Uvod u vjerojatnost i statistiku

Vježbe 4.

Primjer 1.

Promotrimo segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i pokus koji se sastoji od slučajnog odabira jedne točke ω iz segmenta $[a, b]$. Ako u obzir uzmemo bilo koji segment $[c, d] \subseteq [a, b]$ možemo postaviti sljedeće pitanje: **kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka $\omega \in [a, b]$ pripada segmentu $[c, d]$?** Prirodno je pretpostaviti sljedeće:

- svaka točka segmenta $[a, b]$ ima jednaku vjerojatnost da bude izabrana,
- vjerojatnost odabira točke ω iz segmenta $[c, d] \subseteq [a, b]$ proporcionalna je duljini $(d - c)$ tog segmenta i ne ovisi o njegovom položaju, tj.

$$P(A) = k\,(d - c), \tag{1}$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti.

Nadalje nas zanima koeficijent proporcionalnosti k - k mora biti takav da vrijedi $0 \leq P(A) \leq 1$ i $P(\Omega) = 1$. Jasno je da je prostor elementarnih događaja $\Omega = [a, b]$, tj. da je vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz segmenta $[a, b]$ pripada segmenu $[a, b]$ jednaka jedan, tj. $P(\Omega) = 1$. Prema izrazu (1) slijedi

$$1 = P(\Omega) = k\,(b - a),$$

odnosno

$$k = \frac{1}{b - a}. \tag{2}$$

Iz izraza (1) i (2) sada slijedi

$$P(A) = \frac{d - c}{b - a}, \quad a < b, \quad c \leq d. \tag{3}$$

Ako duljinu segmenta interpretiramo kao njegovu mjeru i označimo ju sa $\lambda(\cdot)$ tada formulu (3) zapisujemo na sljedeći način:

$$P(A) = \frac{\lambda([c, d])}{\lambda([a, b])}, \quad \lambda([a, b]) \neq 0.$$

Prethodno razmatranje možemo poopćiti na prostore $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, pri čemu pod mjerom $\lambda(\cdot)$ podrazumjevamo volumen u promatranom prostoru. Ako je prostor elementarnih događaja Ω podskup od $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$ takav da je $\lambda(\Omega) < \infty$, tada je vjerojatnost proizvoljnog događaja $A \subseteq \Omega$ zadana sa

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Primjedba 1.

Uočimo da ovaj geometrijski pristup definiranju vjerojatnosti na $\mathbb{R}$ pretpostavlja da intervalima realnih brojeva jednake duljine pripada jednaka vjerojatnost, tj. da su to jednako vjerojatni događaji. Analogno, prema prethodno objašnjenom poopćenju, slijedi da su podskupovi od $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ jednakog volumena također jednako vjerojatni događaji.

Ako zanemarimo pretpostavku o jednakoj vjerojatnosti događaja jednake mjere (tj. površine u $\mathbb{R}$ i volumena u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$), tada vjerojatnost definiramo pomoću **nenegativne** funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

- ako je $D = \mathbb{R}$, tada mora biti
$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1,$$
- ako je $D = \mathbb{R}^2$, tada mora biti
$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = 1,$$
- ako je $D = \mathbb{R}^3$, tada mora biti
$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 1.$$

Zadatak 1.

Odredite vjerojatnost da je slučajno odabrana točka iz segmenta $[0, 1]$ racionalna?

Zadatak 2.

Za fiksiranu točku $c \in [a, b]$ i slučajno odabranu točku $x \in [a, b]$ odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $x \leq c$,

b) $x < c$,

c) $x = c$,

d) x je bliže točki a nego točki b.

Zadatak 3.

Neka su x i y dva slučajno odabrana broja iz segmenta $[0, 1]$. Odredite vjerojatnost da za njih vrijedi:

a) $x > y$,
b) $x + y < 3/2$,
c) $x = y$,
d) $xy \leq 2/9$ i $x + y < 1$.

Zadatak 4.

Trenutak u kojem će neki signal stići do prijemnika je slučajno odabrani trenutak iz intervala $[0, T]$. Prijemnik neće registrirati drugi signal ako je razlika između dva uzastopna signala manja od τ, $\tau < T$. Odredite vjerojatnost da prijemnik neće registrirati drugi signal.

Zadatak 5.

Buffonov problem. Ravnina je podijeljena paralelnim pravcima koji su jedan od drugog udaljeni za $2a$. Na tu se ravninu na slučajan način baca igla duljine $2l$, $l < a$. Odredite vjerojatnost da igla siječe neki od pravaca.

Zadatak 6.

Pokažite da sljedećim realnim funkcijama realne varijable možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & , \quad x \in [-1,1] \\ 0 & , \quad x \neq [-1,1] \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \in \langle 0, \infty \rangle \\ 0 & , \quad x \in \langle -\infty, 0] \end{cases}$

c) Koristeći funkcije iz zadataka a) i b) odredite vjerojatnost događaja

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1/2 < x \leq 1/2\} = \langle -1/2, 1/2].$$

Zadatak 7.

Pokažite da funkcijom $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranom s

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(x^2 + y) & , \quad (x,y) \in [-1,1] \times [0,1] \\ 0 & , \quad (x,y) \notin [-1,1] \times [0,1] \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz $\mathbb{R}^2$ pripada pravokutniku

$$A = [0,1] \times [0,1/2].$$