Uvod u vjerojatnost i statistiku

Vježbe 3.

Teorem 1.

[PRINCIP JEDNAKOSTI] Neka su S i T konačni skupovi. Ako postoji bijekcija među njima, tada je $k(S) = k(T)$.

Teorem 2.

[PRINCIP SUME] Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi takvi da je $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$ (dakle, disjunktni su). Tada je $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ konačan skup i vrijedi

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = k(S_1) + k(S_2) + \ldots + k(S_n).$$

Teorem 3.

[PRINCIP PRODUKTA] Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi (ne nužno disjunktni). Tada je njihov Kartezijev produkt konačan skup i vrijedi

$$k(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n) = k(S_1) \cdot k(S_2) \cdot \ldots \cdot k(S_n).$$

Teorem 4.

[O UZASTOPNOM PREBROJAVANJU] Neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi i neka je $T \subset A_1 \times \ldots \times A_n$ skup uređenih n-torki $(a_1, \ldots, a_n)$ definiranih na sljedeći način: prva komponenta a_1 može se birati na k_1 načina (dakle, među k_1 različitih elemenata skupa A_1); za svaku već izabranu prvu komponentu, drugu komponentu a_2 možemo birati na k_2 različitih načina itd. Za svaki izbor komponenti $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, n-tu komponentu a_n možemo odabrati na k_n različitih načina. Tada je kardinalni broj skupa T jednak

$$k(T) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n.$$

Primjer 1.

Trebamo odabrati jedan par, mladića i djevojku, iz razreda koji se sastoji od 21 djevojke i 2 mladića. Na koliko načina to možemo učiniti?

Primjedba 1.

Uređeni razmještaji nazivaju se PERMUTACIJE, a neuređeni razmještaji KOMBINACIJE.

Definicija 1.

Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. Varijacija r-tog razreda u skupu A je svaka uređena r-torka međusobno različitih elemenata iz skupa A. Broj varijacija r-tog razreda n-članog skupa je

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Primjer 2.

Koliko ima međusobno različitih uređenih trojki elemenata skupa A, ako je $k(A) = 10$*?*

Definicija 2.

Svaka uređena n-torka elemenata n-članog skupa je jedna permutacija tog skupa. Broj permutacija n-članog skupa je

$$p_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Primjedba 2.

Permutacija u n-članom skupu je svaka varijacija n-tog razreda tog skupa, odnosno permutacija n-članog skupa je svaka bijekcija tog skupa na samog sebe.

Primjer 3.

Na koliko načina pet ljudi može stati u red?

Definicija 3.

Neka je $A = \{a_1, \dots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. Kombinacija r-tog razreda u skupu A je svaki r-člani podskup skupa A. Broj kombinacija r-tog razreda skupa od n elemenata je

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Primjer 4.

U razredu ima 15 *dječaka i* 10 *djevojčica. Na koliko načina možemo odabrati:*

a) *tri dječaka,*
b) *tri dječaka i dvije djevojčice,*
c) *jednak broj dječaka i djevojčica?*

Definicija 4.

Neka je $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata. Varijacija r-tog razreda s ponavljanjem skupa od n-elemenata je svaka uređena r-torka elemenata iz skupa A. Broj takvih varijacija s ponavljenjem je n^r.

Primjer 5.

Koliko ima binarnih nizova duljine 7?

Definicija 5.

Broj permutacija s ponavljenjem skupa od n elemenata među kojima je n_1 elemenata prve vrste, n_2 elemenata druge vrste, ..., n_k elemenata k-te vrste (pri čemu je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) je

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Zadatak 1.

Pretpostavimo da u pošiljci od ukupno 500 jabuka ima 2% prezrelih jabuka. Kolika je vjerojatnost da slučajan uzorak od 20 jabuka uzet iz te pošiljke sadrži točno dvije prezrele jabuke?

Zadatak 2.

[PROBLEM ROĐENDANA] Kolika je vjerojatnost da između n, $n \leq 365$, osoba barem dvije osobe imaju rođendan istog datuma? (*Pretpostavke zadatka: svaka od n osoba može biti rođena s jednakom vjerojatnošću bilo kojeg dana u godini; zanemarujemo postojanje prijestupnih godina.*)

Zadatak 3.

U kutiji se nalazi a crvenih i b zelenih kuglica ($a \geq 2$, $b \geq 2$). Iz kutije na slučajan način istovremeno izvadimo dvije kuglice. Definirajmo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{izvučene kuglice su iste boje}\}, \\ B &= \{\text{izvučene kuglice su različitih boja}\}. \end{aligned}$$

Koji je od događaja A i B vjerojatniji?

Zadatak 4.

Pravilno izrađeni novčić bacamo 10 puta za redom. Kolika je vjerojatnost da se pismo realizira točno tri puta?

Zadatak 5.

Pravilnu igraću kockicu bacamo 10 puta. Kolika je vjerojatnost da se kao rezultat bacanja brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6$ pojave redom $2, 3, 1, 1, 1, 2$ puta?

Zadatak 6.

U autobusu se nalazi 15 ljudi. Do kraja putovanja ostale su 4 stanice i svaki putnik jednako vjerojatno će izaći na svakoj od njih. Kolika je vjerojatnost da svi putnici izađu na istoj stanici?

Zadatak 7.

Pretpostavimo da n ljudi ($n \geq 3$) na slučajan način sjeda za okrugli stol. Izračunajte vjerojatnost da će dva unaprijed odabrana čovjeka sjediti zajedno.

Zadatak 8.

m muškaraca i n žena raspoređuju se na slučajan način u kazalištu na $(m+n)$ sjedala složenih u redu. Kolika je vjerojatnost da sve žene sjede zajedno (jedna do druge)?

Zadatak 9.

Špil od 52 karte podijeli se na dva jednakobrojna dijela. Odredite vjerojatnost sljedećih događaja:

a) $A =$ u svakom dijelu nalaze se po dva kralja,
b) $B =$ u jednom dijelu ne nalazi se ni jedan kralj,
c) $C =$ u jednom dijelu nalazi se jedan, a u drugom dijelu tri kralja.

Zadatak 10.

Iz špila od 52 karte na slučajan način biramo 8 karata. Izračunajte vjerojatnost da su izvučena

a) točno tri asa,
b) točno tri kralja,
c) točno tri asa ili točno tri kralja.

Zadatak 11.

Student je došao na ispit znajući odgovore na 90 od 100 pitanja. Izvlači se pet pitanja.

a) Kolika je vjerojatnost da će student znati odgovore na svih pet pitanja?

b) Kolika je vjerojatnost da će student znati odgovore na barem tri od pet izvučenih pitanja?

Zadatak 12.

Iz šešira u kojem se nalazi n kuglica na slučajan način izaberemo nekoliko kuglica. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli paran broj kuglica?

Zadatak 13.

[De Mereov paradoks] Bacamo tri numerirane pravilne igraće kockice. Zanima nas vjerojatnost sljedećih događaja:

(a) $A =$ zbroj brojeva na svim trima kockicama jednak je 11,

(b) $B =$ zbroj brojeva na svim trima kockicama jednak je 12.