, nepušač je i živi u studentskom domu,

b) Kada će vrijediti $A \cap B \cap C = A$?

c) Kada će vrijediti $C^C \subseteq B$?

d) Kada će vrijediti $A^C = B$? Vrijedi li nužno ova skupovna jednakost ako su svi studenti muškog spola pušači?

4 Vjerojatnost kao relativna frekvencija i zadaci

Budući rezultat slučajnog pokusa ne možemo sa sigurnošću predvidjeti, ponavljanje takvog pokusa nekoliko puta rezultira različitim ishodima.

Definicija 6.

Frekvencija događaja A, označimo ju sa n_A, je broj pojavljivanja realizacije A u n ponavljanja odgovarajućeg slučajnog pokusa. **Relativna frekvencija događaja** A je kvocijent frekvencije n_A i broja ponavljanja slučajnog pokusa n, dakle broj $\frac{n_A}{n}$.

Primjedba 2.

Iz posljednje definicije je očito da je $n_A \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq n_A \leq n$. Dijeljenjem te nejednakosti s n dobijemo važno svojstvo relativne frekvencije $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$.

Primjer 4.

Promotrimo pokus bacanja pravilno izrađenog novčića kojem je pridružen dvočlani prostor elementarnih događaja $\Omega = \{P, G\}$. Prirodno pitanje koje ovdje postavljamo je kolika je **vjerojatnost** da će se realizirati pismo. Pojam vjerojatnosti još nismo definirali i ovdje ga shvaćamo intuitivno kao broj koji daje ocjenu mogućnosti jedne od realizacija. Bez puno razmišljanja većina ljudi odgovara da je tražena vjerojatnost $\frac{1}{2}$. Ovaj odgovor temelji se na sljedećim iskustvenim činjenicama:

1. Znamo da je novčić pravilan te da su šanse (izgledi) realizacije pisma i glave jednaki. Šansu shvaćamo kao omjer vjerojatnosti da će se neki događaj realizirati, i vjerojatnosti da se taj isti događaj neće realizirati. Tako su šanse realizacije pisma (ili glave) jednake 1 : 1.

2. Ako isti pokus ponovimo $n \in \mathbb{N}$ puta (n velik broj), iskustvo nas uči da se pismo i glava realiziraju približno jednak broj puta. Odatle slijedi da je $n_P \approx \frac{n}{2}$ i $n_G \approx \frac{n}{2}$ te da su relativne frekvencije realizacije pisma i glave $\frac{n_P}{n} = \frac{n_G}{n} \approx \frac{1}{2}$. Stoga je razumno uzeti $\frac{1}{2}$ kao vjerojatnost pojavljivanja pisma (ili glave) pri jednom bacanju novčića.

Zadatak 8.

Provedite kratki slučajan pokus bacanja pravilno izrađene igraće kockice i statističkim pristupom uočite da je vjerojatnost realizacije bilo kojeg elementarnog događaja iz pripadnog Ω jednaka $\frac{1}{6}$.

Primjer:

broj	1	2	3	4	5	6
frekvencija	12	11	9	10	10	8

Primjedba 3.

Prethodnim zadatkom uvjerili smo se da se relativne frekvencije pojedinih ishoda slučajnog pokusa nakon velikog broja ponavljanja pokusa grupiraju oko fiksnog broja kojeg prihvaćamo kao vjerojatnost pojavljivanja te realizacije u jednom ponavljanju pokusa. To svojstvo relativnih frekvencija nazivamo **statistička stabilnost relativnih frekvencija**.

Definicija 7.

Ako ishodi slučajnog pokusa imaju svojstvo statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tada se **vjerojatnost događaja** A vezanog uz taj pokus definira kao broj $\mathrm{P}(A)$ oko kojeg se grupiraju relativne frekvencije $\frac{n_A}{n}$ tog događaja za velik broj ponavljanja pokusa n.

Primjedba 4.

Prethodna definicija je klasična definicija vjerojatnosti **a posteriori**, tj. definicija temeljena na iskustvu. Uočimo da možemo pisati $\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$ te da je $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.

Zadatak 9.

Upotrebom rezultata prethodnog zadatka odredite vjerojatnost događaja $B =$'pri bacanju kockice realizirao se paran broj'. U kakvom su odnosu vjerojatnosti događaja B i C, gdje je $C =$'pri bacanju kockice realizirao se neparan broj'.