# Sadržaj



# 1 $\sigma$-algebra događaja i aksiomatska definicija vjerojatnosti

**Definicija 1.**

Partitivni skup nepraznog skupa $\Omega$, u oznaci $\mathcal{P}(\Omega)$, je familija svih podskupova skupa $\Omega$.

**Definicija 2.**

Neka je $\Omega \neq \emptyset$ i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Familija skupova $\mathcal{F}$ je $\sigma$-**algebra** skupova na $\Omega$ ako vrijedi:

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2) $A \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A^C \in \mathcal{F}$,
3) $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

**Primjedba 1.**

$\sigma$-algebra je familija podskupova od $\Omega$ zatvorena na komplement i prebrojivu uniju (također i na prebrojivi presjek i razliku skupova).

**Primjer 1.**

Neka je $\Omega = \{a, b, c, d\}$ i $\mathcal{U} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$. Sa $\sigma(\mathcal{U})$ označavamo najmanju $\sigma$-algebru koja sadrži $\mathcal{U}$, a ona izgleda ovako:

$$\sigma(\mathcal{U}) = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c, d\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{d\}\}.$$

**Definicija 3.**

Neka je $\Omega \neq \emptyset$ i $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebra na $\Omega$. Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se **izmjerivi prostor**.

**Definicija 4.**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjerivi prostor i $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ funkcija sa sljedećim svojstvima:

A1. $P(\Omega) = 1$, (normiranost),

A2. $P(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{F}$, (nenegativnost), A3. ako je $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ familija međusobno disjunktnih skupova ($A_i \cap A_j = \emptyset$ čim je $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$), tada je:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

($\sigma$-aditivnost). Funkciju $P$ zovemo **vjerojatnost**, a uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ **vjerojatnosni prostor**.

**Osnovna svojstva vjerojatnosti**

**S1. Vjerojatnost suprotnog događaja**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i $A \in \mathcal{F}$ događaj. Suprotni događaj događaju $A$ je njegov komplement, tj. događaj $A^c$. Vrijedi:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

**S2. Vjerojatnost praznog skupa**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi $P(\emptyset) = 0$.

**S3. Monotonost vjerojatnosti**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $A \subseteq B$. Tada je $P(A) \leq P(B)$.

**S4. Vjerojatnost unije događaja**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Zadatak 1.**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor te $A$ i $B$ dva događaja iz $\mathcal{F}$. Pokažite da vrijedi:

a) $\max\{P(A), P(B)\} \leq P(A \cup B) \leq 2\max\{P(A), P(B)\}$,

b) $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \dfrac{1}{4}$.

**Zadatak 2.**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Ako su $A, B \in \mathcal{F}$ t.d. je $P(A \triangle B) = 0$, dokažite da je $P(A) = P(B)$.

**Zadatak 3.**

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, te neka za $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi da je $P(A \triangle B) = 0$ i $P(A) = p$. Izračunajte:

a) $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$,

b) $P(A \setminus B)$ i $P(B \setminus A)$.

# 2 Klasična definicija vjerojatnosti

### Klasična definicija vjerojatnosti

**Primjer 2.**

Pretpostavimo da je za usmeni dio ispita iz Uvoda u vjerojatnost i statistiku definiran set od 120 pitanja (pretpostavljamo da sva pitanja nose jednak broj bodova). Nadalje pretpostavimo da je student koji pristupa usmenom ispitu naučio odgovore na 110 pitanja, te da na preostalih 10 pitanja ne zna odgovoriti. Zanima nas kolika je mogućnost da pri izvlačenju prvog pitanja (pitanje se izvlači na slučajan način, dakle svako pitanje se izvlači s jednakom vjerojatnošću) student izvuče pitanje na koje ne zna odgovor. Zapravo nas zanima sljedeći događaj:

$$A = \{\textit{student je izvukao pitanje na koje ne zna odgovor}\},$$

koji je mogući ishod našeg slučajnog pokusa. Ovdje će nam apsolutni broj pitanja na koja student ne zna odgovor biti pomoćna informacija, a odgovor na pitanje koje si postavljamo bit će kvocijent broja pitanja koja student nije naučio i ukupnog broja pitanja iz ponuđenog seta. Da bismo prethodno opisani postupak formalno zapisali, označimo sa $\Omega$ skup pitanja iz ponuđenog seta:

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 120\}.$$

Analogno, sa $A$ označimo skup svih pitanja koja student nije naučio:

$$A = \{p_1, p_2, \dots, p_{10}\}.$$

Pripadni kardinalni brojevi skupova $\Omega$ i $A$ su:

$$k(\Omega) = 120, \; k(A) = 10.$$

Sada imamo sve informacije koje nam trebaju, pa prema prethodno objašnjenom postupku znamo da je mogućnost izvlačenja nenaučenog pitanja (u oznaci P(A)):

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{10}{120} \approx 0.0833.$$

**Primjedba 2.**

Uočimo da smo sa $A$ označili događaj $\{$*student je izvukao pitanje na koje ne zna odgovor*$\}$, ali i skup $\{p_1, p_2, \dots, p_{10}\}$ čiji su elementi pitanja na koja student nije naučio odgovoriti i koji je podskup prostora elementarnih događaja $\Omega$. Argument za identifikaciju događaja $A$ sa skupom $A \subset \Omega$ je sljedeći: događaj $\{$*student je izvukao pitanje na koje ne zna odgovor*$\}$ realizirat će se ako i samo ako je ishod ovog slučajnog pokusa reprezentiran elementom podskupa $A$ prostora elementarnih događaja $\Omega$.

**Definicija 5.**

Neka imamo slučajan pokus sa konačno mnogo elementarnih događaja $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (dakle imamo prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$) te neka iz prirode uvjeta slučajnog pokusa slijedi da su svi ti elementarni događaji jednako mogući. Ako je $A$ proizvoljan događaj vezan uz taj slučajan pokus (tj. $A$ identificiramo s odgovarajućim podskupom od $\Omega$ koji sadrži elementarne događaje povoljne za $A$), tada vjerojatnost događaja $A$ definiramo na sljedeći način:

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja za } A}{\text{broj svih mogućih elementarnih događaja}}.$$

**Primjedba 3.**

Uočimo da ova definicija vjerojatnosti sadrži pojam "jednako moguć", koji zapravo znači jednako vjerojatan. Definicije takvog tipa nazivamo kružnim ili cirkularnim definicijama i zamjeramo im matematičku nepreciznost. Unatoč tome, ova definicija je vrlo dobra za izgradnju intuitivnog pristupa pojmu vjerojatnosti.

**Zadatak 4.**

Na raspolaganju nam je kutija u kojoj se nalazi 100 papirića numeriranih brojevima $1, 2, \ldots, 100$. Slučajan pokus sastoji se od izvlačenja jednog papirića iz kutije. Upotrebom **klasične definicije vjerojatnosti a priori** odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = izvučeni broj je jednoznamenkast,

b) B = izvučeni broj je dvoznamenkast,

c) C = izvučeni broj je manji ili jednak broju $k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$,

d) D = izvučeni broj je strogo veći od $k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$,

e) E = suma znamenaka izvučenog broja je 3,

f) F = umnožak znamenaka izvučenog broja je 6.

**Zadatak 5.**

Pravilno izrađena igraća kockica baca se dva puta. Upotrebom **klasične definicije vjerojatnosti a priori** odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = pali su jednaki brojevi,

b) B = suma brojeva koji su pali je 8,

c) C = produkt brojeva koji su pali je 8,

d) D = suma brojeva koji su pali veća je od produkta brojeva koji su pali,

e) E = produkt brojeva koji su pali veći je od sume brojeva koji su pali.