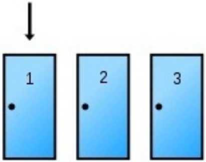
Uvod u vjerojatnost i statistiku

Vježbe 5.

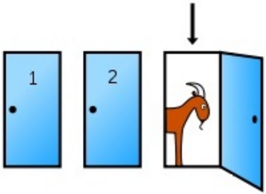
Monty Hall problem - "Koze i auto" I

Pretpostavite da igrate igru u kojoj birate između trojih vrata (označimo ih vrata Br. 1, vrata Br. 2 i vrata Br. 3). Iza jednih vrata je auto, a iza preostalih vrata nalaze se koze. Ako izaberete vrata Br. 1, voditelj igre, koji zna iza kojih vrata se nalazi auto, otvorit će ili vrata Br. 2 ili vrata Br. 3 - primjerice vrata Br. 3 iza kojih on zna da se nalazi koza. Nakon toga će vas pitati: "Želite li promjeniti vaš izbor, tj. izabrati vrata Br. 2?". Hoćete li promjeniti izbor? Zašto?

Monty Hall problem - "Koze i auto" II

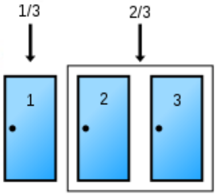


(a) Početni izbor

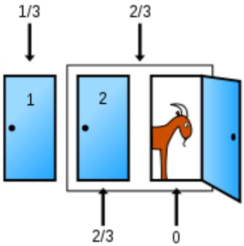


(b) Potez voditelja

Monty Hall problem - "Koze i auto" III



(c) Vjerojatnosti bez sudjelovanja voditelja



(d) Vjerojatnosti sa sudjelovanjem voditelja

Osnovni pojmovi

- Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je precizno definiran matematički model slučajnog pokusa u čijim okvirima svakom događaju $A \in \mathcal{F}$ pridružujemo njegovu vjerojatnost.
- Ako pretpostavimo da se tijekom provođenja slučajnog pokusa realizirao neki događaj B, tada ta informacija može uzrokovati promjenu vjerojatnosti ostalih događaja vezanih uz taj pokus.
- Ako se radi o promjeni vjerojatnosti događaja vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ postaje neadekvatan model našeg slučajnog pokusa te zato pokusu pridružujemo novi matematički model.

Primjer 1.

Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja pravilno izrađene igraće kockice. Odredimo:

a) vjerojatnost da je rezultat bacanja kockice neparan broj,
b) vjerojatnost da je rezultat bacanja kockice prost broj,
c) vjerojatnost da je rezultat bacanja kockice neparan broj ako je poznato da je rezultat prost broj.

Rješenje: prostor elementarnih događaja je skup

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

a) $A = \{\text{rezultat bacanja kockice je neparan broj}\} = \{1, 3, 5\}$.
Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti slijedi:

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

b) $B = \{\text{rezultat bacanja kockice je prost broj}\} = \{2, 3, 5\}$.
Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti slijedi:

$$P(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

c) Pretpostavimo da je rezultat bacanja kockice prost broj, tj. da se realizirao jedan od elemenata skupa B. Ova informacija mijenja naš stupanj uvjerenja da je rezultat bacanja kockice neparan broj, tj. da se realizirao događaj A. Prije ove informacije znali smo da se pri bacanju kockice može realizirati bilo koji element skupa Ω. Ova dodatna informacija ukazuje na činjenicu da se može realizirati samo neki element skupa B (tj. da rezultat pokusa može biti samo prost neparan broj), pa skup B preuzima ulogu prostora elementarnih događaja. Prema tome, ako znamo da se pri bacanju kockice realizirao prost broj, događaj A će se dogoditi samo ako se pri bacanju realizira ili broj 3 ili broj 5. Dakle, događaj C je sljedeći:

$$C = \{3, 5\} = A \cap B.$$

Primjenom klasične definicije vjerojatnosti sa skupom B kao prostorom elementarnih događaja slijedi:

$$P(C) = \frac{k(A \cap B)}{k(B)} = \frac{\frac{k(A \cap B)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).$$

U našem slučaju je

$$P(A|B) = \frac{k(A \cap B)}{k(B)} = \frac{2}{3}.$$

◇

Primjedba 1.

Vjerojatnost $P(A|B)$ nazivamo vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B.

Definicija 1.

[UVJETNA VJEROJATNOST] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka su A i B proizvoljni događaji (podskupovi od Ω) takvi da je $P(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B je broj iz segmenta $[0, 1]$ kojeg označavamo sa $P(A|B)$, a definira se na sljedeći način

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

Primjedba 2.

[Nezavisnost događaja] Ako su A i B mogući ishodi nekog slučajnog pokusa smatramo ih nezavisnima ako vjerojatnost realizacije događaja A ne ovisi o realizaciji događaja B, tj. ako vrijedi

$$P(A|B) = P(A),$$

i obrnuto, tj. $P(B|A) = P(B)$.

Definicija 2.

[Nezavisnost događaja] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka su A i B proizvoljni događaji (podskupovi od Ω). Kažemo da su događaji A i B nezavisni ako vrijedi

$$P(A|B) = P(A).$$

Primjedba 3.

Iz definicije uvjetne vjerojatnosti (izraz (1)) lako slijedi da je

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B). \tag{2}$$

Ako su događaji A i B nezavisni, tj. ako je $P(A|B) = P(A)$ iz izraza (2) slijedi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3}$$

Dakle, ako su događaji A i B nezavisni, vjerojatnost njihovog presjeka jednaka je produktu njihovih vjerojatnosti.
Obratno, iz izraza (3) dijeljenjem sa $P(B)$, uz pretpostavku da je $P(B) > 0$, slijedi

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B),$$

što po definiciji znači da su događaji A i B nezavisni.

Definicija 3.

[NEZAVISNOST DOGAĐAJA] Događaji A i B su nezavisni ako vrijedi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Zadatak 1.

Slučajan pokus sastoji se od bacanja pravilno izrađenog novčića tri puta za redom. Želimo naći vjerojatnost događaja A uz dani događaj B kada su A i B sljedeći događaji:

- $A = \{\text{glava je pala više puta nego pismo}\}$,
- $B = \{\text{prvo je palo pismo}\}$.

Zadatak 2.

Iz kutije u kojoj se nalazi m crvenih i n zelenih kuglica na slučajan način izvučeno je k kuglica. Uz pretpostavku da su sve izvučene kuglice iste boje, kolika je vjerojatnost da su sve zelene?

Zadatak 3.

Slučajan pokus sastoji se od slučajnog odabira obitelji koja ima dvoje djece (uz pretpostavku da su vjerojatnosti rođenja kćerke i sina jednake (što približno odgovara stvarnoj situaciji), te da znamo redoslijed rađanja djece u obitelji). Treba provjeriti jesu li sljedeći događaji nezavisni:

- $A = \{\text{u obitelji je barem jedna kćerka}\}$,
- $B = \{\text{u obitelji su jedna kćerka i jedan sin}\}$.

Formula potpune vjerojatnosti

Formulu potpune vjerojatnosti događaj A rastavljamo na realizacije uz događaje $H_1, H_2, \ldots, H_n$, koji su međusobno disjunktni i u uniji čine čitav prostor elementarnih događaja Ω.

Definicija 4.

Događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$ u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ čine potpunu familiju ili potpun sustav događaja ako vrijedi:

- $H_i \neq \emptyset, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
- $H_i \cap H_j = \emptyset, \ \ i \neq j$
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$

Primjedba 4.

Konačna familija skupova $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ je jedna PARTICIJA skupa Ω.

Primjedba 5.

Elemente potpunog sustava događaja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ zovemo HIPOTEZAMA. Vrlo je važno imati na umu da se hipoteze međusobno isključuju (disjunktne su) i da se u svakom izvođenju slučajnog pokusa točno jedna od njih mora dogoditi.

Teorem 1.

FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI Neka je $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada za proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$ vrijedi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Zadatak 4.

Cilj se gađa iz tri topa. Topovi pogađaju cilj nezavisno jedan od drugoga s vjerojatnošću 0.4. Ako jedan top pogodi cilj uništava ga s vjerojatnošću 0.3, ako ga pogode dva topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.7, a ako ga pogode tri topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.9. Nađite vjerojatnost uništenja cilja.

Zadatak 5.

Imamo dvije kutije. U prvoj se nalazi a bijelih i b crnih kuglica, a u drugoj c bijelih i d crnih kuglica. Iz prve kutije na slučajan način biramo k kuglica, a iz druge m kuglica. Ovih $(k+m)$ kuglica izmiješamo i stavimo u treću kutiju.

a) Iz treće kutije na slučajan način izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da ona bude bijele boje?

b) Iz treće kutije na slučajan način izvučemo tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da je barem jedna kuglica bijele boje?

Zadatak 6.

Na usmenom ispitu iz Uvoda u vjerojatnost i statistiku ponuđeno je 10 pitanja od kojih je student naučio njih n, $0 \leq n \leq 10$. Student će položiti ispit ako bude točno odgovorio na dva slučajno odabrana pitanja ili ako točno odgovori na jedno od njih i na treće, dodatno postavljeno pitanje. Na koliko pitanja student treba znati točno odgovoriti da bi s vjerojatnošću većom od 0.8 položio ispit?

Zadatak 7.

Koristeći uvjetnu vjerojatnost i formulu potpune vjerojatnosti napravite matematičku formulaciju *Monty Hall problema*. Riješite problem i opravdajte intuiciju s početka vježbi.

Bayesova formula I

- Pretpostavimo da nam je zadan potpun sustav događaja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ te da su nam poznate vjerojatnosti svih hipoteza H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Nadalje pretpostavimo da je pokus izveden i da se realizirao događaj A.
- Uvjetne vjerojatnosti događaja A uz svaku od hipoteza H_i, dakle vjerojatnosti $P(A|H_i)$, također su nam bile poznate prije izvođenja pokusa.
- Sada je prirodno postaviti pitanje o iznosu vjerojatnosti hipoteza H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nakon izvođenja pokusa, tj. uz poznatu činjenicu da se realizirao događaj A. Dakle, zanimaju nas uvjetne vjerojatnosti $P(H_i|A)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bayesova formula II

Teorem 2.

BAYESOVA[1] FORMULA: Neka je $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $A \in \mathcal{F}$ takav da je $P(A) > 0$. Tada $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

[1] Thomas Bayes (1702. - 1761.), britanski matematičar.

Zadaci

Zadatak 8.

Ptica slijeće u slučajno izabrano gnijezdo od ukupno tri gnijezda koja su joj na raspolaganju. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: u prvom gnijezdu su oba jaja zdrava, u drugom je jedno zdravo i jedno pokvareno, a u trećem su oba jaja pokvarena. Nađite vjerojatnost da ptica sjedi na pokvarenom jajetu. Ako je sjela na pokvareno jaje, kolika je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?

Zadatak 9.

Neki izvor emitira poruke koje se sastoje od znakova 0 i 1 koji se šalju nezavisno. Vjerojatnost emitiranja znaka 1 je 0.6, a vjerojatnost emitiranja znaka 0 je 0.4. Na izlazu iz komunikacijskog kanala 10% znakova se pogrešno interpretira. Ako je primljena poruka 101, kolika je vjerojatnost da je ona i poslana?

Zadatak 10.

Iz kutije u kojoj se nalazi n kuglica na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da će ta kuglica biti bijela, ako su sve pretpostavke o prethodnom broju kuglica u kutiji jednako vjerojatne? Nakon što je izvučena bijela kuglica, kolika je vjerojatnost da su sve kuglice u kutiji bijele?

Zadatak 11.

Kocka A ima 2 plave i 4 žute strane, a kocka B ima 5 plavih i 1 žutu stranu. Baca se asimetričan novčić kod kojeg se glava realizira s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$, a pismo s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$. Ako se pojavi glava, baca se kocka A, a ako se pojavi pismo baca se kocka B.

a) Izračunajte vjerojatnost da se pri bacanju kocke pojavi plava boja.

b) Slučajan pokus ponavljamo n puta (prvo bacamo novčić, a zatim odgovarajuću kocku). Ako se u n bacanja plava boja pojavila n puta, izračunajte vjerojatnost da je kocka A bačena bar jednom.

Zadatak 12.

Na raspolaganju imamo 3 šešira s kuglicama. U prvom šeširu nalaze se 5 crnih, 2 plavih, 6 crvenih i 4 zelene kuglice. U drugom šeširu nalaze se 3 crne, 4 plave i 5 zelenih kuglica. U trećem šeširu nalazi se 6 crvenih, 6 plavih i 3 zelene kuglica. Na slučajan način odabiremo jedan šešir i iz njega na slučajan način odjednom izvlačimo tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli jednu plavu i dvije crvene kuglice? Ako smo izvukli jednu plavu i dvije crvene kuglice, kolika je vjerojatnost da smo odabrali treći šešir?